

**Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009**

30. April 2009

- 37) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum*? Was ist ein *unitärer Raum*? Was ist ein komplexer *Prähilbertraum*? Was ist eine *Orthonormalbasis* eines unitären Raums? Sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^2 . Wieviele Möglichkeiten gibt es, den Vektor

$$\frac{1}{5}(2 + i, -4 + 2i)$$

zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{C}^2 zu ergänzen? Ergänzen Sie diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis und berechne die Koordinaten von $(1 + 2i, 3 - i)$ bezüglich dieser Basis.

- 38) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Ergänzen Sie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i)$ zu einer ON-Basis von \mathbb{C}^3 (mit Standardskalarprodukt). Dabei ist $i^2 = -1$. Berechnen Sie die Koordinaten der Standardbasisvektoren bezüglich dieser Basis.

- 39) Der komplexe Vektorraum

$$V := \{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C} \}$$

ist mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \overline{f(x)}g(x)dx$$

definierten Skalarprodukt ein dreidimensionaler unitärer Raum. Dabei ist

$$\int_r^s \left(\sum_{p=0}^n c_p x^p \right) dx := \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} c_p (s^{p+1} - r^{p+1}).$$

Es seien

$$X^p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto t^p, 0 \leq p \leq 2.$$

Konstruieren Sie aus der Basis (X^0, X^1, X^2) von V eine Orthonormalbasis von V .