7. Bauteilsicherheit

Eine wesentliche Aufgabe der Ingenieurpraxis ist es, Bauteile, die infolge der äußeren Belastung einem allgemeinen Spannungs- und Verformungszustand unterliegen, so zu dimensionieren, dass es während der gesamten Betriebszeit nicht zum Bruch oder zum Versagen durch großen Verformungen kommt.

Einsturz der Mississippi-Brücke in Minneapolis (aus: www.tagesschau.de)

Hierbei muss grundsätzlich unterschieden werden zwischen ruhender und wechselnder Beanspruchung, was insbesondere im Bereich von Kerben von Bedeutung ist.

7.1 Versagenskriterien

Ein Bauteil versagt, wenn es aufgrund der äußeren Belastung zu einem Anriß bzw. Bruch kommt oder der Werkstoff einer unzulässig hohen plastischen Verformung unterliegt.

Die Art des Versagens ist abhängig

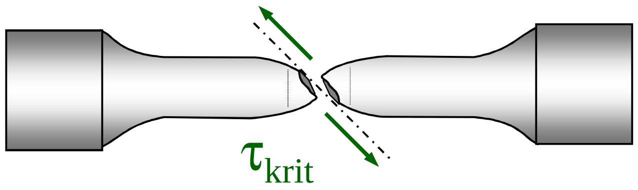
- von den Werkstoffeigenschaften (zäh oder spröd)
- vom Spannungszustand (ein- oder mehrachsig) und
- der Art der Belastung (ruhend, wechselnd, schlagartig)

Darüber hinaus spielt noch die Temperatur, das Umgebungsmedium und die Formgebung eine Rolle.

Bei der Auslegung eines Bauteils ist es daher notwendig, die Obergrenze eines Spannungszustandes zu definieren, deren Überschreitung zum Versagen des Materials führt (Versagenskriterium).

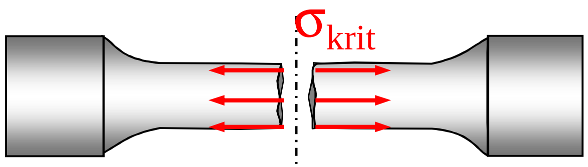
Zähe Werkstoffe versagen durch das Abgleiten einzelner Ebenen des Kristallgitters beim Erreichen der **Scherfestigkeit τ_{krit}**.

Die Bruchfläche ist stark verformt und und matt glänzend. Sie verläuft in Richtung der größten Schubspannung.



Bei **spröden Werkstoffen** tritt Versagen durch einen verformungsarmen Trennbruch bei Überschreiten der **Trennfestigkeit σ_{krit}** ein.

Die verformungsarme Bruchfläche ist körnig und verläuft senkrecht zur größten Normalspannung.



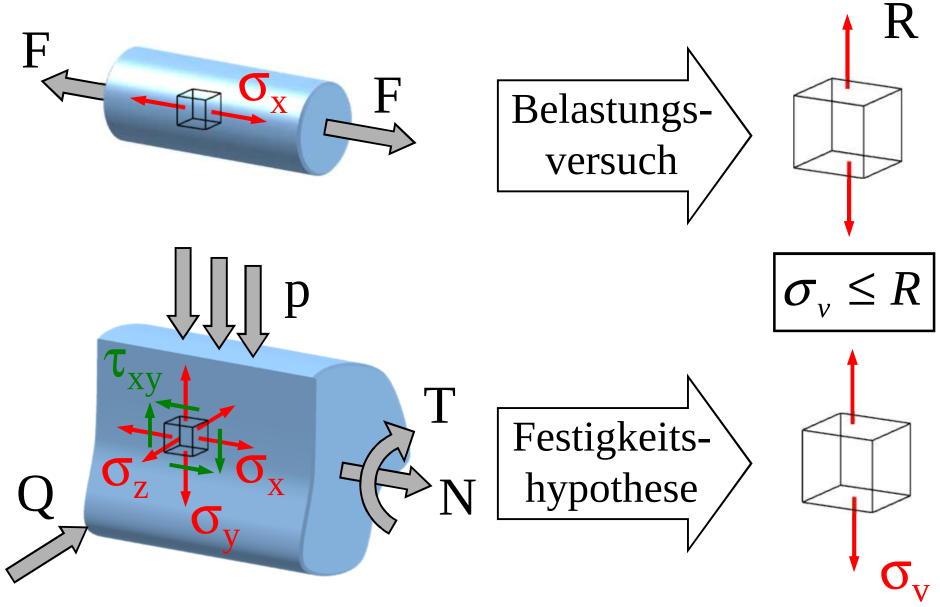
In der Praxis versagen Werkstoffe häufig durch eine Kombination aus Scher- und Trennbruch. Zunächst erfolgt ein Fließen in Richtung der größten Schub-spannung, anschließend tritt ein Restgewaltbruch senkrecht zur größten Normalspannung auf.

Um zu beurteilen, ob es zum Versagen kommt, muss der durch die Belastung resultierende mehrachsige Spannungszustand im Bauteil mit einem Werkstoffkennwert R verglichen werden, der i. allg. im Zug- oder Biegeversuch unter einachsiger Beanspruchung zum Versagen der Probe führt.

Mit sog. Festigkeitshypothesen wird ein mehrachsiger Spannungszustand in eine einachsige Vergleichsspannung σ_v umgerechnet, die eine äquivalente Schädigung des Bauteil hervorrufen würde.

Die Versagensbedingung lautet somit

$$\sigma_v \leq R$$



Das Versagen durch Bruch wird gegen die Zugfestigkeit R_m des Werkstoffes abgesichert, bei Fließversagen wird die Fließgrenze R_e herangezogen.

7.2 Festigkeitshypothesen

Festigkeitshypothesen fassen die bei mehrachsiger Beanspruchung auftretenden Spannungen zu einer Vergleichsspannung zusammen, die dem einachsigen Werkstoffkennwert gegenüber gestellt werden kann.

7.2.1 Normalspannungshypothese (NH)

Der Normalspannungshypothese liegt die Annahme zugrunde, dass die größte auftretende Normalspannung für das Versagen des Bauteils verantwortlich ist.

$$\sigma_{\max} \leq R$$

Mit $\sigma_{max} = \sigma_1$ und $R = R_m$ folgt die Vergleichsspannung

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{NH} = \sigma_1 \leq R_m$$

Der Bruch tritt ein, wenn die größte Hauptspannung die Zugfestigkeit erreicht.

Für den **ebenen** Spannungszustand kann die Vergleichsspannung direkt in den Koordinatenspannungen der Schnittebene angegeben werden

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{NH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \le R_e$$

Bei **einachsiger** Beanspruchung gilt

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{NH} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \le R_e$$

Die Normalspannungshypothese beschreibt das Versagen spröder Werkstoffe wie Glas, Keramik, Grauguss oder gehärteter Stahl.

Da eine Trennung des Werkstoffzusammenhangs (Riss bzw. Bruch) nur unter Zugbeanspruchung erfolgen kann, gilt die Normalspannungshypothese nur für positive Hauptspannungen.

7.2.2 Schubspannungshypothese (SH)

Der Schubspannungshypothese beschreibt das Versagen von zähen Werkstoffen durch Abgleiten von Kristallgitterebenen infolge auftretender Schubspannungen

$$\tau_{\max} \leq R$$

Für den räumlichen Spannungszustand kann die maximale Schubspannung durch die größte und kleinste Hauptspannung ausgedrückt werden

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Die Scherfestigkeit im einachsigen Zugversuch ist durch die halbe Fließgrenze $R = 0{,}5 \cdot R_e$ festgelegt. Einsetzen liefert die Vergleichsspannung

$$\sigma_v^{SH} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R_e$$

Nach der Schubspannungshypothese tritt Fließversagen ein, wenn die maximale Hauptspannungsdifferenz die Streckgrenze erreicht.

Für den **ebenen** Spannungszustand (σ_3=0) sind bei der Schubspannungshypothese Fallunterscheidungen zu treffen:

1) Beide Hauptspannungen sind positiv ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$):

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} = \sigma_1 \leq R_e$$

2) Hauptspannungen besitzen ungleichen Vorzeichen ($\sigma_1 > 0$ und $\sigma_2 < 0$):

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} = \sigma_1 - \sigma_2 \leq R_e$$

3) Beide Hauptspannungen sind negativ ($\sigma_2 < \sigma_1 < 0$):

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} = -\sigma_2 \leq R_e$$

Bei positiven Vorzeichen der Hauptspannungen stimmt die Schubspannungshypothese mit der Normalspannungshypothese überein.

Ist aus der Belastung ersichtlich, dass die Hauptspannungen unterschiedliche Vorzeichen besitzen (und nur dann), kann die Vergleichsspannung für den ebenen Fall auch direkt in den Koordinatenspannungen der Schnittebene angegeben werden

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \le R_m$$

Bei **einachsiger** Beanspruchung gilt

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le R_m$$

Obwohl die Schubspannungshypothese theoretisch einfach zu begründen ist und auch das Versagen zäher Werkstoffe richtig beschreibt, stellt die Notwendigkeit der Fallunterscheidung für den besonders wichtigen ebenen Spannungszustand in der Anwendung eine zusätzliche Schwierigkeit dar. Sie wird auch als Tresca-Kriterium bezeichnet.

19.2.3 Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese versagt ein Bauteil, wenn die gespeicherte Gestaltenergie einen werkstoffabhängigen Grenzwert erreicht. Aus der Elastizitätstheorie lässt sich die Gestaltänderungsenergie durch die Hauptspannungen ausdrücken. Für den **räumlichen** Spannungszustand gilt

$$W_G^{(3)} = \frac{1+\nu}{6 \cdot E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

mit der Querdehnzahl ν und dem Elastizitätsmodul E. Analog ergibt sich für den einachsigen Fall wenn $\sigma_v = \sigma_1$ gesetzt wird

$$W_G^{(1)} = \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot 2\sigma_v^2$$

Gleichsetzen beider Ausdrücke liefert die Vergleichsspannung

$$\sigma_v^{GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \le R_e$$

Für den **ebenen** Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$) ergibt sich

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{GEH} = \sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq R_e$$

oder in den Koordinatenspannungen der Schnittebene ausgedrückt

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{GEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq R_e$$

Analog gilt für den **einachsigen** Spannungszustand

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{GEH} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq R_e$$

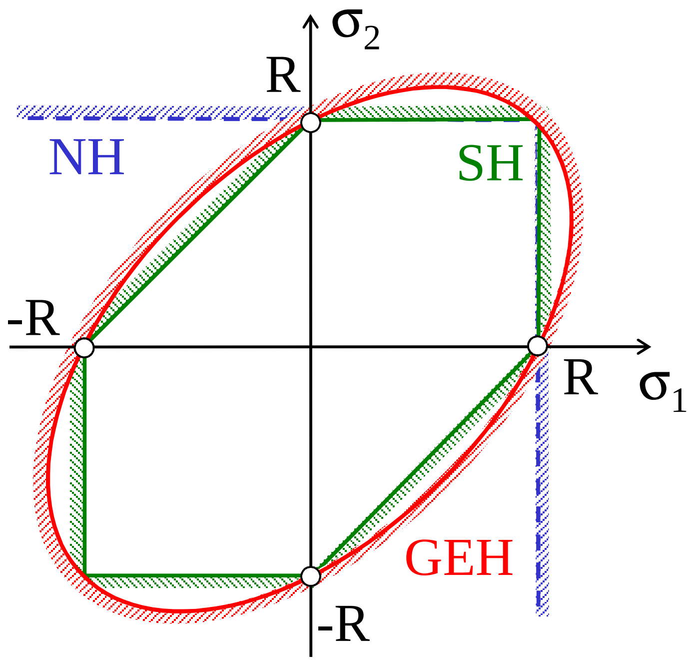
Wie die Schubspannungshypothese beschreibt die Gestaltänderungsenergie-hypothese das Versagen von zähen Werkstoffen, besitzt aber nicht deren Nachteil der Fallunterscheidung.

Die Gestaltänderungsenergiehypothese stimmt i. allg. am besten den experimentellen Ergebnissen überein. Sie wird auch als v. Mises Kriterium bezeichnet.

7.3 Vergleich der Festigkeitshypothesen

Für den ebenen Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$) lassen sich die Grenzkurven der Festigkeitshypothesen in einem gemeinsamen σ_1- σ_2-Schaubild darstellen.

Bei der Normalspannungshypothese tritt Versagen ein, wenn σ_1 oder σ_2 einen kritischen positiven Wert R erreichen.



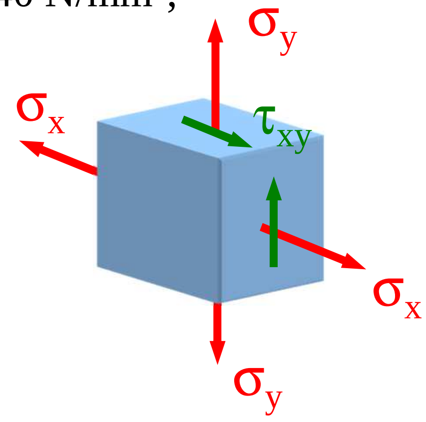
Das gleiche gilt für die Schubspannungshypothese, wenn σ_1 und σ_2 gleiche Vorzeichen haben, andernfalls tritt Versagen ein, wenn die Differenz σ_1-σ_2 den kritischen Wert R erreicht.

Die Grenzkurve der Gestaltänderungsenergiehypothese bildet eine gegenüber den Spannungsachsen um 45° geneigte Ellipse.

Versagen tritt ein, wenn in einem Punkt eines Bauteils die Hauptspannungskoordinaten auf oder außerhalb der Grenzkurven liegen.

Beispiel: Ebener Spannungszustand

Gegeben: Koordinatenspannungen σ_x = 120 N/mm², σ_y = 80 N/mm², τ_{xy} = 40 N/mm²,
Gesucht: Haupt- und Vergleichsspannungen



a) Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 100 \pm \sqrt{20^2 + 40^2}$$

$$\sigma_1 = 144{,}7\ N/mm^2 \qquad \sigma_2 = 55{,}3\ N/mm^2$$

b) Vergleichsspannungen

$$\sigma_V^{NH} = \sigma_V^{SH} = \sigma_1 = 145\, N/mm^2$$

$$\sigma_{\mathrm{v}}^{GEH} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{144{,}7^2 + 55{,}3^2 - 144{,}7 \cdot 55{,}3} = 126{,}5\ N/mm^2$$

oder

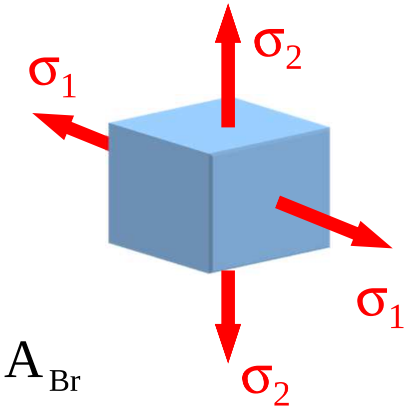
$$\sigma_{\mathrm{v}}^{GEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{120^2 + 80^2 - 120 \cdot 80 + 3 \cdot 40^2} = 126{,}5\ N/mm^2$$

aber: $\sigma_{\mathrm{v}}^{SH} \neq \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{(120 - 80)^2 + 4 \cdot 40^2} = 90\ N/mm^2$

Beispiel: Belastetes Bauteil aus 30 CrNiMo 8

Gegeben: Hauptspannungen $\sigma_1 = 800$ N/mm², $\sigma_2 = 400$ N/mm², $\sigma_3 = 360$ N/mm², Werkstoffkennwerte $R_e = 1050$ N/mm², $R_m = 1250$ N/mm²

Gesucht: Vergleichsspannungen und Ausnutzung



a) Einachsiger Spannungszustand

$$\sigma_V^{NH} = \sigma_V^{SH} = \sigma_V^{GEH} = \sigma_1 = 800\, N/mm^2$$

$$A_{Br} = \frac{\sigma_v^{NH}}{R_m} = \frac{800}{1250} = 0{,}64 \qquad A_{Fl} = \frac{\sigma_v^{SH}}{R_e} = \frac{800}{1050} = 0{,}76 > A_{Br}$$

b) Ebener Spannungszustand

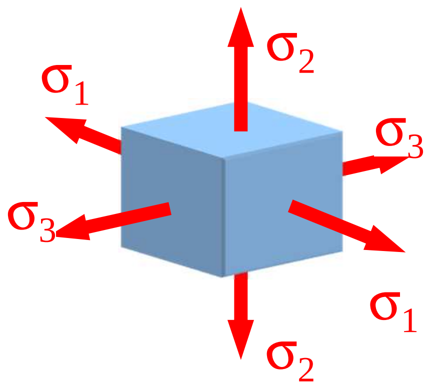
$$\sigma_V^{NH} = \sigma_V^{SH} = \sigma_1 = 800\, N/mm^2$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{800^2 + 400^2 - 800 \cdot 400} = 692\, N/mm^2$$

$$A_{Fl} = \frac{\sigma_v^{GEH}}{R_e} = \frac{692}{1050} = 0{,}66 > A_{Br}$$

... Fortsetzung

c) Räumlicher Spannungszustand



$$\sigma_V^{NH} = \sigma_1 = 800\, N/mm^2$$

$$\sigma_v^{SH} = \sigma_1 - \sigma_3 = 800 - 360 = 440\, N/mm^2$$

$$\sigma_v^{GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

$$\sigma_v^{GEH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{400^2 + 40^2 + 440^2} = 421\, N/mm^2$$

$$A_{Fl} = \frac{\sigma_v^{GEH}}{R_e} = \frac{421}{1050} = 0{,}4 < A_{Br}$$

Übung: Ebener Spannungszustand

Gegeben: Hauptspannungen σ_1 = 300 N/mm², σ_2 = –200 N/mm²,

Gesucht: Vergleichsspannungen

$$\sigma_V^{NH} = \sigma_1 = 300\, N/mm^2$$

$$\sigma_v^{SH} = \sigma_1 - \sigma_2 = 300 + 200 = 500\, N/mm^2$$

$$\sigma_v^{GEH} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{300^2 + 200^2 + 300 \cdot 200} = 436\, N/mm^2$$