

4. Gerade Biegung

Der Balken als wichtiges Tragelement ist bereits aus der Statik bekannt. Seine Merkmale sind:

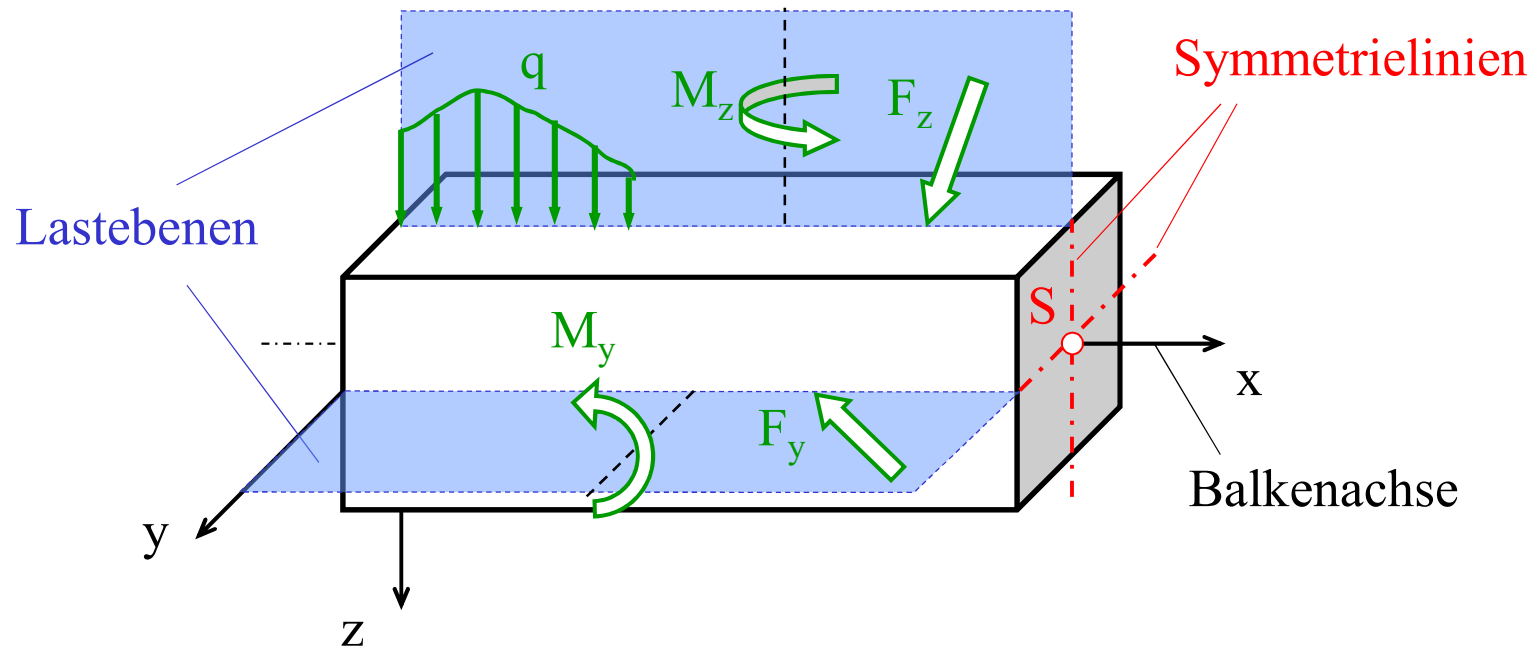
- Prismatischer Stab mit beliebigen Querschnitt
- Gerade oder gekrümmte Achse
- Querschnittsabmessungen klein gegenüber der Länge
- Belastung durch Axial- und Querkräfte bzw. Momente



aus: www.demagcranes.de

Reale Träger werden hauptsächlich auf Biegung beansprucht, axial- und Querkraftbeanspruchung sind meistens vernachlässigbar.

Gerade oder einachsige Biegung liegt vor, wenn sich der Balken infolge der äußeren Belastung durchbiegt, sich aber nicht um die Längsachse verdreht oder kippt.



Das ist immer dann der Fall, wenn die durch die Lasten (Kräfte und Momente) aufgespannte Lastebene mit einer Symmetrieachse (Hauptträgheitsachse) des Trägers zusammenfällt.

Reine Biegung: Das Biegemoment wird durch äußere Momente hervorgerufen.
Es ist über dem Balken bereichsweise konstant



Querkraftbiegung: Das Biegemoment wird durch Querkräfte oder verteilte Lasten bewirkt. Das Biegemoment ist über der Balkenlängsachse veränderlich



Im folgenden wird die Beanspruchung von Trägern durch verteilte Lasten (Belastungsfunktion) behandelt.

4.1 Verteilte Lasten

Verteilte Lasten infolge Eigengewicht, Druck oder Flächenpressung werden bei ebenen Trägern idealisiert als linienförmige Last angenommen. Hierbei wirkt auf jedes Trägerelement der Länge Δx der Kraftanteil ΔF .

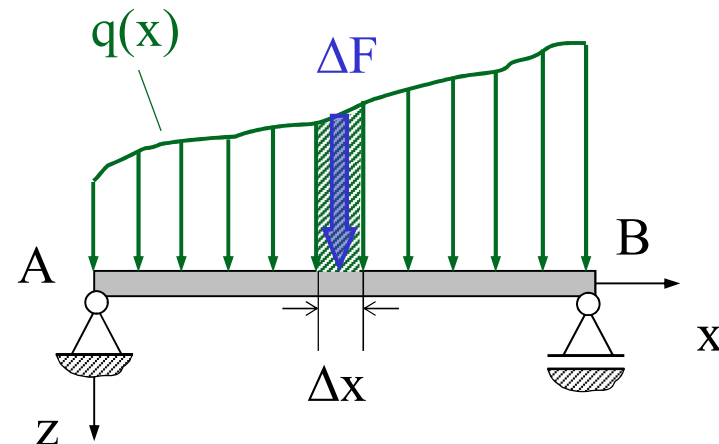
Die mittlere Belastungsintensität im Bereich Δx ergibt sich aus

$$q_m = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Für den Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man die Streckenlast

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = q(x)$$

Die Einheit der Streckenlast $q(x)$ ist Kraft/Länge [N/mm, kN/m].

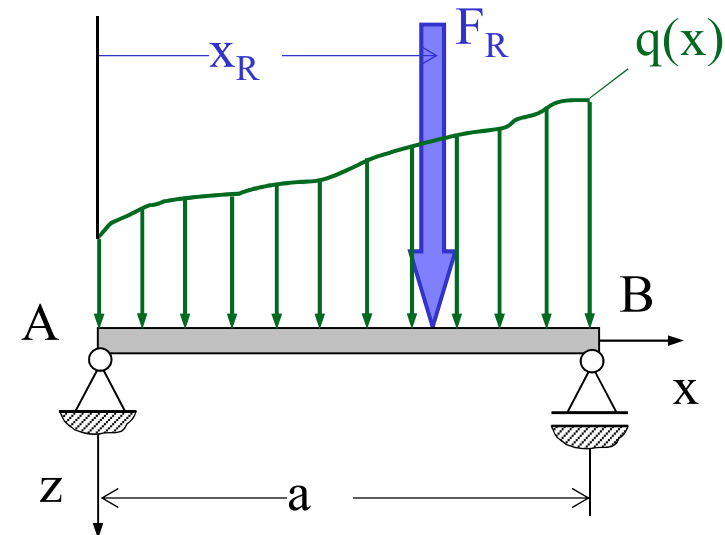


Umgekehrt erhält man durch Integration eine zur Streckenlast äquivalente Resultierende:

$$F_R = \int_0^a q(x) dx$$

Für das resultierende Moment der Streckenlast ergibt sich analog:

$$M_R = \int_0^a x \cdot q(x) dx$$



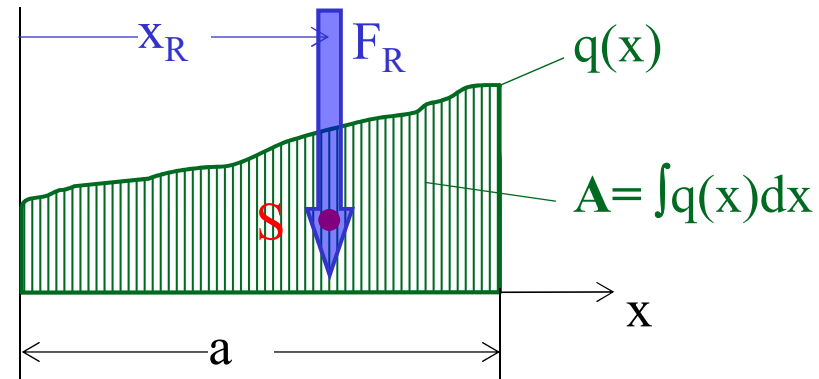
Die Resultierende muss das gleiche Moment wie die Streckenlast bezüglich eines beliebigen Punktes besitzen. Für den Punkt A erhält man

$$F_R \cdot x_R = M_R$$

mit dem Abstand x_R der Resultierenden F_R .

Setzt man die Integrale ein, folgt

$$x_R = \frac{M_R}{F_R} = \frac{\int_0^a x \cdot q(x) dx}{\int_0^a q(x) dx}$$

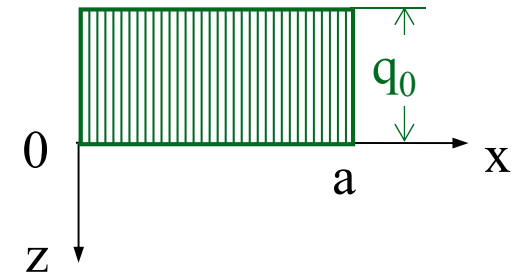


Der Ausdruck entspricht der Koordinate des Flächenschwerpunktes S, wenn das Integral $\int q(x) dx$ als Fläche aufgefasst wird

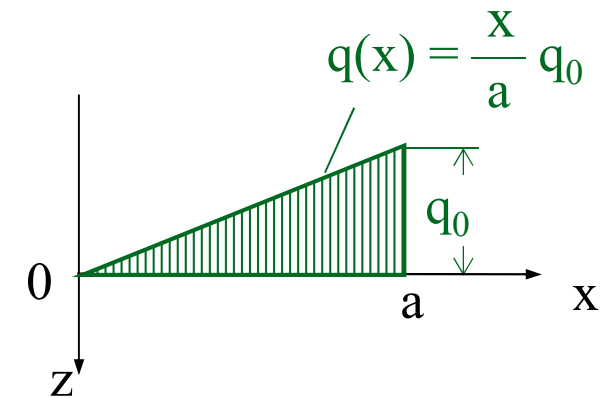
Der Abstand x_R der Resultierenden F_R ist gleich dem Abstand des Flächenschwerpunktes der Fläche unter der Belastungskurve $q(x)$. Die Resultierende der Streckenlast entspricht der Belastungsfläche. Sie geht mit ihrer Wirkungslinie durch deren Schwerpunkt.

Streckenlasten können durch Resultierende ersetzt werden, die im jeweiligen Schwerpunkt der Belastungsfläche angreifen.

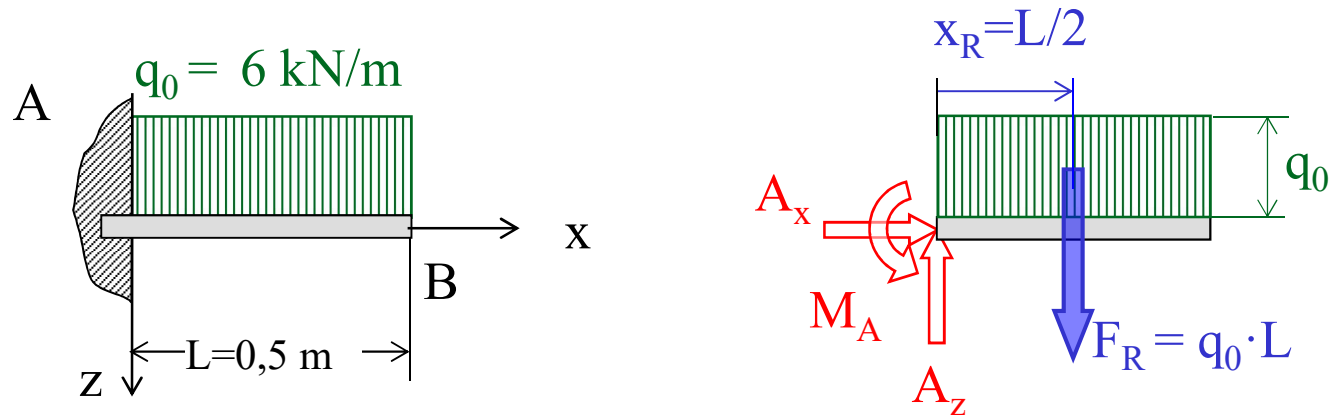
Konstante Streckenlast:



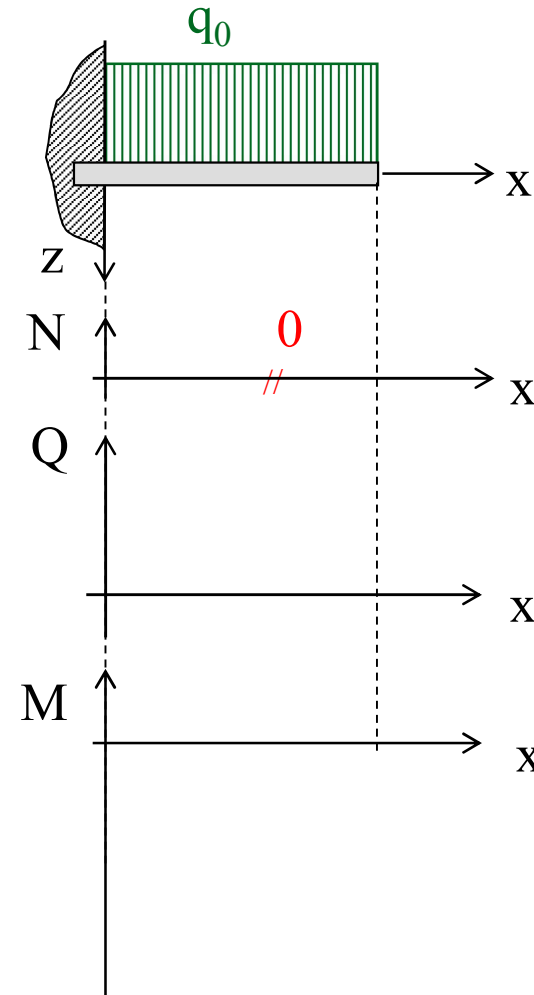
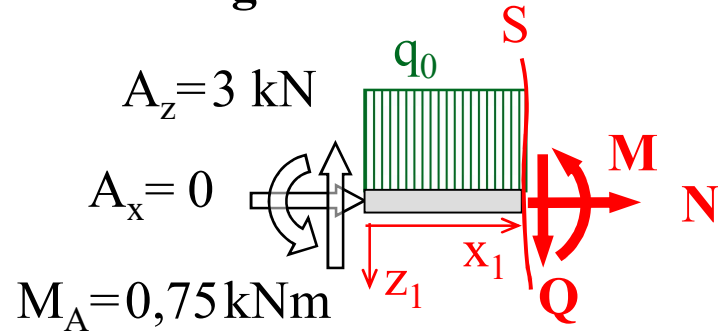
Linear veränderliche Streckenlast:



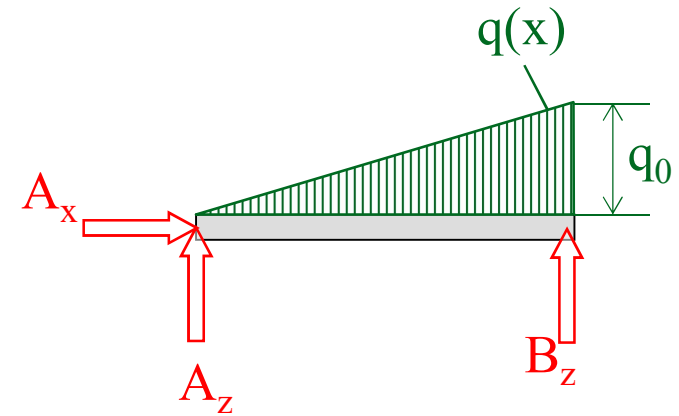
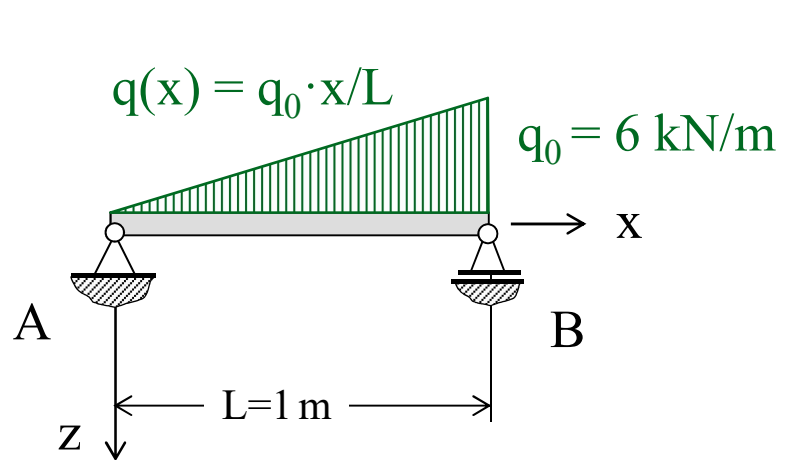
a) Eingespannter Balken mit konstanter Streckenlast



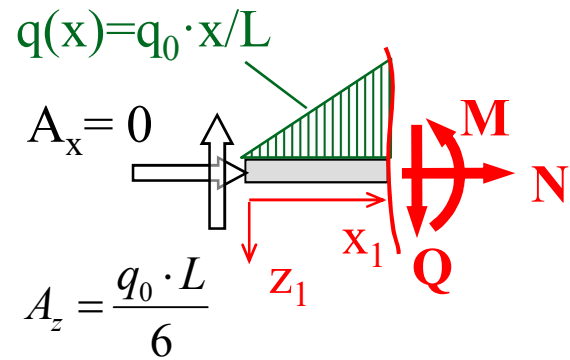
... Fortsetzung



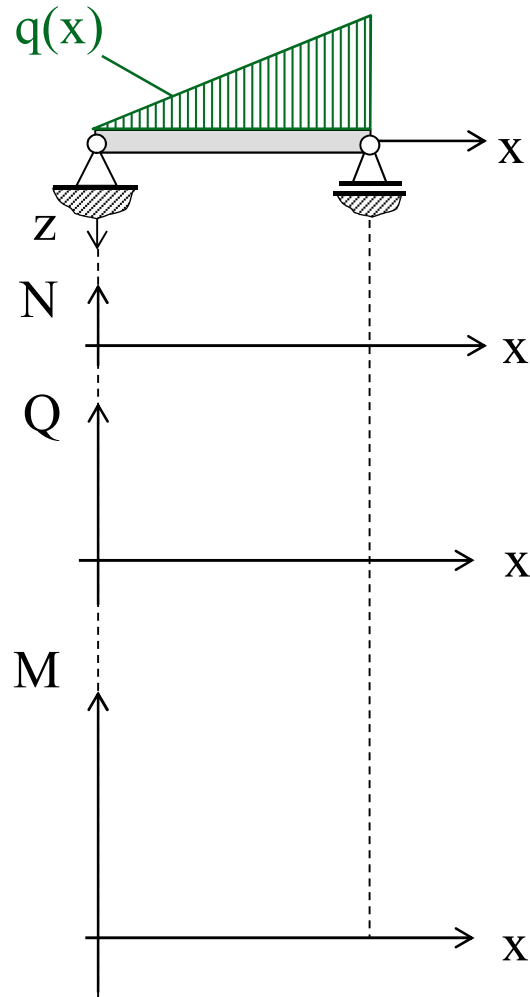
b) Gelagerter Balken mit Dreiecklast



... Fortsetzung



... Fortsetzung

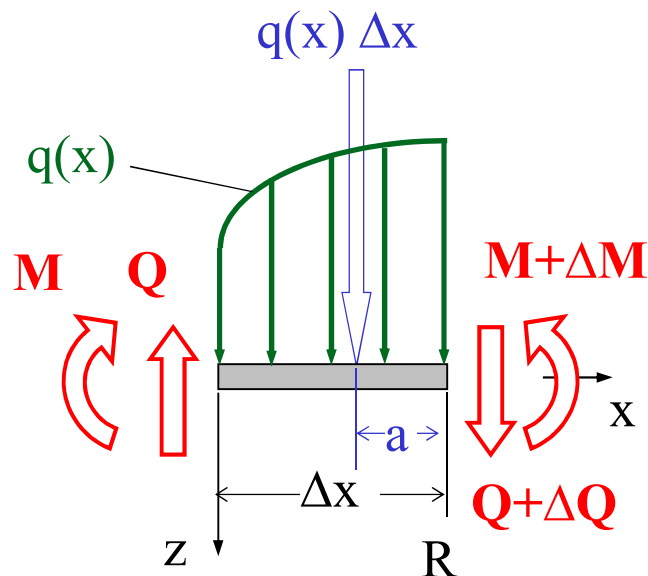


Wie aus dem Schnittgrößenverlauf ersichtlich, tritt das maximale Biegemoment M_{\max} an der Stelle x_0 auf, an der die Querkraft verschwindet.

4.2 Belastungsfunktion und Schnittkräfte

Wie das vorhergehende Beispiel zeigt, tritt das maximale Moment an der Stelle auf, an der die Querkraft durch Null geht.

Betrachtet man ein herausgeschnittenes Balkenelement der Länge Δx mit der Belastungsfunktion $q(x)$, so ergeben sich unterschiedliche Schnittgrößen an den Schnittufern.



Aus dem Kräftegleichgewicht folgt

$$\sum F_z = 0 = -Q + q(x) \cdot \Delta x + (Q + \Delta Q)$$

$$\Rightarrow q(x) \cdot \Delta x + \Delta Q = 0$$

Das Momentengleichgewicht liefert

$$\sum M^R = 0 = (M + \Delta M) - M - Q \cdot \Delta x + q(x) \cdot \Delta x \cdot a$$

$$\Rightarrow \Delta M - Q \cdot \Delta x + q(x) \cdot \Delta x \cdot a = 0$$

Im Grenzübergang geht mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch $a \rightarrow 0$ und damit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx} = -q(x) \qquad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = Q(x)$$

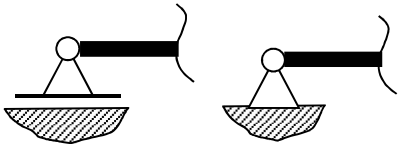
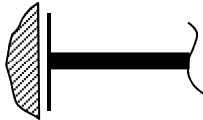

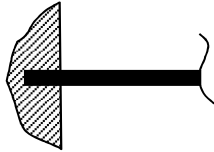
Die Ableitung der Querkraft nach der Koordinate x ist gleich der negativen Belastungsfunktion. Die Ableitung des Moments nach der Koordinate x liefert die Querkraft, nochmalige Ableitung liefert die negative Belastungsfunktion.

$$Q'(x) = -q(x), \quad M'(x) = Q(x), \quad M''(x) = -q(x)$$

Umgekehrt ergibt sich durch Integration der negativen Belastungsfunktion $-q(x)$ die Querkraft $Q(x)$, durch nochmalige Integration das Moment $M(x)$.

$$Q(x) = -\int q(x) dx + k_1 \qquad M(x) = \int Q(x) dx + k_1 \cdot x + k_2$$

Die Integrationskonstanten k_1 und k_2 lassen sich aus den Randbedingungen gewinnen.

Randbedingung	Symbol	Querkraft Q	Moment M
Gleitlager, Gelenklager		i. a. $\neq 0$	0
Führung		0	i. a. $\neq 0$
Freies Ende		0	0
Einspannung		i. a. $\neq 0$	i. a. $\neq 0$

Für den Balken unter Dreiecklast  ergibt sich:

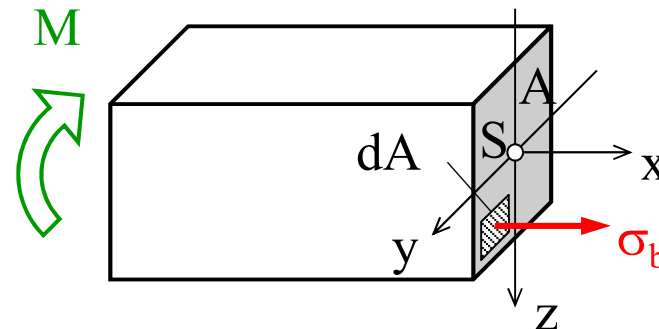
4.3 Biegung bei konstantem Biegemoment

Wird ein Balken allein durch Endmomente belastet, ist das Biegemoment über der Balkenlängsachse konstant (reine Biegung). Aus der differentiellen Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

folgt, dass für konstantes Biegemoment die Querkraft Null wird. Somit treten auch keine Schubspannungen auf (querkraftfreie Biegung).

Die Beanspruchung eines Trägers bei reiner Biegung ergeben sich allein aus den daraus resultierenden Biegespannungen, die in Ebenen senkrecht zur Balkenlängsachse wirken.



Bei konstantem Biegemoment treten in Ebenen senkrecht zur Balkenlängsachse nur Normalspannungen, aber keine Schubspannungen auf.

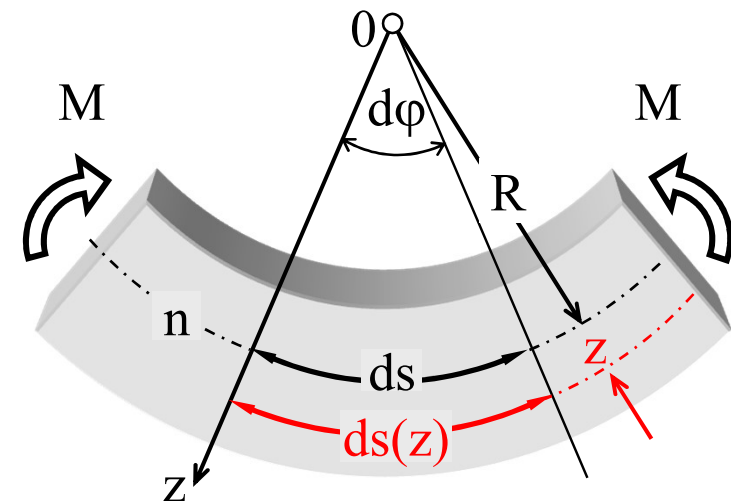
4.3.1 Biegebeanspruchung

Biegebeanspruchung tritt auf, wenn ein Biegemoment M um die Querachse eines Trägers wirkt. Dieser wird sich infolge der Belastung durchbiegen.

Im unverformten Zustand haben alle Fasern eines Balkenelements die gleiche Länge ds . Bei Biegung behält die neutrale Faser n ihre Ursprungslänge, alle anderen Fasern ändern ihre Länge.

Mit $ds = R \cdot d\varphi$ folgt für die Dehnung ε einer Faser im Abstand z von der neutralen Faserschicht:

$$\varepsilon(z) = \frac{ds(z) - ds}{ds} = \frac{(R + z) \cdot d\varphi - R \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi} = \frac{z}{R}$$

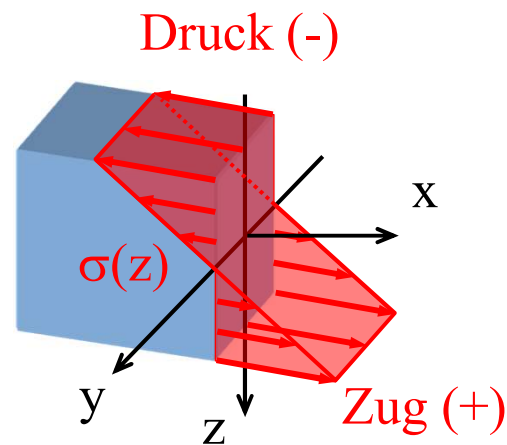


Die Dehnung ε ist proportional zum Abstand von der neutralen Faser und umgekehrt proportional zum Krümmungsradius R .

Setzt man das Hook'sche Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ein erhält man die durch die Balkenbiegung verursachte Biegespannung:

$$\sigma_b(z) = E \cdot \varepsilon(z) = E \cdot \frac{z}{R}$$

Im Gegensatz zu den durch Längskräfte verursachten Normalspannungen sind bei Biegung die Spannung über der Balkenhöhe linear veränderlich.



Es handelt sich um eine rein geometrische Beziehung, die unabhängig von der Querschnittsform ist

4.3.2 Kräfte- und Momentengleichgewicht am Balken

Die in den Querschnittsflächen wirkenden Spannungen müssen den Schnittgrößen äquivalent sein. Bei reiner Biegung treten keine Längskräfte auf, die Normalkraft muss daher Null sein. Es gilt

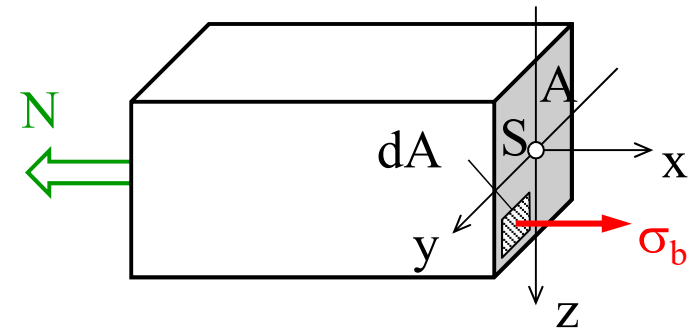
$$N = \int_A \sigma_b(z) dA = \frac{E}{R} \int_A z dA \stackrel{!}{=} 0$$

Die Normalkraft verschwindet, wenn das Integral

$$S_y = \int_A z dA = 0$$


Null wird. Das ist nur dann der Fall, wenn die y-Achse gleichzeitig Schwerachse ist. Daraus folgt:

Die neutrale Faserschicht geht durch den Flächenschwerpunkt des Querschnitts. Schwerpunktkoordinaten sind biegespannungsfrei.

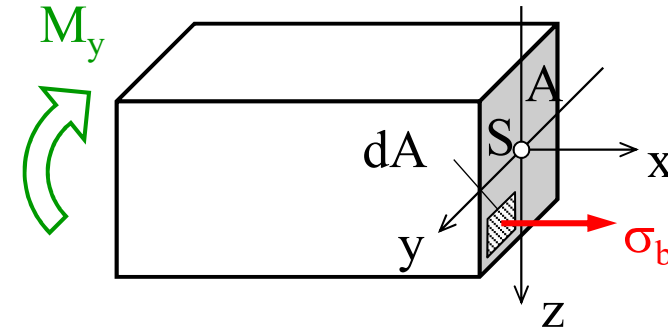


Für das Biegemoment um die y-Achse gilt das Momentengleichgewicht:

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma_b(z) dA$$

 Mit $\sigma_b(z) = E \cdot \frac{z}{R}$ folgt

$$M_y = \int_A z \cdot E \cdot \frac{z}{R} dA = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA$$



Das Integral stellt das axiale Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse dar.

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Durch Einsetzen der Beziehung $\frac{E}{R} = \frac{\sigma_b(z)}{z}$ ergibt sich

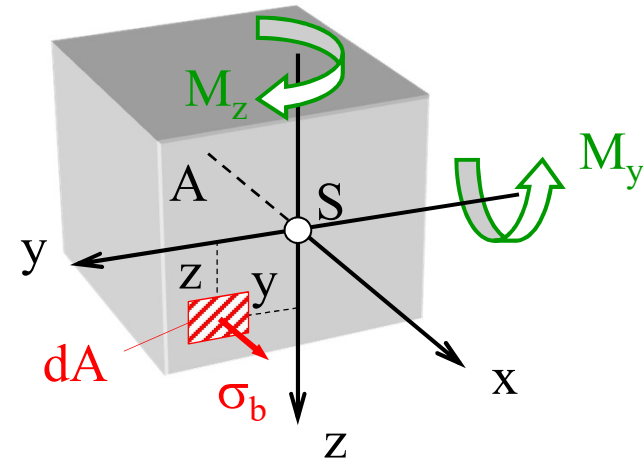
$$M_y = \frac{E}{R} \cdot I_y = \frac{\sigma_b(z)}{z} \cdot I_y$$

Die Biegespannung infolge eines Moments um die y -Achse ergibt sich aus

$$\sigma_b(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad \text{mit} \quad I_y = \int_A z^2 dA$$

Analog gilt für Biegung um die z -Achse

$$\sigma_b(y) = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad \text{mit} \quad I_z = \int_A y^2 dA$$



Das Vorzeichen der Biegespannung (Zug oder Druck) ergibt sich aus der Rechnung, wenn die die Momente nach Vorzeichenkonvention und die Abstände vorzeichengerecht eingetragen wird.

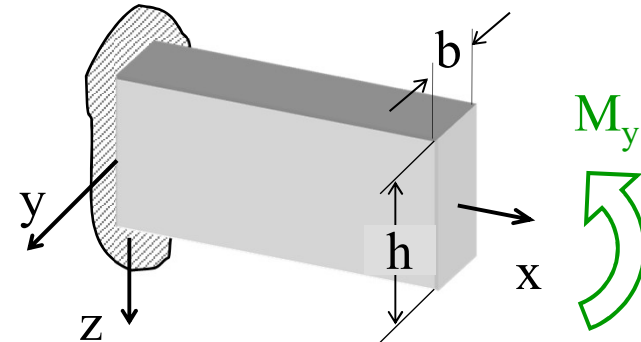
Mit den Gleichungen lassen sich Spannungen in jedem Punkt eines Querschnitts berechnen, die durch Biegemomente um die Querachsen eines belasteten Trägers hervorgerufen werden.



Beispiel: Biegemomentbelasteter Rechteckträger

Gegeben: $b = 5 \text{ mm}$, $h = 30 \text{ mm}$, $M_y = 30 \text{ Nm}$

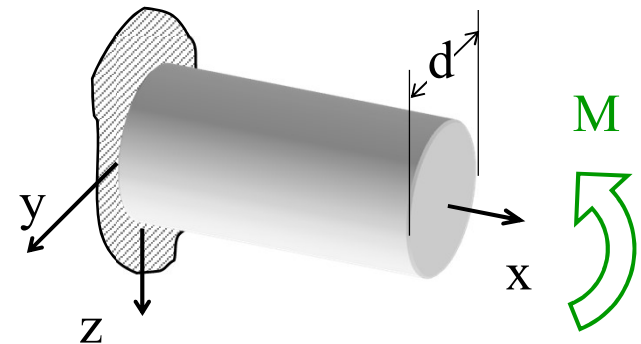
Gesucht: Max. Biegespannungen



Übung: Biegemomentbelastete Welle

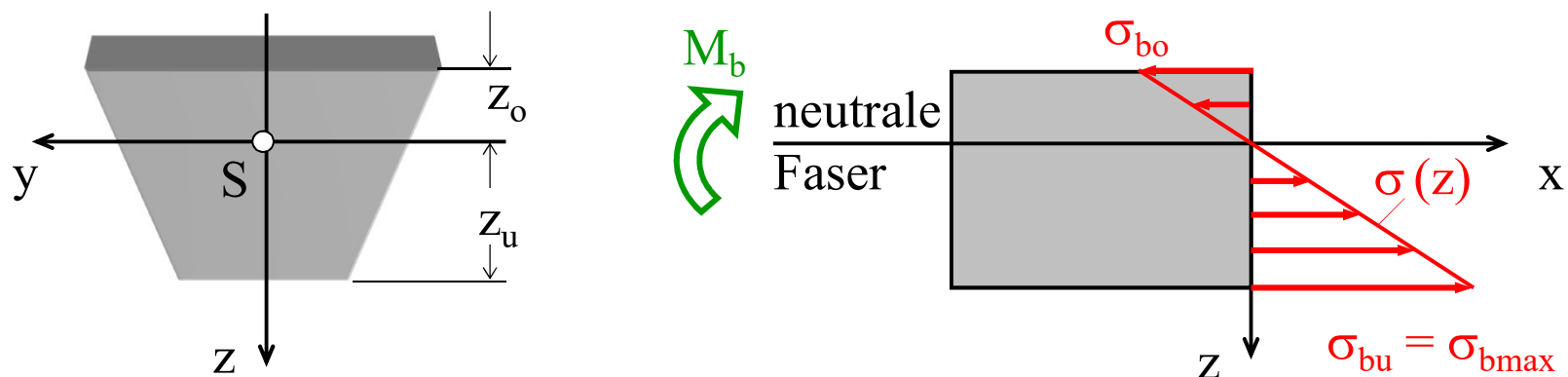
Gegeben: $d = 20 \text{ mm}$, $M = 40 \text{ Nm}$

Gesucht: Max. Biegespannungen



4.4 Biegespannung bei unsymmetrischem Querschnitt

Die Biegespannungen steigen linear von der neutralen Faserschicht zum Rand hin an. Bei unsymmetrischen Querschnitten bezüglich der Biegeachse treten die maximalen Spannungen in den Randfasern auf, die am weitesten von der neutralen Faserschicht und somit vom Flächenschwerpunkt entfernt sind.



Die Biegerandspannungen ergeben sich mit den Randabständen z_o bzw. z_u

$$\sigma_{bo} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_o \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{bu} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_u$$

Die maximale Biegeandspannung tritt für den größeren der beiden Werte auf

$$\sigma_{b \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\max}$$

Die geometrischen Größen werden zum axialen **Widerstandsmoment**

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$$

bezüglich der y-Achse zusammengefasst. Die Einheit ist [m³, mm³ bzw. cm³].

Analog ergibt sich für das Widerstandsmoment um die z-Achse

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

Damit folgt für die Biegeandspannungen um die y- Achse

$$\sigma_{b \max} = \frac{M_y}{W_y}$$

bzw. um die z-Achse

$$\sigma_{b\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

Mit dem Biegemoment M_b und dem Widerstandsmoment W_b ergibt sich die allgemeine Formulierung der Biegespannung σ_b in der Randfaser

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

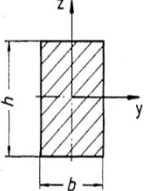
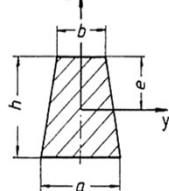
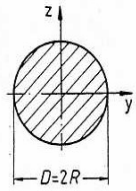
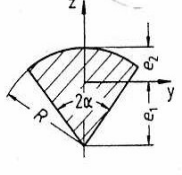
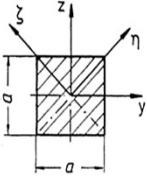
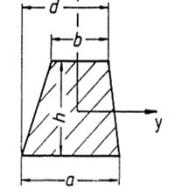
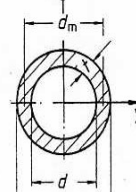
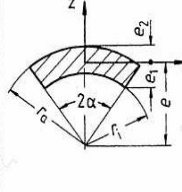
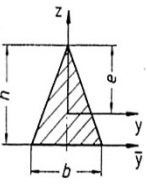
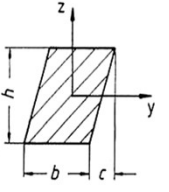
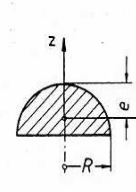
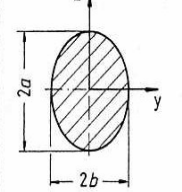
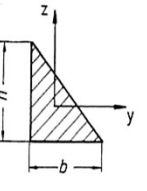
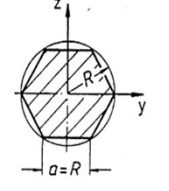
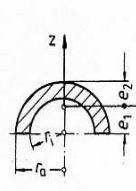
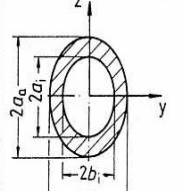
Biegespannung ist gleich Biegemoment durch Widerstandsmoment.

Die Gleichung wird als **Biegespannungsformel** bezeichnet. Hierbei steht der Buchstabe b für Biegung, der bei der Berechnung durch den Index der betrachteten Biegeachse y bzw. z ersetzt wird.

Im Vergleich zu der allg. Definition einer Normalspannung $\sigma = F/A$ entspricht das Biegemoment der Normalkraft und das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche.

Für einfache Querschnitte sind die geometrischen Größen in Tabellen aufgeführt.



 $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$ $W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$	 $I_y = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}$ $I_z = \frac{h}{48} (a+b)(a^2 + b^2)$ $W_y = \frac{h^2}{12} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2a+b}$ <p>für $e = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b}$</p>	 $I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$ $W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$	 $I_y = R^4 \left[\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{2(1 - \cos 2\alpha)}{9\alpha} \right]$ $I_z = \frac{R^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)}{8}$ $W_y = \frac{I_y}{e_{1,2}}$ <p>$e_{1,2}$ siehe A 2.2</p>
 $I = \frac{a^4}{12}$ <p>für alle Achsen gleich</p> $W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$ $W_{\eta} = W_{\zeta} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \approx 0,118 a^3$	 $I_y = \frac{h^3 (B^2 + 2ab)}{36B}$ $I_z = \frac{h}{36B} [B^2(B^2 - ab) - d(B-d)(B^2 + 2ab)]$ $I_{yz} = \frac{h^2}{72B} (B - 2d)(B^2 + 2ab)$ <p>$B = a + b$</p>	 $I = \frac{\pi (D^4 - d_m^4)}{64}$ $W = \frac{\pi (D^4 - d_m^4)}{32D}$ <p>für $t/d_m \ll 1$:</p> $I \approx \frac{\pi d_m^3 t}{8}; W \approx \frac{\pi d_m^2 t}{4}$	 $I_y = (r_a^4 - r_i^4) \frac{(2\alpha + \sin 2\alpha)}{8} - e^2 \alpha (r_a^2 - r_i^2)$ $I_z = (r_a^4 - r_i^4) \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha)}{8}$ $W_{y,z} = I_y / e_{1,2}$ <p>$e, e_{1,2}$ siehe A 2.2</p>
 $I_y = \frac{bh^3}{36}; I_{\bar{y}} = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$ $W_y = \frac{bh^2}{24} \text{ für } e = \frac{2}{3}h$ $W_z = \frac{hb^2}{24}$	 $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{bh(b^2 + c^2)}{12}$ $I_{yz} = -\frac{h^2 bc}{12}$ $W_y = \frac{bh^2}{6}$	 $I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4 \approx 0,1098 R^4$ $I_z = \frac{\pi R^4}{8}$ $W_y \approx 0,191 R^3$ <p>für $e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) R$</p>	 $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_z = \frac{\pi b^3 a}{4}$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$ $W_z = \frac{\pi b^2 a}{4}$
 $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{36}$ $I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{72}$	 $I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4 \approx 0,541 a^4$ <p>für alle Achsen gleich</p> $W_y = \frac{5}{8} a^3$ $W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^3 \approx 0,541 a^3$	 $I_y \approx 0,110 (r_a^4 - r_i^4) - 0,283 r_a^2 r_i^2 \frac{r_a - r_i}{r_a + r_i}$ $I_z = \frac{\pi (r_a^4 - r_i^4)}{8}$ $W_{y,z} = \frac{I_y}{e_{1,2}}; e_{1,2} \text{ siehe A 2.2}$ $W_z = I_z / r_a$	 $I_y = \frac{\pi}{4} (a_a^3 b_a - a_i^3 b_i)$ $I_z = \frac{\pi}{4} (b_a^3 a_a - b_i^3 a_i)$ $W_y = \frac{\pi}{4 a_a} (a_a^3 b_a - a_i^3 b_i)$ $W_z = \frac{\pi}{4 b_a} (b_a^3 a_a - b_i^3 a_i)$

aus M. Mayr: Technische Mechanik, Anhang

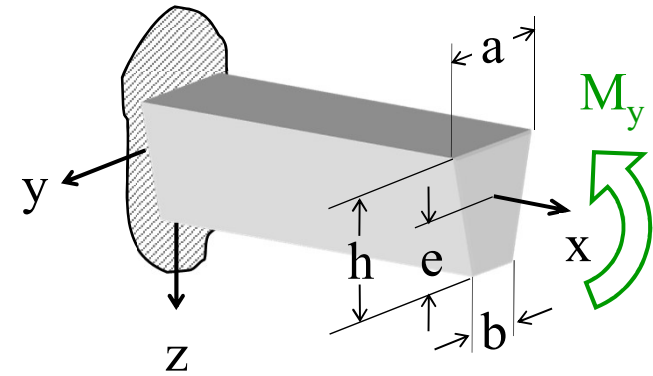




Beispiel: Biegemomentbelasteter Trapezträger

Gegeben: $a = 15 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$, $h = 30 \text{ mm}$, $M_y = 50 \text{ Nm}$

Gesucht: Zug- und Druckspannung

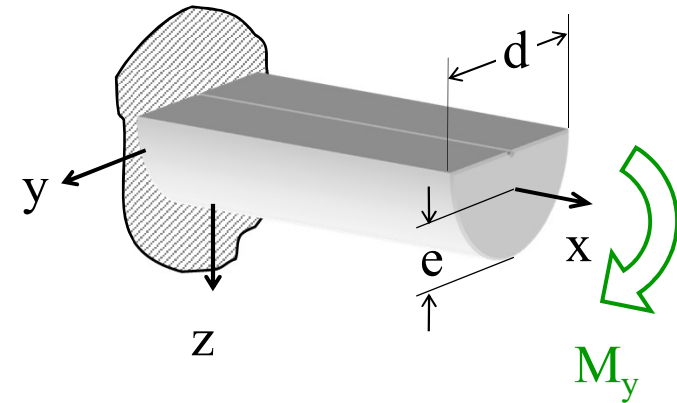




Übung: Biegemomentbelastete Halbwelle

Gegeben: $d = 25 \text{ mm}$, $M_y = 20 \text{ Nm}$

Gesucht: Biegezug- und Biegedruckspannung



4.5 Biegung bei zusammengesetzten Querschnitten

Lässt sich der Querschnitt eines Profils aus einfachen Teilflächen zusammensetzen, sind zunächst die Schwerpunktskoordinaten und die Flächenträgheitsmomente I der Gesamtfläche zu berechnen. Daraus ergibt sich das Widerstandsmoment mit dem maximalen Randabstand e

$$W = \frac{I}{e}$$

Die Berechnung des Flächenträgheitsmoments der Gesamtfläche erfolgt mit dem **Steiner-Satz**, der für Widerstandsmomente nicht anwendbar ist.

Der Grund liegt darin, dass sich die im Widerstandsmoment berücksichtigten Randabstände der Teilflächen i. allg. vom maßgebenden Randabstand der Gesamtfläche unterscheiden.

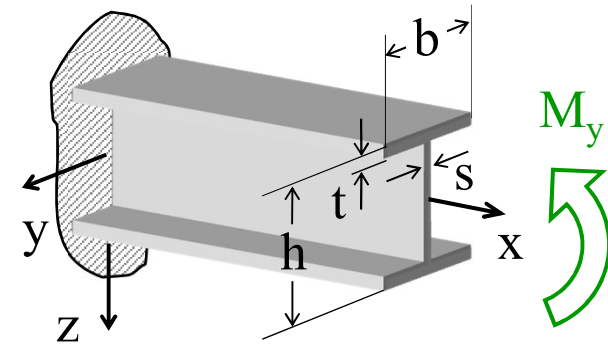
Widerstandsmomente zusammengesetzter Flächen dürfen nicht aus den Widerstandsmomenten der einzelnen Teilflächen gebildet werden!



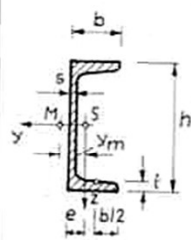
Beispiel: Biegemomentbelasteter I-Träger

Gegeben: $b = h = 100 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $s = 6 \text{ mm}$, $M_y = 5 \text{ kNm}$

Gesucht: Biegespannung

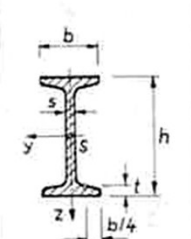


A 3/2 Rundkantiger U-Stahl nach DIN 1026 (Auszug)



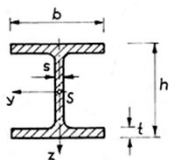
	Kurzzeichen U	h mm	b mm	s mm	t mm	A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _z cm ³	i _z cm	y _m cm	I _t cm ⁴	e cm
	30 x 15	30	15	4	4,5	2,21	2,53	1,69	1,07	0,38	0,39	0,42	0,74	0,165	0,52
	30	30	33	5	7	5,44	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99	2,22	0,912	1,31
	40 x 20	40	20	5	5,5	3,66	7,58	3,79	1,44	1,14	0,86	0,56	1,01	0,363	0,67
	40	40	35	5	7	6,21	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04	2,32	1,00	1,33
	50 x 25	50	25	5	6	4,92	16,8	6,73	1,85	2,49	1,48	0,71	1,34	0,878	0,81
	50	50	38	5	7	7,12	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	2,47	1,12	1,37
	60	60	30	6	6	6,46	31,6	10,5	2,21	4,51	2,16	0,84	1,50	0,939	0,91
	65	65	42	5,5	7,5	9,03	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	2,60	1,61	1,42
	80	80	45	6	8	11,0	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	2,67	2,16	1,45
	100	100	50	6	8,5	13,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	2,93	2,81	1,55
	120	120	55	7	9	17,0	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	3,03	4,15	1,60
	140	140	60	7	10	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	3,37	5,68	1,75
	160	160	65	7,5	10,5	24,0	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	3,56	7,39	1,84
	180	180	70	8	11	28,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	3,75	9,55	1,92
	200	200	75	8,5	11,5	32,2	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	3,94	11,9	2,01

A 3/3 I-Träger nach DIN 1025 Blatt 1 (Auszug)

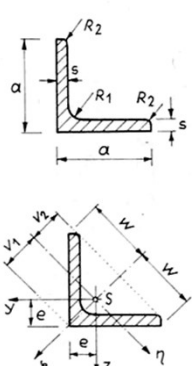


	Kurzzeichen I	h mm	b mm	s mm	t mm	A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _z cm ³	z cm	I _t cm ⁴
	80	80	42	3,9	5,9	7,57	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	0,869
	100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	1,60
	120	120	58	5,1	7,7	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	2,71
	140	140	66	5,7	8,6	18,2	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	4,32
	160	160	74	6,3	9,5	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	6,57
	180	180	82	6,9	10,4	27,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	9,58
	200	200	90	7,5	11,3	33,4	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	13,5
	220	220	98	8,1	12,2	39,5	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	18,6
	240	240	106	8,7	13,1	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	25,0
	260	260	113	9,4	14,1	53,3	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	33,5
	280	280	119	10,1	15,2	61,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	44,2
	300	300	125	10,8	16,2	69,0	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	56,8

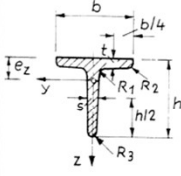
A 3/4 IPB-Träger nach DIN 1025 Blatt 2 (Auszug)

	IPB (HEB)	h mm	b mm	s mm	t mm	A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _z cm ³	i _z cm	I _t cm ⁴
	100	100	100	6	10	26,0	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	9,3
	120	120	120	6,5	11	34,0	864	144	5,04	318	52,9	3,06	13,9
	140	140	140	7	12	43,0	1510	216	5,93	550	78,5	3,58	20,1
	160	160	160	8	13	54,3	2490	311	6,78	889	111	4,05	31,3
	180	180	180	8,5	14	65,3	3830	426	7,66	1360	151	4,57	42,3
	200	200	200	9	15	78,1	5700	570	8,54	2000	200	5,07	59,5
	220	220	220	9,5	16	91,0	8090	736	9,43	2840	258	5,59	76,8
	240	240	240	10	17	106	11260	938	10,3	3920	327	6,08	103
	260	260	260	10	17,5	118	14920	1150	11,2	5130	395	6,58	124
	280	280	280	10,5	18	131	19270	1380	12,1	6590	471	7,09	144
	300	300	300	11	19	149	25170	1680	13,0	8560	571	7,58	186

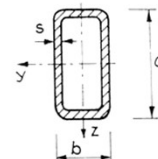
A 3/5 Gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl nach DIN 1028 (Auszug)

	Kurzzeichen L	a mm	s mm	R ₁ R ₂ ≈ R ₁ /2 mm	A cm ²	e cm	w cm	v ₁ cm	v ₂ cm	I _y = I _z cm ⁴	I _ξ cm ⁴	i _ξ cm	I _η cm ⁴	W _η cm ³	i _η cm
	20 x 3	20	3	3,5	1,12	0,60	1,41	0,85	0,70	0,39	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
	25 x 3	25	3	3,5	1,42	0,73	1,77	1,03	0,87	0,79	1,27	0,95	0,31	0,30	0,47
	30 x 3	30	3	5	1,74	0,84	2,12	1,18	1,04	1,41	2,24	1,14	0,57	0,48	0,57
	35 x 4	35	4	5	2,67	1,00	2,47	1,41	1,24	2,96	4,68	1,33	1,14	0,88	0,68
	40 x 4	40	4	6	3,08	1,12	2,83	1,58	1,40	4,48	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78
	45 x 5	45	5	7	4,3	1,28	3,18	1,81	1,58	7,83	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87
	50 x 5	50	5	7	4,8	1,40	3,54	1,98	1,76	11,0	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98
	60 x 6	60	6	8	6,91	1,69	4,24	2,39	2,11	22,8	36,1	2,29	9,34	3,95	1,17
	70 x 7	70	7	9	9,4	1,97	4,95	2,79	2,47	42,4	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37
	80 x 8	80	8	10	12,3	2,26	5,66	3,20	2,82	72,3	115	3,06	29,6	9,25	1,55
	90 x 9	90	9	11	15,5	2,54	6,36	3,59	3,18	116	184	3,45	47,8	13,3	1,76
	100 x 10	100	10	12	19,2	2,82	7,07	3,99	3,54	177	280	3,82	73,3	18,4	1,95
	110 x 10	110	10	12	21,2	3,07	7,78	4,34	3,89	239	379	4,23	98,6	22,7	2,16
120 x 12	120	12	13	27,5	3,40	8,49	4,80	4,26	368	584	4,60	152	31,6	2,35	

A 3/7 Warmgewalzter rundkantiger T-Stahl nach DIN 1024 in hochstegiger Ausführung

	Kurzzeichen T	b = h mm	s = t = R ₁ mm	R ₂ mm	R ₃ mm	e _z cm	Querschnitt						
							A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ³	W _z cm ³	i _z cm
	20	20	3	1,5	1	0,58	1,12	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42
	25	25	3,5	2	1	0,73	1,64	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51
	30	30	4	2	1	0,85	2,26	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62
	35	35	4,5	2,5	1	0,99	2,97	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73
	40	40	5	2,5	1	1,12	3,77	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83
	45	45	5,5	3	1,5	1,26	4,67	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93
	50	50	6	3	1,5	1,39	5,66	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03
	60	60	7	3,5	2	1,66	7,94	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24
	70	70	8	4	2	1,94	10,6	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44
	80	80	9	4,5	2	2,22	13,6	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65
	90	90	10	5	2,5	2,48	17,1	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85
	100	100	11	5,5	3	2,74	20,9	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05

A 3/8 Warmgefertigte rechteckige Stahl-Hohlprofile nach DIN 59 410 (Auszug)

	Nennmaße a x b mm	Wanddicke s mm	Querschnitt								
			A cm ²	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _z cm ³	i _z cm	I _t cm ⁴	W _t cm ³
	50 x 30	2,9	4,23	13,4	5,36	1,78	5,88	3,92	1,18	12,9	7,39
	60 x 40	2,9	5,39	26,0	8,67	2,20	13,7	6,83	1,59	28,0	12,3
	70 x 40	2,9	5,97	38,1	10,9	2,53	15,7	7,83	1,62	34,9	14,4
	80 x 40	2,9	6,55	53,1	13,3	2,85	17,7	8,83	1,64	42,0	16,6
	90 x 50	3,2	8,46	89,7	19,9	3,26	35,5	14,2	2,05	79,8	26,0
	100 x 50	3,6	10,2	129	25,8	3,56	42,9	17,2	2,05	102	32,2
	100 x 60	3,6	10,9	146	29,1	3,66	65,2	21,7	2,45	141	39,1
	120 x 60	4	13,5	247	41,4	4,27	82,7	27,6	2,47	199	51,9
	140 x 80	4	16,7	438	62,5	5,12	183	45,7	3,31	408	82,6
	160 x 90	4,5	21,2	715	89,4	5,81	293	65,1	3,72	672	119
	180 x 100	5,6	29,3	1240	137	6,50	496	99,1	4,11	1150	184
	200 x 120	6,3	37,7	2010	201	7,30	910	152	4,91	2030	277

4.6 Biegung bei veränderlichem Biegemoment

Bei allg. Belastung eines Trägers durch Einzelkräfte, Streckenlasten bzw. Momente ist das Biegemoment als Schnittgröße nicht mehr konstant, sondern über der Balkenlängsachse veränderlich. Zusätzlich treten Querkräfte auf, die i. allg. vernachlässigbar sind.

Die Biegespannung ist daher nicht nur linear über der Balkenhöhe z veränderlich, sondern hängt über das Biegemoment auch von x ab. Somit gilt

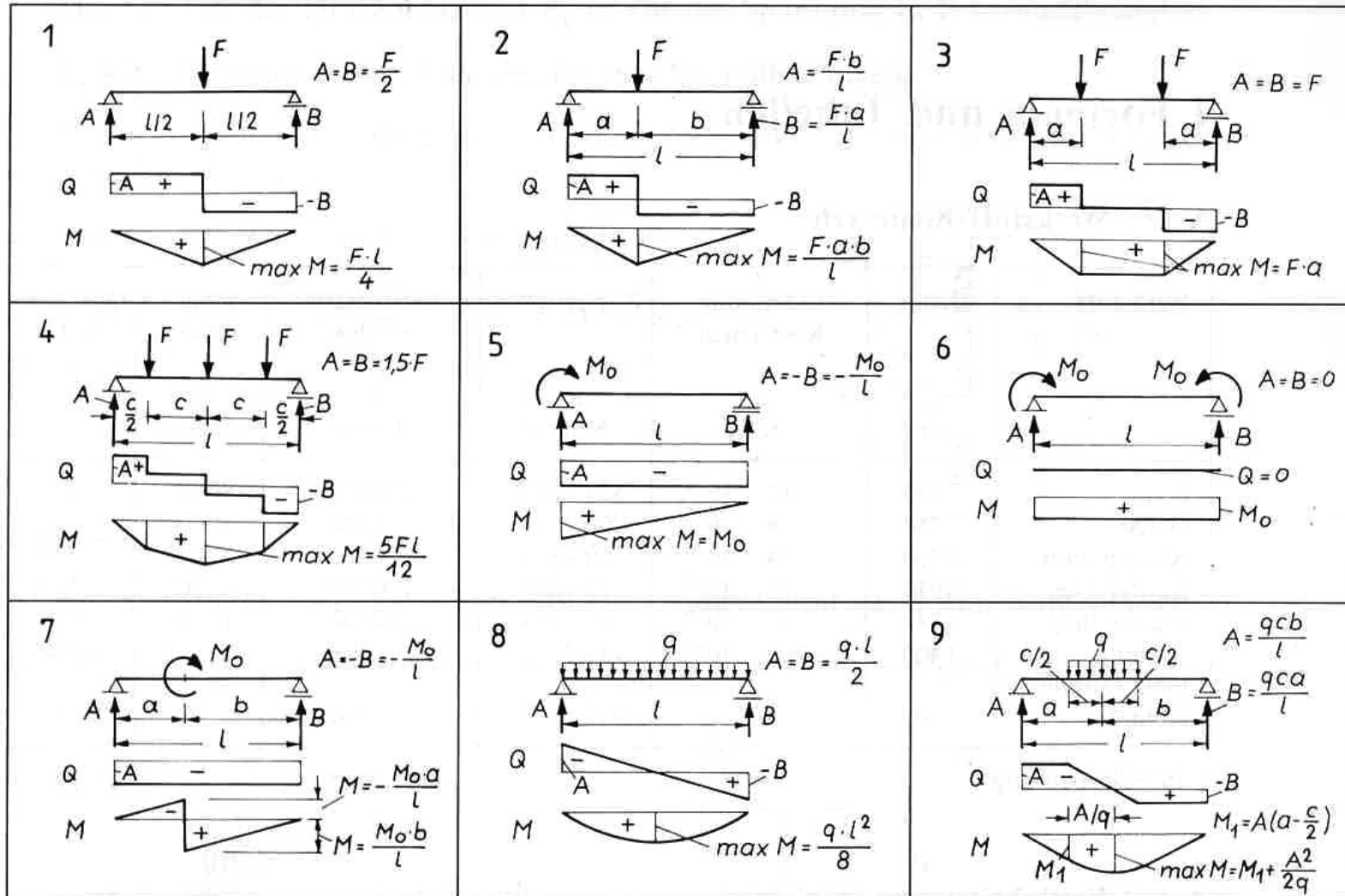
$$\sigma_b(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z \quad \text{bzw.} \quad \sigma_b(x, y) = \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y$$

Die maximalen Biegespannungen treten beim Träger mit **konstantem** Querschnitt an der Stelle maximalen Biegemoments auf. Damit folgt für die Randspannungen

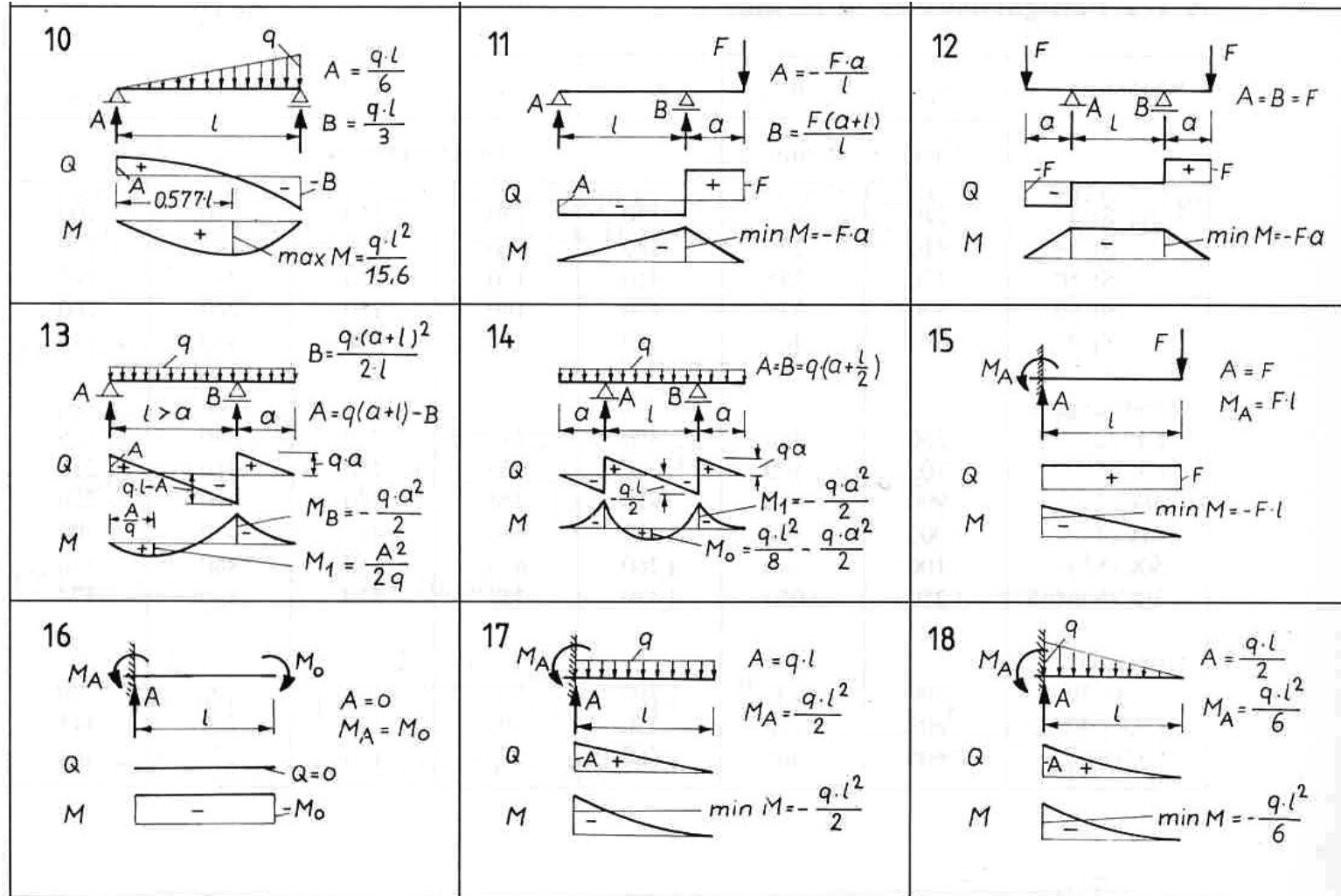
$$\sigma_{b \max} = \frac{|M_{y \max}|}{W_y} \quad \text{oder} \quad \sigma_{b \max} = \frac{|M_{z \max}|}{W_z}$$

Im allgemeinen wird das Vorzeichen der max. Biegespannung (Zug oder Druck) bei der Auslegung biegebeanspruchter Bauteile nicht berücksichtigt.

Biegemomenten- und Querkraftlinien



... Biegemoment- und Querkraftlinien (Fortsetzung)



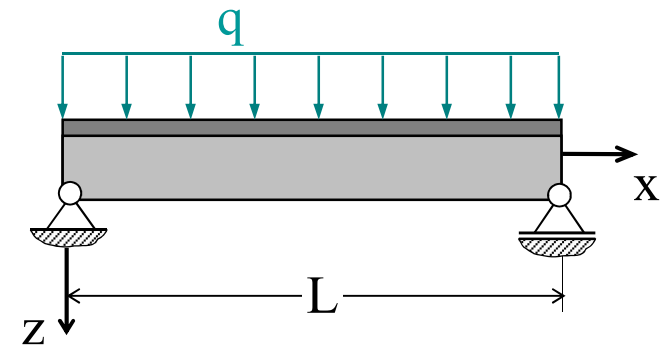
(nach J. Adam: Festigkeitslehre)



Beispiel: T100-Träger mit Streckenlast

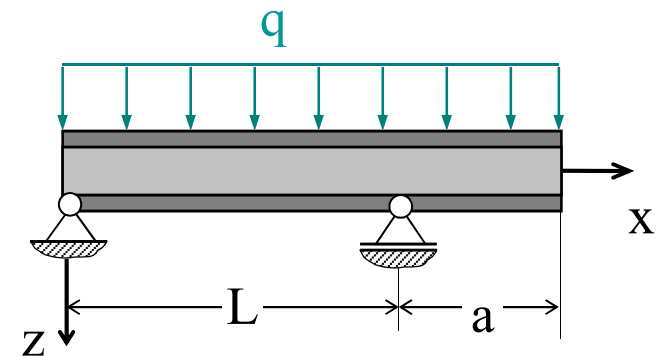
Gegeben: $L = 0,5 \text{ m}$, $q = 60 \text{ N/mm}$

Gesucht: Biegespannung

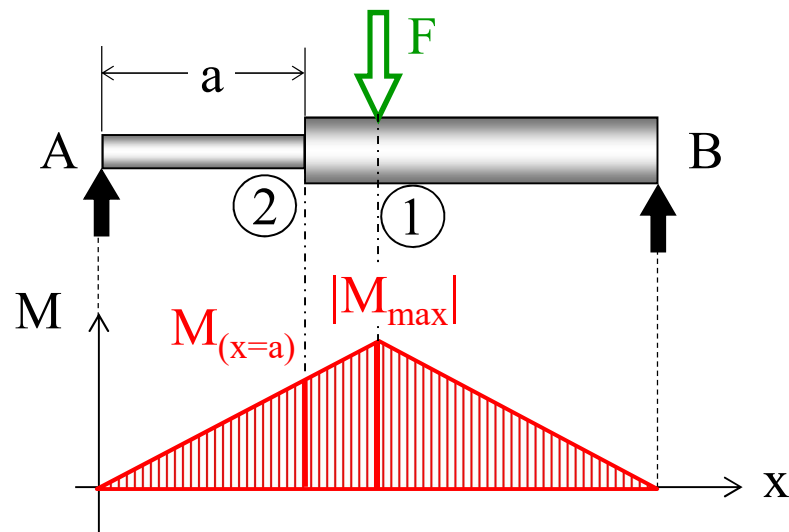


Übung: IPB120-Träger unter Streckenlast

Gegeben: $L = 1 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $q = 100 \text{ N/mm}$



Bei Trägern mit **veränderlichen** Querschnitten muss der kritische Querschnitt nicht mit dem Querschnitt des größten Biegemoments identisch sein.



- ① Querschnitt maximalen Biegemoments
- ② Querschnitt maximaler Biegespannung

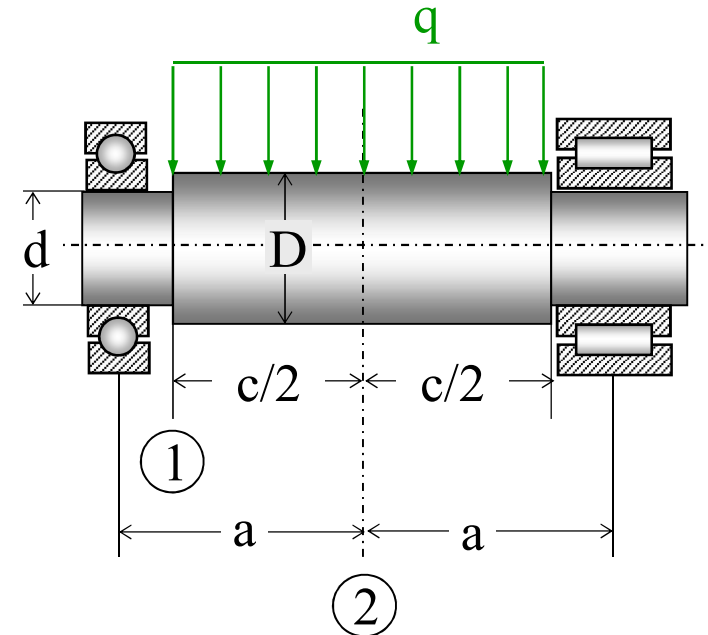
Bei einem Spannungsnachweis müssen daher i. allg. alle als kritisch in Frage kommenden Querschnitte überprüft werden.

Hinweis: Spannungsüberhöhungen infolge Kerbwirkung an z. B. an Querschnittsübergängen oder Bohrungen sind zusätzlich zu beachten.

Beispiel: Spannungsnachweis einer gelagerten Welle

Gegeben: $q = 25 \text{ kN/m}$, $a = 0,15 \text{ m}$, $c = 0,2 \text{ m}$, $d = 20 \text{ mm}$, $D = 25 \text{ mm}$

Gesucht: Biegespannungen an den Stellen 1 und 2



Übung: Wie ist der Durchmesser D zu wählen, wenn statt der Streckenlast eine äquivalente Einzelkraft angreift und die zul. Spannung $\sigma_{zul} = 180 \text{ N/mm}^2$ beträgt?

Lösung: $D = 27,7 \text{ mm}$ (gewählt: $D = 30 \text{ mm}$)

4.7 Verformung bei gerader Biegung

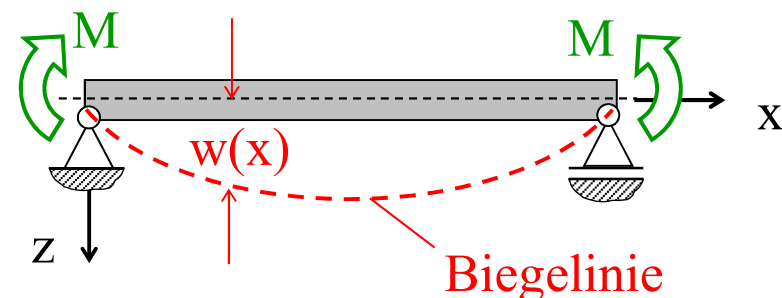
Unter der Wirkung einer Biegebeanspruchung werden Körper gekrümmt. Die Durchbiegung ist Anhängig von den äußeren Lasten und den elastischen Eigenschaften des Materials.

Zur Sicherstellung der Funktionsfähigkeit sind daher balkenförmige Bauteile auch gegen unzulässig hohe Verformungen auszulegen.

4.7.1 Differentialgleichung der Biegelinie

Die Achse eines unter Belastung gekrümmten Balkens wird als elastische Linie oder Biegelinie bezeichnet.

Die Biegelinie kann durch eine Differentialgleichung beschrieben werden.



Die Durchbiegung $w(x)$ ist über der Balkenlängsachse veränderlich und wird in z-Richtung positiv gezählt.

Betrachtet man ein Bogenstück ds der Biegelinie, so ergibt sich deren Krümmung k allgemein als Kehrwert des Krümmungsradius ρ

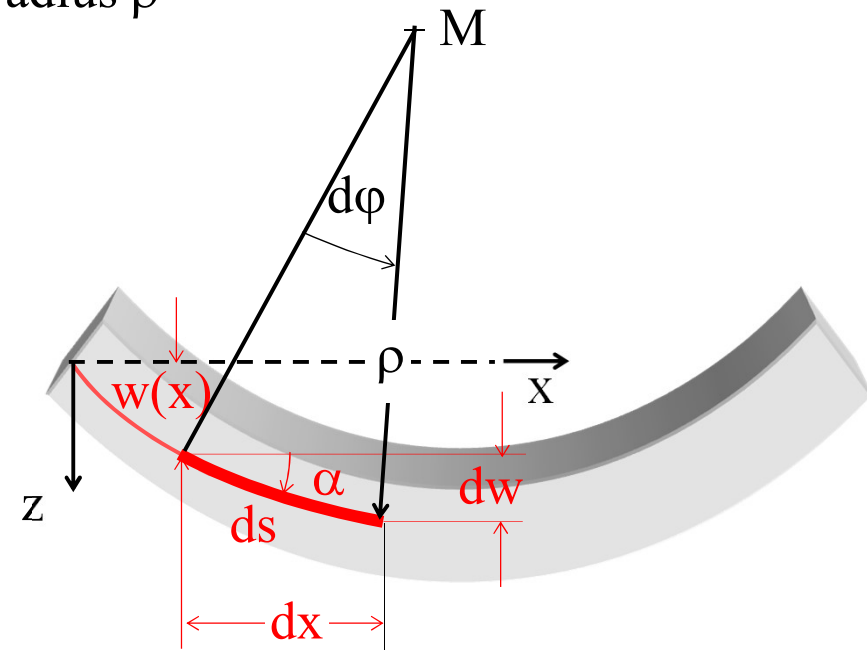
$$k = \frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

mit der 1. Ableitung der Durchbiegung

$$w' = \frac{dw}{dx}$$

und der 2. Ableitung

$$w'' = \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Für kleine Verformungen ist die Neigung $\tan \alpha = w' = dw/dx < 1$ und somit das Quadrat der 1. Ableitung $w'^2 \approx 0$.

Damit vereinfacht sich die Krümmungsgleichung zu

$$w'' = -\frac{1}{\rho}$$

Die 2. Ableitung der Biegelinie ist proportional zur Krümmung der Durchbiegung.

 Aus der Beziehung

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot z = E \cdot \frac{z}{\rho} \quad \text{folgt mit} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

die linearisierte Differentialgleichung der Biegelinie für kleine Verformungen

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

Das Produkt aus Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment $E \cdot I$ wird als **Biegesteifigkeit** bezeichnet. Je größer die Biegesteifigkeit, umso geringer ist die Durchbiegung.

Durch unbestimmte Integration erhält man die **Neigung** der Biegelinie

$$w'(x) = -\int \frac{M(x)}{EI} dx + c_1$$

Nochmalige Integration liefert die **Durchbiegung**

$$w(x) = -\int \left[\int \frac{M(x)}{EI} dx + c_1 \right] dx + c_2$$

mit den Integrationskonstanten c_1 und c_2 , die noch an die Randbedingungen angepasst werden müssen.

Mit dem bereits bekannten Zusammenhang zwischen der Belastungsfunktion und den Schnittgrößen

$$M'(x) = Q(x) \quad \text{und} \quad q(x) = -Q'(x) = -M''(x)$$

ergeben sich weitere Beziehungen zu den Ableitungen der Biegelinie.

Für den Fall konstanter Biegesteifigkeit lässt sich dann vorteilhaft schreiben

Belastungsfunktion $EI w''''(x) = q(x)$

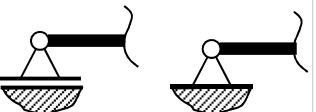


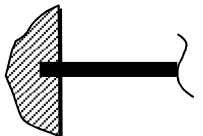
Querkraft $EI w'''(x) = \int q(x) dx + k_1 = -Q(x)$

Biegemoment $EI w''(x) = \int [\int q(x) dx + k_1] dx + k_2 = -M(x)$

Neigung $EI w'(x) = -\int M(x) dx + c_1$

Durchbiegung $EI w(x) = -\int [\int M(x) dx + c_1] dx + c_2$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen der Struktur ermittelt. Bei bekannter Momentenlinie sind die geometrischen Randbedingungen Durchbiegung und Neigung an den Rändern einzusetzen, bei unbestimmten Systemen zusätzlich die bereits behandelten statischen Randbedingungen Moment und Querkraft.

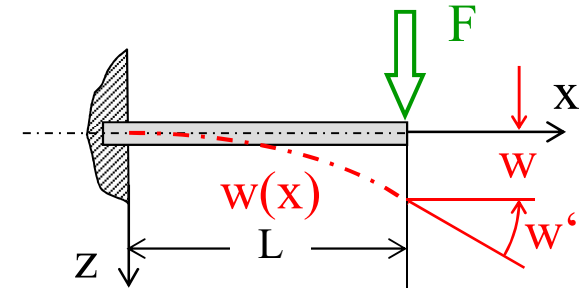
Randbedingung		geometrisch		statisch	
Lagerungsart	Symbol	Durchbiegung w	Neigung w'	Moment M w''	Querkraft Q w'''
Gleitlager, Gelenklager		0	i. a. $\neq 0$	0	i. a. $\neq 0$
Führung		i. a. $\neq 0$	0	i. a. $\neq 0$	0
Freies Ende		i. a. $\neq 0$	i. a. $\neq 0$	0	0
Einspannung		0	0	i. a. $\neq 0$	i. a. $\neq 0$



Beispiel: Träger mit Einzellast

Gegeben: $F = 5 \text{ kN}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $EI = 10^{10} \text{ Nmm}^2$

Gesucht: Biegelinie $w(x)$ und Neigung $w'(x)$

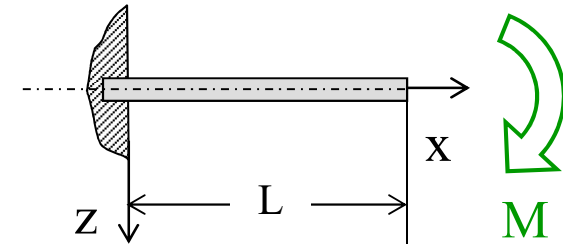




Übung: Träger mit Endmoment

Gegeben: $M = 1 \text{ kNm}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $EI = 10^{10} \text{ Nmm}^2$

Gesucht: Biegelinie $w(x)$ und Neigung $w'(x)$

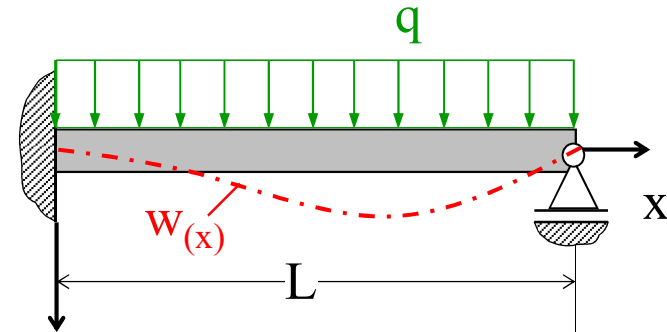




Beispiel: Stat. unbestimmt gelagerter Träger

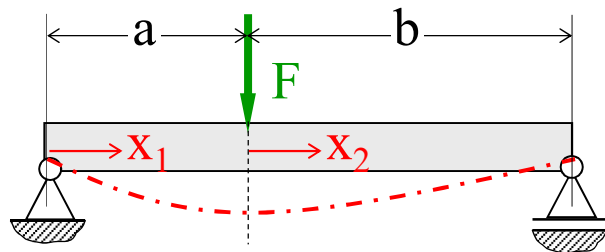
Gegeben: Streckenlast q , Biegesteifigkeit EI , Länge L

Gesucht: Biegelinie $w(x)$ und Neigung $w'(x)$



4.7.3 Mehrfeldträger

Die Integration der Differentialgleichungen kann nur in Bereichen mit stetigem Funktionsverlauf erfolgen. Jeder Stetigkeitsbereich eines Balkens muss für sich in der lokalen Koordinate integriert werden. Die zusätzlichen Integrationskonstanten müssen dann aus den Übergangsbedingungen ermittelt werden



$$w(x_1=0) = 0$$

$$w(x_2=b) = 0$$

} Randbedingungen

$$w(x_1=a) = w(x_2=0)$$

$$w'(x_1=a) = w'(x_2=0)$$

} Übergangsbedingungen

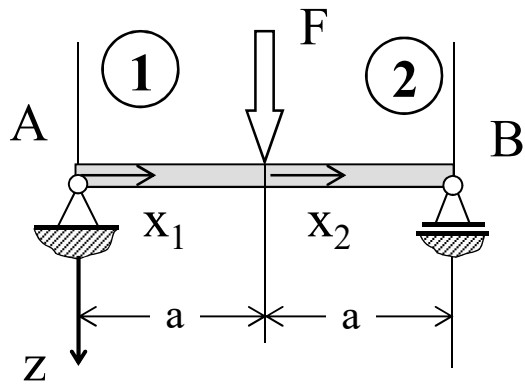
Neben den beiden Randbedingungen ergeben sich für jeden Teilbereich zusätzlich zwei Übergangsbedingungen. Bei m Teilbereichen sind also $2m$ Integrationskonstanten zu ermitteln.

Bei Trägern mit mehreren Teilbereichen wird der rechnerische Aufwand schnell unverhältnismäßig groß und ist in der Praxis kaum noch durchführbar.

Beispiel: Mittig belasteter Zweifeld-Träger

Gegeben: Kraft F , Biegesteifigkeit EI , Länge a

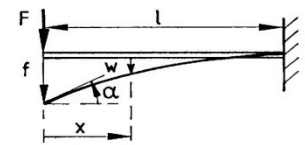
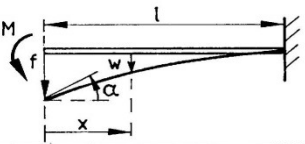
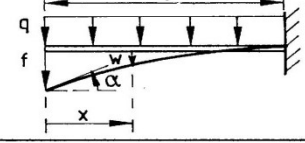
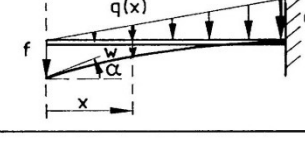
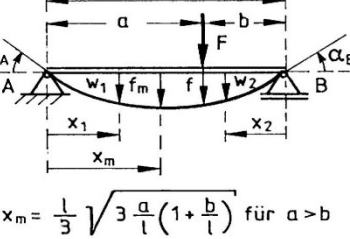
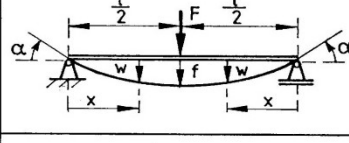
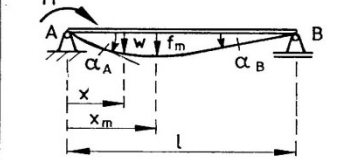
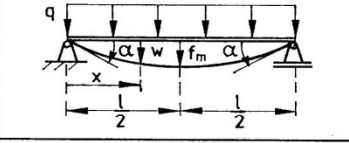
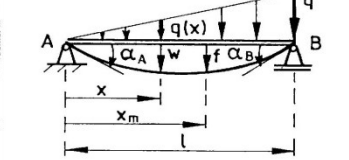
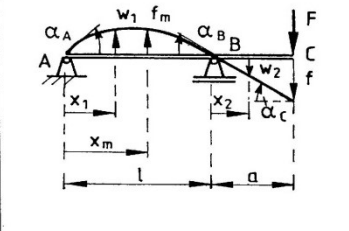
Gesucht: Biegelinie $w(x)$ und Neigung $w'(x)$



... Fortsetzung

... Fortsetzung

Für einfache Grundlastfälle sind die Biegelinien in Tabellen zusammengestellt.

Nr.	Lastfall	Gleichung der Biegelinie Spezielle (maximale) Verformungen
1		$w(x) = \frac{Fl^3}{3EI} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$ $f = \frac{Fl^3}{3EI}; \quad \alpha = \frac{Fl^2}{2EI}$
2		$w(x) = \frac{Ml^2}{2EI} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2$ $f = \frac{Ml^2}{2EI}; \quad \alpha = \frac{Ml}{EI}$
3		$w(x) = \frac{ql^4}{8EI} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{x}{l} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$ $f = \frac{ql^4}{8EI}; \quad \alpha = \frac{ql^3}{6EI}$
4		$w(x) = \frac{ql^4}{30EI} \left[1 - \frac{5}{4} \frac{x}{l} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right]$ $f = \frac{ql^4}{30EI}; \quad \alpha = \frac{ql^3}{24EI}$
5		$w_1(x_1) = \frac{Fl^3}{6EI} \frac{a}{l} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \frac{x_1}{l} \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{x_1^2}{ab} \right); \quad x_1 \leq a$ $w_2(x_2) = \frac{Fl^3}{6EI} \frac{b}{l} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \frac{x_2}{l} \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{x_2^2}{ab} \right); \quad x_2 \leq b$ $f_m = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EI} [a(l+b)]^{3/2}; \quad f = \frac{Fl^3}{3EI} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2$ $x_m = \frac{l}{3} \sqrt{3 \frac{a}{l} \left(1 + \frac{b}{l} \right)} \text{ für } a > b$ $\alpha_A = \frac{Fab}{6EI} \left(1 + \frac{b}{l} \right); \quad \alpha_B = \frac{Fab}{6EI} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$
6		$w(x) = \frac{Fl^3}{16EI} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]; \quad x \leq \frac{l}{2}$ $f = \frac{Fl^3}{48EI}; \quad \alpha = \frac{Fl^2}{16EI}$
7		$w(x) = \frac{Ml^2}{3EI} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$ $f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI} \text{ bei } x_m = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ $\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}; \quad \alpha_B = \frac{1}{2} \alpha_A$
8		$w(x) = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]; \quad x \leq l$ $f_m = \frac{5ql^4}{384EI}; \quad \alpha = \frac{ql^3}{24EI}$
9		$w(x) = \frac{7ql^4}{360EI} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{10}{7} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$ $f_m \approx 6,522 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} \text{ bei } x_m = l \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{15} \sqrt{30}}$ $\alpha_A = \frac{7 \cdot ql^3}{360EI}; \quad \alpha_B = \frac{8}{7} \alpha_A$
10		$w_1(x_1) = -\frac{Fl^3}{6EI} \frac{a}{l} \frac{x_1}{l} \left[1 - \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right]; \quad x_1 \leq l$ $w_2(x_2) = \frac{Fl^3}{3EI} \frac{a}{l} \frac{x_2}{l} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x_2}{l} - \frac{x_2^2}{2al} \right); \quad x_2 \leq a$ $f_m = -\frac{Fa}{9\sqrt{3}EI} \text{ bei } x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}; \quad f = \frac{Fa^2(l+a)}{3EI}$ $\alpha_A = \frac{Fal}{6EI}; \quad \alpha_B = 2\alpha_A; \quad \alpha_C = \frac{Fa(2l+3a)}{6EI}$

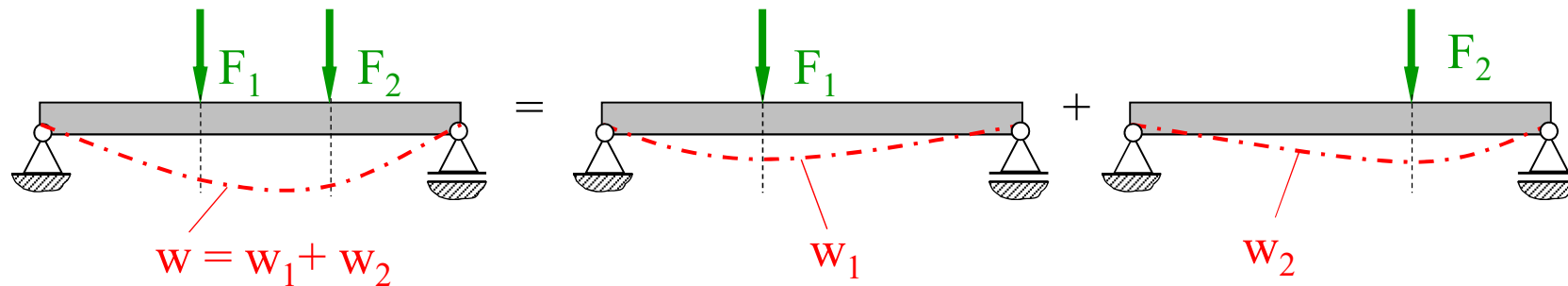
(aus J. Berger: Techn. Mechanik für Ingenieure)

4.7.3 Superposition

Komplizierter Belastungsfälle lassen sich oft aus den in Tabellen aufgeführten Grundlastfällen durch Überlagerung (Superposition) ableiten.

Superpositionsprinzip:

Querkräfte, Momente und Verformungen eines durch mehrere Kräfte belasteten Systems ergeben sich aus der Summe der durch die Einzelkräfte verursachten Querkräfte, Momente und Verformungen.

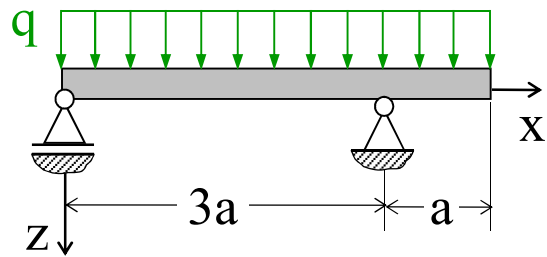


Das Superpositionsprinzip gilt nur bei kleinen Verformungen und für lineares Materialverhalten (Hook'sches Gesetz), was in der Festigkeitslehre meist zutrifft.

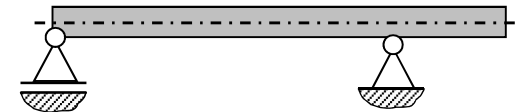
Beispiel: Träger mit Streckenlast

Gegeben: Streckenlast $q = 2 \text{ kN/m}$, Steifigkeit $EI = 10^{10} \text{ Nmm}^2$, Länge, $a = 0,5 \text{ m}$

Gesucht: Durchbiegung w_1 für $x < 3a$ und w_2 für $x = 4a$



... Fortsetzung: Träger mit Streckenlast



Übung: Träger mit Strecken- und Einzelkraftlast
Gegeben: $q = 2 \text{ kN/m}$, $F = 3 \text{ kN}$, $EI = 10^{10} \text{ Nmm}^2$, $a = 0,5 \text{ m}$
Gesucht: Durchbiegung w_1 für $x < 3a$ und w_2 für $x = 4a$

