

5. Torsion

Torsion (Verdrehung) tritt auf, wenn ein Stab (Welle) mit einem Moment belastet wird, das um die Stablängsachse wirkt (Torsionsmoment oder Drehmoment).

Kardanwelle als typisches Beispiel eines torsionsbeanspruchten Bauteils.

aus: kfz-tech.de

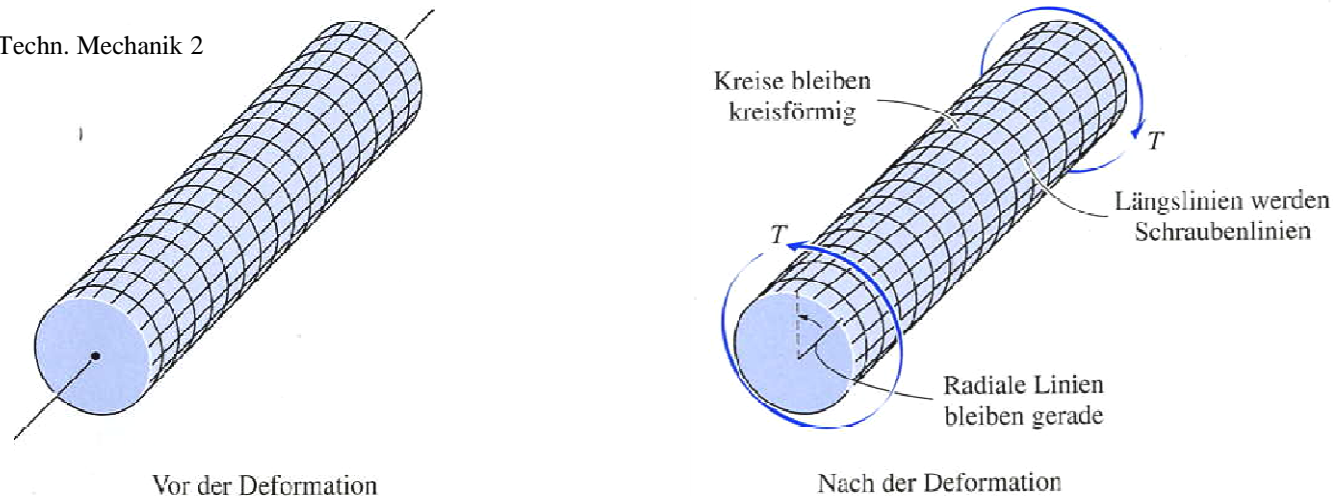


Torsion (Verdrehung) tritt auf, wenn ein Stab (Welle) mit einem Moment belastet wird, das um die Stablängsachse wirkt (Torsionsmoment oder Drehmoment). Torsion an Wellen wurde in Grundlagen der Technischen Mechanik bereits behandelt. Im folgenden werden neben kreisförmigen Querschnittsflächen auch dünnwandige, geschlossene und offene Profile behandelt

5.1 Torsion bei kreisförmigen Querschnittsflächen

Unter der Wirkung eines Torsionsmomentes verformen sich bei kreisförmigen Querschnitten die zur Längsachse parallelen Linien auf dem Mantel schraubenförmig, während dazu senkrechte und radiale Linien unverformt bleiben.

aus R. Hibbeler: Techn. Mechanik 2



Rechteckige Flächenelemente werden zu Rauten verformt, d. h. es treten nur Winkeländerungen auf. Somit wirken bei einer reinen Torsionsbeanspruchung im Querschnitt einer kreisförmigen Welle nur Schubspannungen.

Aus dem Hook'schen Gesetz für Schub $\tau = G \cdot \gamma$ und $\gamma \cdot L = \varphi \cdot R$ ergibt sich mit dem Schubmodul G die linear veränderliche Schubspannung

$$\tau(r) = G \cdot r \cdot \frac{\varphi}{L}$$

Die Schubspannungen stehen mit dem Torsionsmoment im Gleichgewicht.

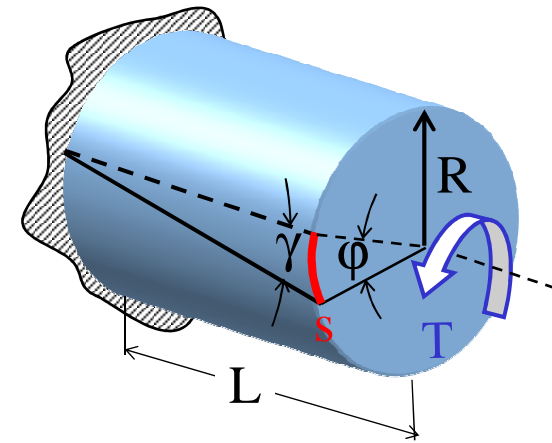
$$T = \int r \cdot \tau(r) dA = \frac{G \cdot \varphi}{L} \int r^2 dA$$

Mit dem polaren Flächenträgheitsmoment $I_p = \int r^2 dA$ ergibt sich für den Torsionswinkel

$$\varphi = \frac{L}{G \cdot I_p} \cdot T$$

Einsetzen des Torsionswinkels in das Hook'sche Gesetz für Schub liefert

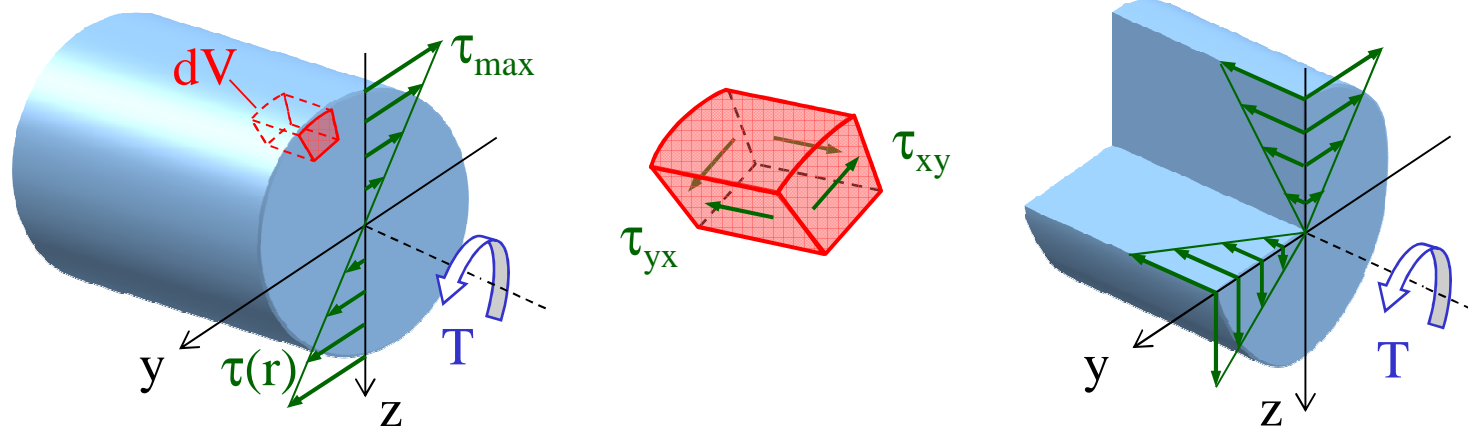
$$\tau(r) = \frac{T}{I_p} \cdot r$$



Die maximale Schubspannung ergibt sich am Rand für $r = R$. Mit dem polaren Widerstandsmoment $W_p = I_p / R$ folgt die Torsionsschubspannung

$$\tau_t = \frac{T}{W_p}$$

Die Schubspannung ist in der Mitte Null und wächst linear zum Rand hin an.



Da Schubspannungen nach dem Satz der zugeordneten Schubspannungen in senkrechten Richtungen gleich sind, erzeugt ein Torsionsmoment nicht nur Schubspannungen in der Querschnittsebene, sondern auch in den Längsebenen.

Bei Hohlwellen gelten die gleichen Voraussetzungen wie bei Vollkreisquerschnitten, wenn das polare Flächenträgheitsmoment

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4)$$

bzw. das Widerstandsmoment

$$W_p = \frac{\pi(R_a^4 - R_i^4)}{2R_a} = \frac{\pi(D_a^4 - D_i^4)}{16D_a}$$

mit den Innen- und Aussenradien bzw. Durchmessern eingesetzt wird.

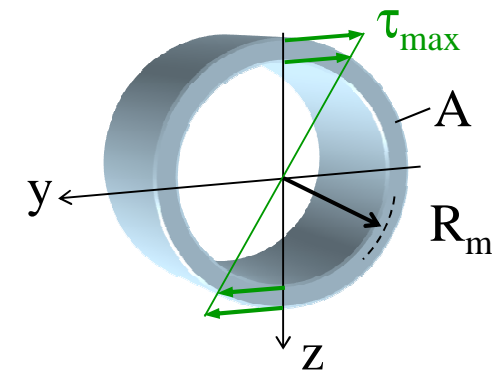
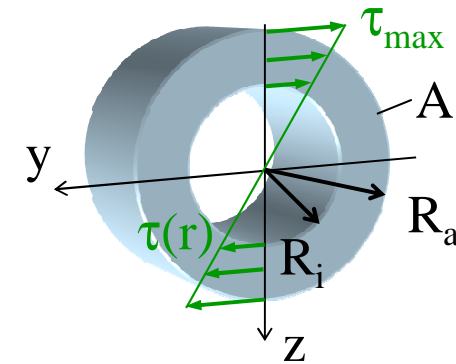
Für dünnwandige kreisförmige Hohlwellen ($s \ll R$) gilt

$$I_p \approx 2\pi \cdot R_m^3 \cdot s = \frac{\pi}{4} \cdot D_m^3 \cdot s$$

und

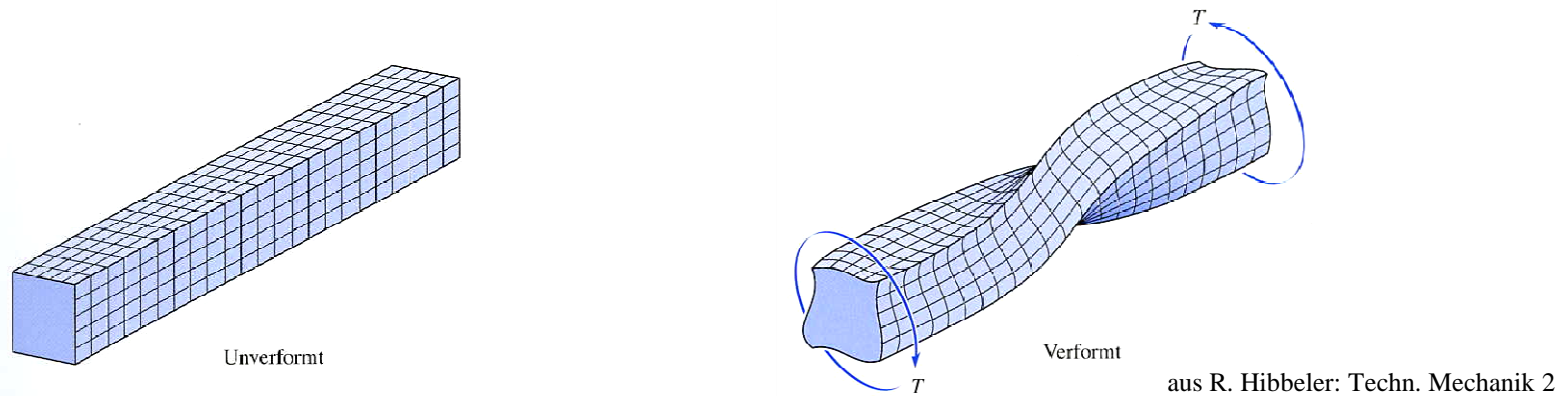
$$W_p \approx 2\pi \cdot R_m^2 \cdot s = \frac{\pi}{2} \cdot D_m^2 \cdot s$$

mit dem mittleren Radius R_m bzw. Durchmesser D_m und der Wandstärke s .



5.2 Nichtkreisförmigen Querschnitte

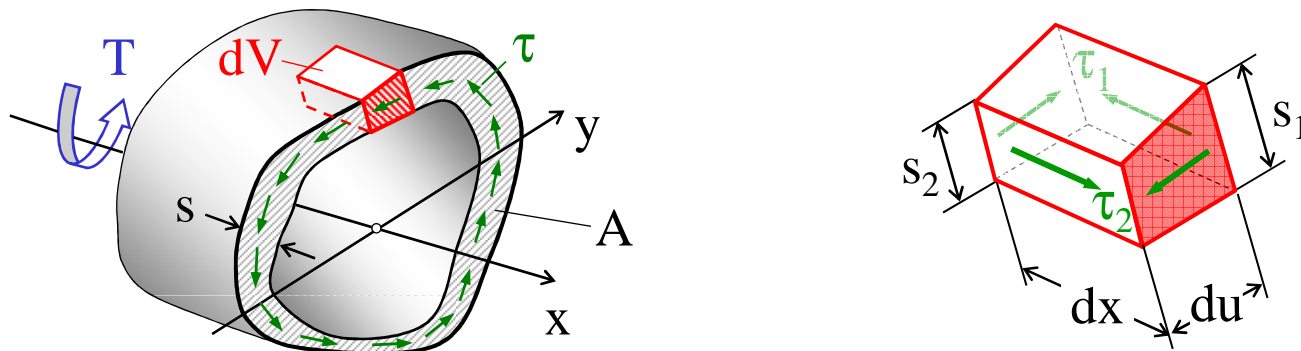
Im Gegensatz zu Kreisquerschnitten werden nicht-rotationssymmetrischen Querschnitte bei Torsionsbeanspruchung verwölbt. Die Quadrate auf der Oberfläche werden krummlinig verzerrt.



Beim Rechteckquerschnitt treten die größten Spannungen und Verformungen in der Mitte der langen Seiten auf, die Kanten bleiben unverformt und sind spannungsfrei. Die Behandlung nichtkreisförmiger Vollprofile ist mathematisch aufwendig, Näherungen liegen tabellarisch vor. Für geschlossene und offene dünnwandige Querschnitte können jedoch einfache Lösungen angegeben werden.

5.2.1 Dünnwandige geschlossene Querschnitte

Ein Torsionsmoment bewirkt bei dünnwandigen Profilen Schubspannungen, die als konstant über der Wanddicke b angenommen werden können.



Das Kräftegleichgewicht am heraus getrennten Volumenelement liefert

$$\sum F_x = 0 = \tau_2 \cdot s_2 \cdot dx - \tau_1 \cdot s_1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \tau_1 \cdot s_1 = \tau_2 \cdot s_2$$

oder

$$\tau \cdot s = \text{const.}$$

Die Größe $\tau \cdot s$ ist an jeder Stelle im Querschnitt gleich groß und wird in Anlehnung zur Strömung einer Flüssigkeit als **Schubfluß** bezeichnet.

Das Torsionsmoment dT der auf die Fläche dA wirkenden Kraft dF_t ergibt sich mit dem Abstand h

$$dT = h \cdot dF_t = h \cdot \tau \cdot dA$$

Mit $dA = s \cdot du$ liefert die Integration über dem Umfang U des Profils das Torsionsmoment

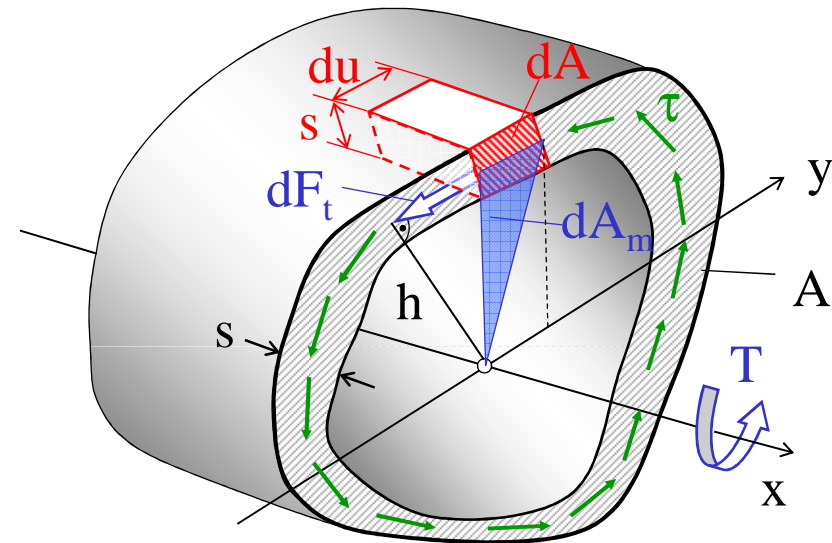
$$T = \oint_U h \cdot \tau \cdot s \cdot du$$

Der konstante Schubfluß $\tau \cdot s$ kann vor das Linienintegral gezogen werden.

$$T = \tau \cdot s \cdot \oint_U h \cdot du$$

Der noch verbleibende Ausdruck im Integral entspricht der doppelten Fläche des Dreiecks $h \cdot du = 2 \cdot dA_m$.

$$T = \tau \cdot s \cdot \int_{A_m} 2 dA_m = 2\tau \cdot s \cdot A_m$$



Aufgelöst nach der Schubspannung erhält man die **1. Bredtsche Formel**

$$\tau = \frac{T}{2 \cdot s \cdot A_m}$$

Hierbei ist A_m die von der Profilmittellinie eingeschlossene Fläche und s die Wandstärke.

Die maximale Schubspannung tritt am Ort der kleinsten Wandstärke s_{\min} auf. Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_t = 2 \cdot s_{\min} \cdot A_m$$

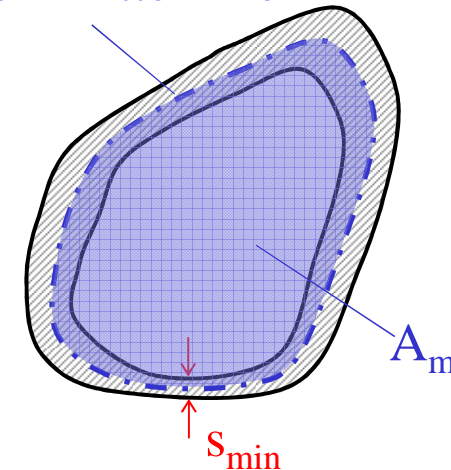
ergibt sich die Torsionsschubspannung

$$\tau_t = \frac{T}{W_t}$$

Für ein dünnwandiges Kreisringprofil stimmt das Torsionswiderstandsmoment mit dem polaren Widerstandsmoment überein.

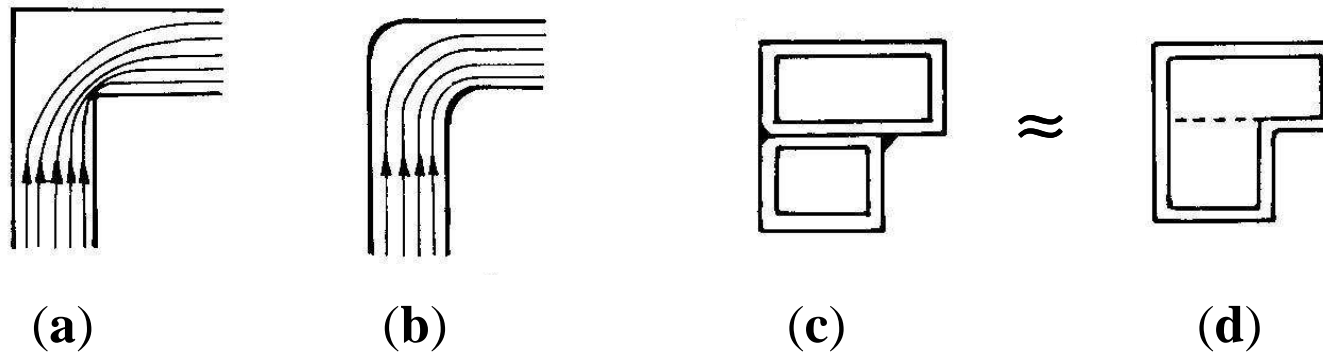
$$W_t = 2A_m \cdot s = 2\pi \cdot r_m^2 \cdot s \approx W_p$$

Profilmittellinie



Bei gegebener Querschnittsfläche gilt immer $W_p \geq W_t$, d. h. bei gleichem Materialgewicht können dünnwandige Kreisringprofile gegenüber nicht-kreisförmigen Querschnitten ein höheres Torsionsmoment übertragen.

An den Eckpunkten scharfkantiger Profile trifft die Annahme gleichmäßig über der Wanddicke verteilter Schubspannungen (konstanter Schubfluss) nicht mehr zu, es kommt zu Spannungsspitzen im Bereich der Innenkante **(a)**.



Kleine, technisch oftmals unvermeidbare Radien an den Kanten führen jedoch zu einem erheblichen Spannungsabbau **(b)**. Zwischenstege bei dünnwandigen Hohlprofilen **(c)** können ebenfalls vernachlässigt werden **(d)**.

Der Verdrehwinkel eines dünnwandigen, geschlossenen Profils der Länge L infolge eines Torsionsmoments T lässt sich aus

$$\varphi_t = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_t}$$

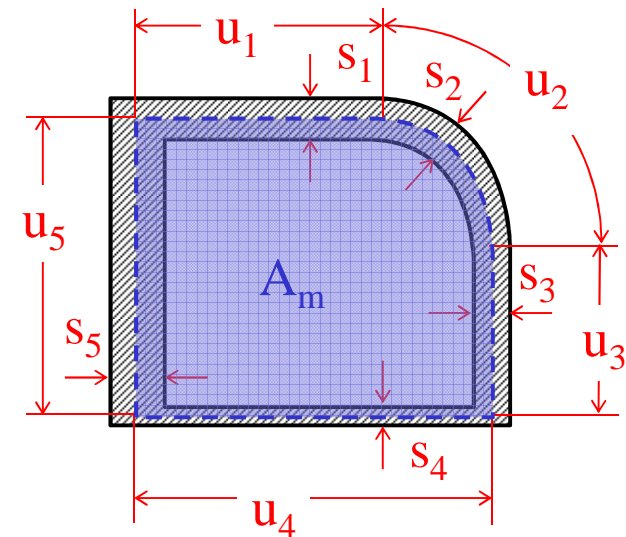
mit dem Schubmodul G und dem Torsions-Flächenträgheitsmoment I_t (Drillwiderstand)

$$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint_U \frac{du}{s}}$$

berechnen (**2. Bredtsche Formel**).

Für Umfänge u_i mit konstanten Wandstärken s_i kann das Linienintegral durch einen Summenausdruck ersetzt werden

$$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{s_i}}$$

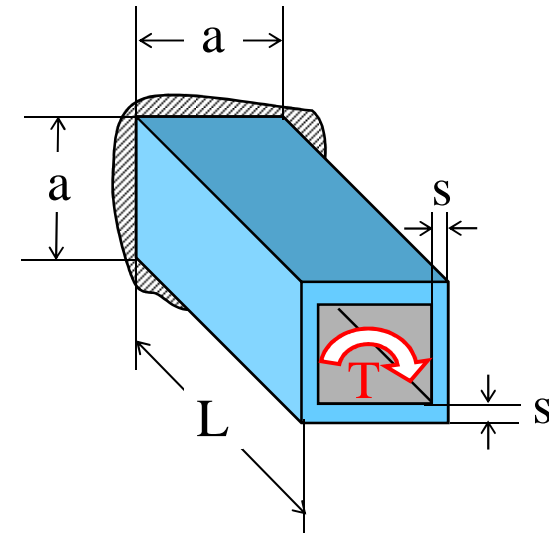




Beispiel: Auslegung eines Kastenprofils

Gegeben: $T = 1 \text{ kNm}$, $\tau_{zul} = 90 \text{ N/mm}^2$, $a = 50 \text{ mm}$

Gesucht: Wandstärke s

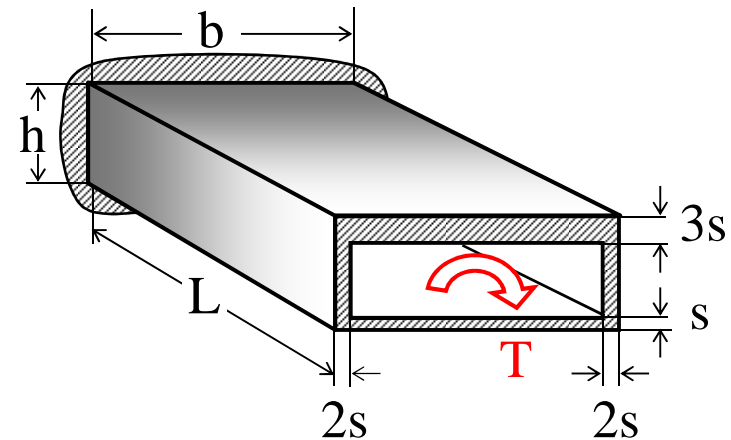


Übung: Torsionskasten aus Alu

Gegeben: $T = 10 \text{ kNm}$, $G = 25000 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{\text{zul}} = 90 \text{ N/mm}^2$, $\varphi_{\text{zul}} = 1^\circ$

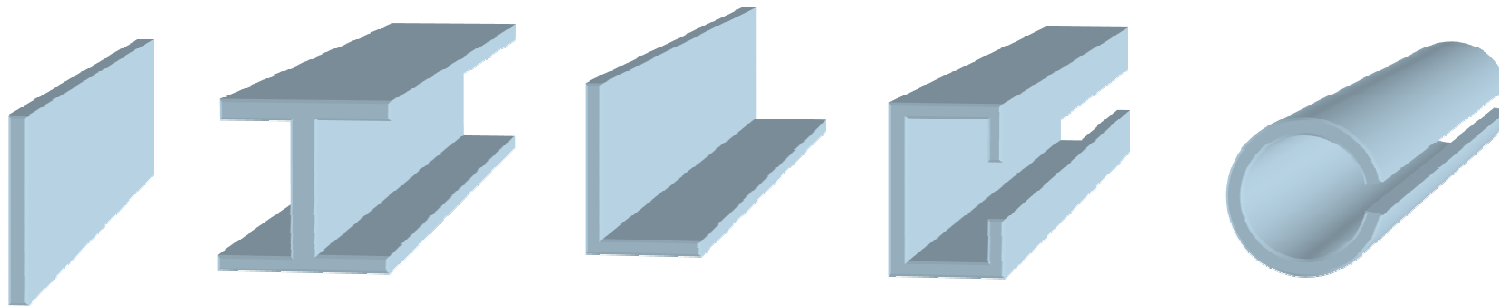
$L = 1 \text{ m}$, $b = 150 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, $s = 5 \text{ mm}$

Gesucht: Torsionsschubspannung τ_t , Verdrehwinkel φ_t



5.2.2 Dünnwandige offene Profile

Genormte Walzprofile stellen im konstruktiven Stahlbau häufig dünnwandige, offene Querschnitte dar.



Sie sind im Gegensatz zu dünnwandigen, geschlossenen Profilen torsionsweich und daher nicht geeignet, große Torsionsmomente aufzunehmen.

In der Praxis lassen sich aber torsionsfreie Konstruktionen nur schwer realisieren. Aufgrund der möglicherweise auftretenden erheblichen Spannungen und Verformungen sind daher auch offene Profile gegen Torsion abzusichern.

Die aufgezeigten Lösungen stellen aber nur sehr grobe Abschätzungen dar und sind im Zweifel durch numerische Berechnungen (z. B. FEM) zu verifizieren.

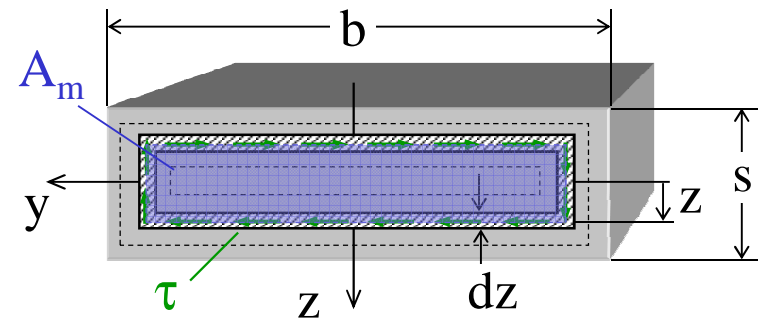
5.2.2.1 Rechteckprofil

Denkt man sich ein Rechteck aus konzentrischen, geschlossenen Hohlprofilen aufgebaut, überträgt jeder dieser Querschnitte der Wandstärke dz näherungsweise das Torsionsmoment

$$dT = 2 \cdot A_m \cdot \tau \cdot dz$$

Für ein dünnes Blech ($b \gg s$) gilt näherungsweise

$$A_m \approx 2 \cdot z \cdot b$$



und unter der Annahme, dass die Schubspannungen in der Mitte Null sind und zu den Rändern des Rechtecks linear ansteigen, ergibt sich

$$\tau(z) = \tau_{\max} \frac{z}{s/2}$$

Einsetzen liefert

$$dT = 2 \cdot (2 \cdot z \cdot b) \cdot \tau_{\max} \frac{2 \cdot z}{s} dz = 8 \cdot b \cdot \tau_{\max} \frac{z^2}{s} dz$$

Wird der Ausdruck integriert

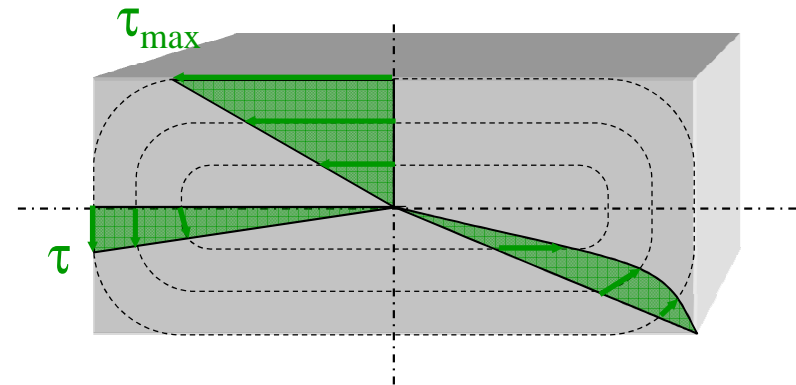
$$T = \frac{8 \cdot b \cdot \tau_{\max}}{s} \int_{z=0}^{s/2} z^2 dz = \frac{8 \cdot b \cdot \tau_{\max}}{s} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{s/2} = \frac{1}{3} b \cdot s^2 \cdot \tau_{\max}$$

erhält man für ein dünnes Blech

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot T}{b \cdot s^2} = \frac{T}{W_t}$$

mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_t = \frac{b \cdot s^2}{3}$$



Die maximale Schubspannung treten an den langen Seiten des Rechteckprofils auf und sind näherungsweise konstant. Die Ecken sind schubspannungsfrei.

Die Gleichungen gelten nur für ein unendlich dünnes Rechteck (Seitenverhältnis $b/s = \infty$). Für andere Seitenverhältnisse ist das Widerstandsmoment

$$W_t = k_1 \cdot b \cdot s^2$$

mit dem Korrekturfaktor k_1 aus nachfolgender Tabelle einzusetzen.

b/s	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
k_1	0,208	0,230	0,247	0,269	0,283	0,299	0,307	0,312	0,333
k_2	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,298	0,307	0,312	0,333

Für das Torsions-Flächenträgheitsmoment (Drillwiderstand) ergibt sich analog

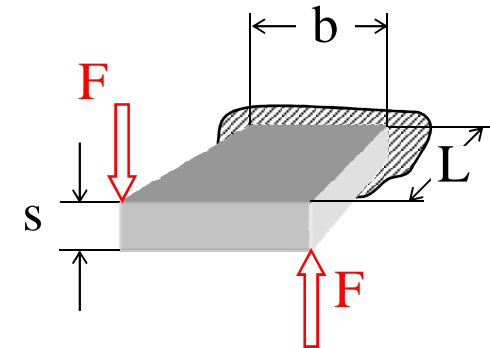
$$I_t = k_2 \cdot b \cdot s^3$$

mit dem Korrekturfaktor k_2 .

Beispiel: Torsionbeanspruchtes Blech

Gegeben: $F = 4 \text{ kN}$, $b = 50 \text{ mm}$, $s = 5 \text{ mm}$, $L = 500 \text{ mm}$, $G = 80000 \text{ N/mm}^2$

Gesucht: Schubspannung τ_t und Verdrehwinkel φ



Übung: Auslegung eines torsionsbeanspruchtes Bleches

Gegeben $F = 4 \text{ kN}$, $b = 50 \text{ mm}$, $\tau_{zul} = 100 \text{ N/mm}^2$

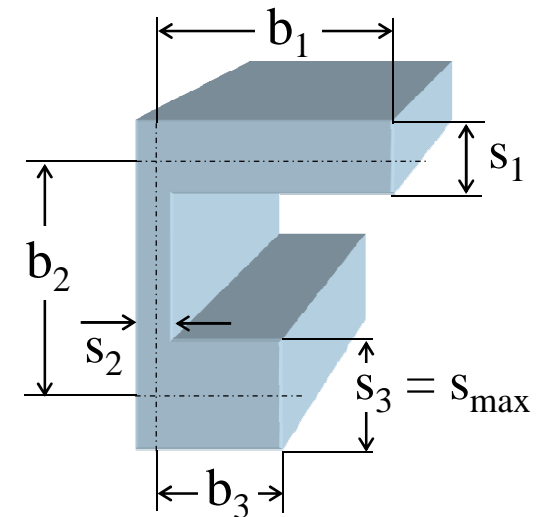
Gesucht: Blechdicke s

5.2.2.2 Dünnwandige zusammengesetzte Profile

Offene Querschnitte konstanter Dicke bzw. Profile, die abschnittsweise eine konstante Dicke aufweisen, lassen sich aus Rechteckflächen zusammensetzen.

Der Drillwiderstand des zusammengesetzten Querschnitts ergibt sich aus den Torsionsträgheitsmomenten der Einzelflächen, wobei für die einzusetzenden Breiten und die Korrekturfaktoren k_2 die Mittellinie des Profils maßgeblich ist

$$I_t = \sum I_{ti} = \sum k_{2i} \cdot b_i \cdot s_i^3$$



Die größten Spannungen treten im Rechteck mit der größten Wandstärke auf. Damit ergibt sich für das Torsions-Widerstandsmoment

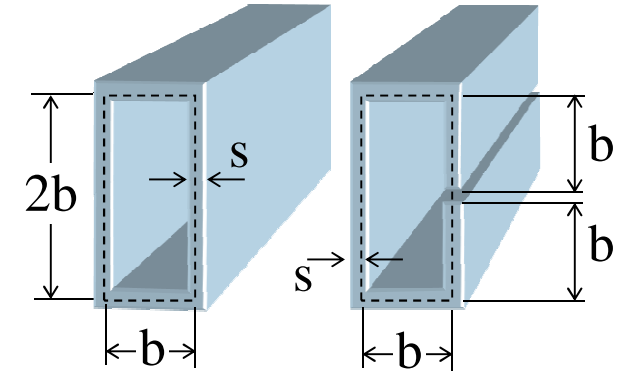
$$W_t = \frac{I_t}{s_{\max}} = \frac{\sum k_{2i} \cdot b_i \cdot s_i^3}{s_{\max}}$$

Beispiel: Vergleich zwischen geschlossenem und offenem Profil

Gegeben: Breite $b = 30$ mm, Wandstärke $s = 3$ mm

Gesucht: Widerstandsmoment W_t und Drillwiderstand I_t

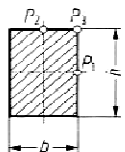
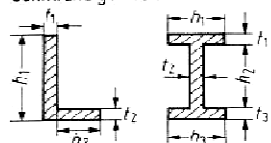
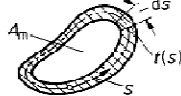
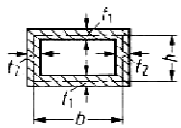
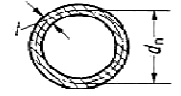
Geschlossenes Profil:



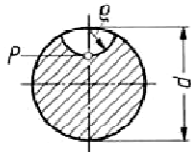
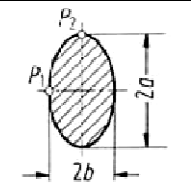
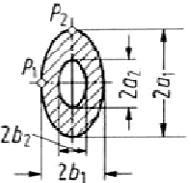
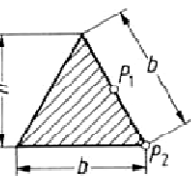
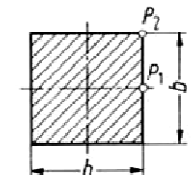
Offenes Profil:

Vergleich:



	Querschnitt	I_t	W_t	Bemerkungen								
10		$c_1 h b^3 = c_1 n b^4$		Voraussetzung: $h/b = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 In P_2 : $\tau_2 = c_3 \tau_{\max}$ In P_3 : $\tau_3 = 0$								
		$c_2 h b^3 = c_2 n b^3$										
		$n = h/b$	1		1,5	2	3	4	6	8	10	∞
		c_1	0,141		0,196	0,229	0,263	0,281	0,298	0,307	0,312	0,333
c_2	0,208	0,23	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,312	0,333			
c_3	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743			
11	dünnwandige Profile 	$\frac{\eta}{3} \sum h_i t_i^3$	I_t / t_{\max}	Voraussetzung: $h_i / t_i \gg 1$ τ_{\max} in Mitte der Längsseite des Rechtecks mit t_{\max}								
		Profil	L		C	I	I PB	+				
		η	0,99		1,12	1,12	1,31	1,29	1,17			
12	dünnwandige Hohlquerschnitte 	$\frac{4 A_m^2}{\oint ds / t(s)}$	$2 A_m t_{\min}$	A_m = von Mittellinie eingeschlossene Fläche, U = Umfang der Mittellinie, t_{\max} an Stelle, wo $t = t_{\min}$. Es gilt: $\tau(s) \cdot t(s) = M_T / 2 A_m = \text{const}$								
		Für konstante Wandsdicke t : $4 A_m^2 / U$	$2 A_m t$									
12a		$\frac{4 (bh)^2}{2 (b/t_1 + h/t_2)}$	$2 b h t_{\min}$	τ_{\max} auf, wo $t = t_{\min}$								
12b		$\pi d_m^2 t / 4$	$\pi d_m^2 t / 2$									



	Querschnitt	I_t	W_t	Bemerkungen
1		$\frac{\pi d^4}{32} = I_p$	$\frac{W_p}{\lambda} = \frac{\pi d^3}{16\lambda}$ $\lambda = \frac{2-\xi}{1-2\xi^2+(16/3\pi)\xi^3}$	τ_{\max} am Kerbgrund (in P_1) $\xi = \frac{e}{d/2}$
2		$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2} = \frac{\pi n^3 b^4}{n^2+1}$	$\frac{\pi a b^2}{2} = \frac{\pi n b^3}{2}$	Voraussetzung: $a/b = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 in P_2 : $\tau_2 = \tau_{\max}/n$
3		$\frac{\pi n^3 (b_1^4 - b_2^4)}{n^2+1}$	$\frac{\pi n (b_1^4 - b_2^4)}{2b_1}$	Voraussetzung: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = n \geq 1$ τ_{\max} in P_1 in P_2 : $\tau_2 = \tau_{\max}/n$
4		$\frac{b^4}{46,19} \approx \frac{h^4}{26}$	$\frac{b^3}{20} \approx \frac{h^3}{13}$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P_1) in den Ecken (P_2): $\tau_2 = 0$
5		$0,141 b^4$	$0,208 b^3$	τ_{\max} in Mitte der Seiten (P_1) in den Ecken (P_2): $\tau_2 = 0$