Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

5. bzw. 6. Dezember 2011

54) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Berechnen Sie damit Orthonormalbasen des von

$$(1,3,2) \quad \text{und} \quad (2,1,1)$$

bzw. von

$$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0),\ (0,1,-2,2) \quad \text{und} \quad (1,-1,1,1)$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt).

55) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum und $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zahlenpaare in $\mathbb{R}^2$, deren Abstand zu v und zu w gleich ist, eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist und dass diese Gerade zur Geraden durch v und w orthogonal steht. (Diese Gerade heißt *Streckensymmetrale* der Strecke zwischen v und w).

56) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors auf einen Untervektorraum bzw. auf einen affinen Unterraum eines euklidischen Raumes? Was ist der *Abstand eines Punktes* von einem Untervektorraum bzw. von einem affinen Unterraum?
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) auf die affinen Unterräume

$$\mathbb{R}\,(-2,2,1)\,,\ (-1,0,-1) + \mathbb{R}\,(2,1,2)$$

$$W := \mathbb{R}\,(4,2,-1) + \mathbb{R}\,(2,2,-1) \ \text{ und } \ (2,3,2) + W\,.$$

Berechnen Sie die Abstände von $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ zu diesen affinen Unterräumen.

57) Was ist der *Winkel zwischen zwei Halbgeraden*, deren Anfangspunkte gleich sind? Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.
Sei $A := (2,1,1)$ und $B := (1,-1,-1)$. Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}B$. Berechnen Sie $\|A\|$, den Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade durch 0 und B und dessen Abstand zu 0.

58) Erläutern Sie den Cosinussatz und den Sinussatz. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.
Sei $A := (-1,2,-2)$ und $B := (6,2,3)$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen B und einem Punkt C mit den folgenden Eigenschaften: der Abstand zwischen A und C ist 4 und der Winkel zwischen $A+\mathbb{R}_{\geq 0}(B-A)$ und $A+\mathbb{R}_{\geq 0}(C-A)$ ist $\frac{\pi}{4}$.
Ist C durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?
Berechnen Sie den Winkel zwischen $B + \mathbb{R}_{\geq 0}(C - B)$ und $B + \mathbb{R}_{\geq 0}(A - B)$.

59) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, p_1, p_2 linear unabhängige Vektoren in V, b und v zueinander senkrecht stehende Vektoren $\neq 0$ und α_1 bzw. α_2 der Winkel zwischen $-b$ und p_1 bzw. zwischen b und p_2.
(„Technische Interpretation": $\mathbb{R}\,b$ beschreibt eine Brücke, $\mathbb{R}_{\geq 0}p_1$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}p_2$ beschreiben die zwei Schenkel eines Pfeilers der Brücke und v beschreibt eine normal zur Brücke auf den Pfeiler wirkende Kraft).
Berechnen Sie $u_1 \in \mathbb{R}\,p_1$ und $u_2 \in \mathbb{R}\,p_2$ so, dass $u_1 + u_2 = v$ ist. Für welche Winkel α_1, α_2 mit $\alpha_1 = \alpha_2$ ist $\|u_1\| \geq \|v\|$?