6. Verschiebungsansätze

Mit Hilfe der Verschiebungsansätze werden die Elementsteifigkeitsmatrix, die Verzerrungen und daraus abgeleitet die Dehnungen und Spannungen ermittelt.

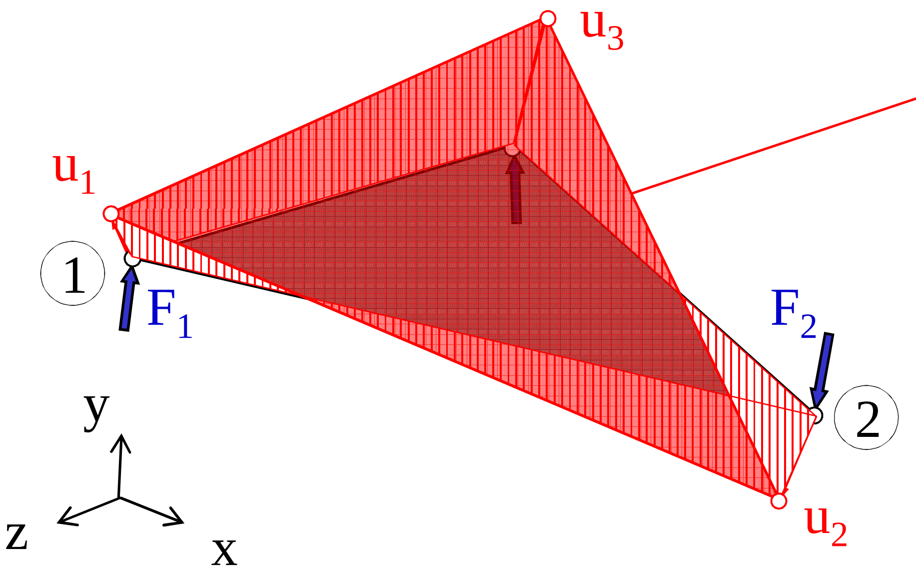
Die Steifigkeitsmatrizen einfacher Elemente (Stab-, Balken- und Drei-eckselemente) können noch elementar aus den Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen der Mechanik gewonnen werden.

Für Scheiben- und Plattenelemente sowie für Volumenelemente lassen sich die zugehörigen Steifigkeitsmatrizen nur über Näherungsverfahren aus den Verschiebungsansätzen ermitteln.

Eine besondere Rolle spielen dabei Ansatzfunktionen und die daraus abgeleiteten Formfunktionen, mit denen die kontinuierlichen Verformungen des Elements durch die diskreten Verschiebungen der Knoten ausgedrückt werden.

6.1 Ansatzfunktionen

Der Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen Verformungen $u_i(x,y,z)$ im Inneren eines Elements und den diskreten Knotenverschiebungen u_j wird durch sog. Ansatzfunktionen hergestellt.



Elementverformungen:
$u_i(x,y,z)=f(u_j)$

$i=x,y,z$	Richtungen
$j=1,2,...m$	Knotenverschiebungen
$m=k\cdot n$	Element-FHG´s
k	Knotenanzahl
n	Knoten-FHG´s

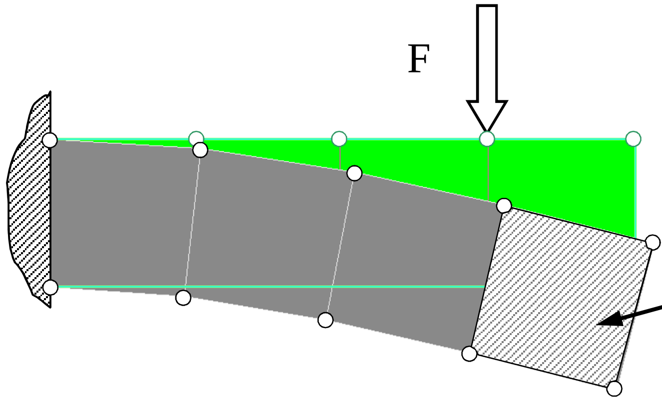
Für jede Verformung u_x, u_y und u_z wird eine Ansatzfunktion in Abhängigkeit der Summe aller Freiheitsgrade m der Elementknoten benötigt.

Verschiebungsansätze haben folgenden Bedingungen zu genügen:

1. **Die Ansatzfunktion muss Konstantglieder enthalten**

   Damit wird gewährleisten, das bei Verkleinerung der Elemente die Verformungen und Spannungen gegen konstante Werte konvergieren.

2. **Es dürfen keine Verformungen oder Spannungen im Element infolge Starrkörperbewegungen auftreten**



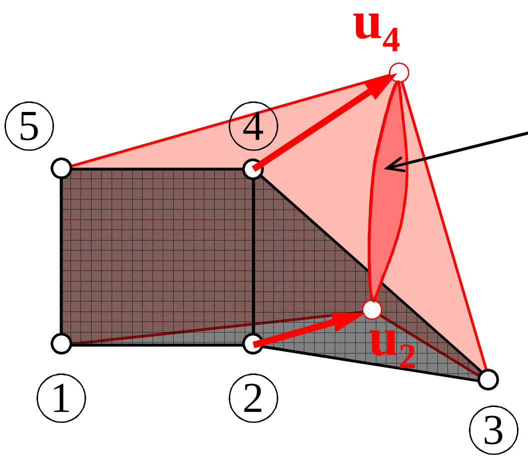
Spannungsfreies Element unter Starrkörpertranslation und Rotation

Ansatzfunktionen, die o. g. Bedingungen erfüllen, werden als **vollständig** bezeichnet.

3. Die Ansatzfunktion muss invariant gegenüber Koordinaten-transformation sein (Isotropie)

Verformungen und Spannungen dürfen sich beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen nicht ändern

4. Die Ansatzfunktion muss im Inneren und entlang der Ränder kontinuierliche Verschiebungen gewährleisten (Kompatibilität)



Keine Überlappung an gemeinsamen Rändern

Bei kompatiblen Elementen wird die Verformungen entlang der Ränder nur durch die Verschiebungen der zugehörigen Randknoten definiert.

Die Forderungen lassen sich durch gut vollständige Polynome in der Form

$$u(x,y,z) = \sum_{i=1}^{q} c_i \cdot x^j \cdot y^k \cdot z^l, \quad j,k,l = 0,1,2,\ldots,\ p$$

erfüllen.

Für ein- und zweidimensionale Elemente ergibt sich deren Aufbau aus dem Pascal´schen Dreieck:

Polynomgrad p

$$1$$

$$x \quad y \qquad \cdots\cdots \quad 1$$

$$x^2 \quad xy \quad y^2 \qquad \cdots\cdots \quad 2$$

$$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \qquad \cdots\cdots \quad 3$$

$$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad xy^4 \qquad \cdots\cdots \quad 4$$

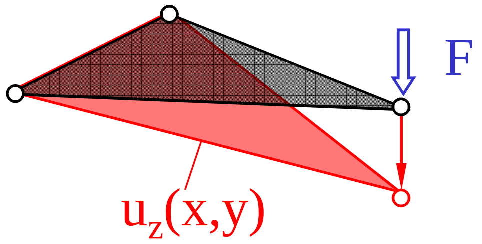
Ein Polynom ist vollständig, wenn alle im Dreieck aufgeführten Therme bis zum Polynomgrad p im Ansatz auftreten.

Man unterscheidet nach dem Grad p des Polynoms zwischen

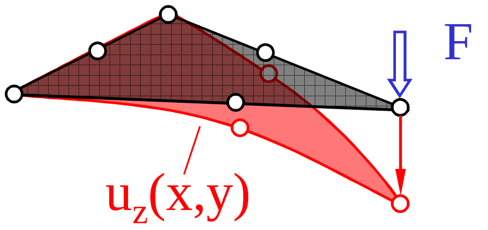
- linearen Ansatzfunktionen (p = 1)
- quadratischen Ansatzfunktionen (p = 2) und
- kubischen Ansatzfunktionen (p = 3) usw.

Mit steigendem Polynomgrad p der verwendeten Elemente verbessert sich die Qualität der Ergebnisse (Verformung und Spannung).

Linearer Ansatz



Quadratischer Ansatz

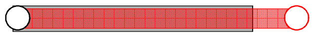


Da der Berechnungsaufwand jedoch stark zunimmt, werden Elemente mit einem Polynomgrad p > 5 werden eher selten verwendet.

Je nach Anzahl der unabhängigen Variablen ergeben sich:

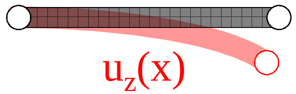
- eindimensionale Ansatzfunktionen $u_i(x) = f(u_j)$

Stabelement



$u_x(x)$

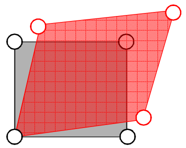
Balkenelement



$u_z(x)$

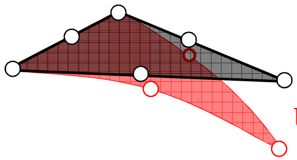
- zweidimensionale Ansatzfunktionen $u_i(x,y) = f(u_j)$

Scheibenelement



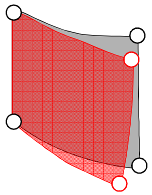
$u_x(x,y)$
$u_y(x,y)$

Plattenelement



$u_z(x,y)$

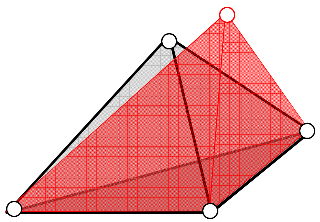
Schalenelement



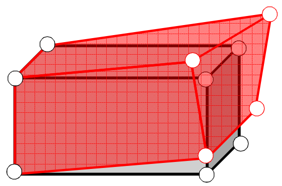
$u_x(x,y)$
$u_y(x,y)$
$u_z(x,y)$

- dreidimensionale Ansatzfunktionen $u_i(x,y,z) = f(u_j)$

Tetraeder-element



$u_x(x,y,z)$
$u_y(x,y,z)$
$u_z(x,y,z)$



Hexaeder-element

Die Konstanten c_i in den Ansatzfunktionen sind unbekannt und müssen aus der Geometrie des Elements und den Knotenverschiebungen und Verdrehungen bestimmt werden.

Die Anzahl der Konstanten c_i in den Ansatzfunktionen eines Elements muss mit der Anzahl m der unabhängigen Knotenfreiheitsgrade übereinstimmen.

Damit sind vollständige Polynome als Ansatzfunktion nur für eindimensionale Elemente sowie für zweidimensionale Dreieck-Scheibenelemente und dreidimensionale Tetraederelemente zu realisieren.

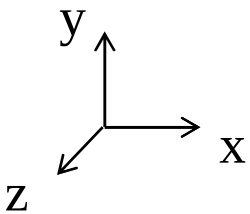
Für Viereck-Scheibenelemente und Hexaederelemente lassen sich kompatible Ansätze auf der Basis unvollständiger Polynome finden.

Für Platten- und Schalenelemente, bei denen zusätzlich translatorische Verschiebungen aus Knotenrotationen zu berücksichtigen sind, können jedoch die Kompatibilitätsforderung nicht mehr vollständig eingehalten werden (inkompatible Elemente).

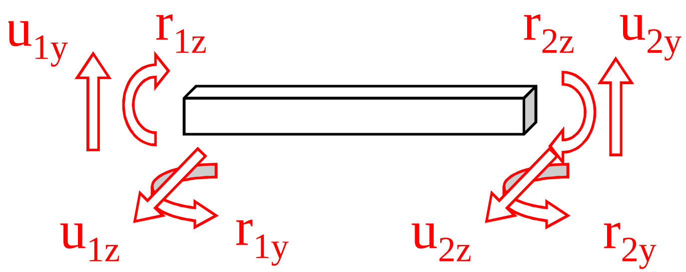
Mit dem Pascal´schen Dreieck lassen sich somit für die Elemente die erforderlichen Verschiebungsansätze formulieren:

Stabelement:

Linearer Ansatz: $u_x(x) = c_1 + c_2 \cdot x$



Balkenelement:



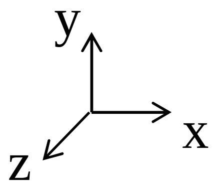
Kubischer Ansatz:

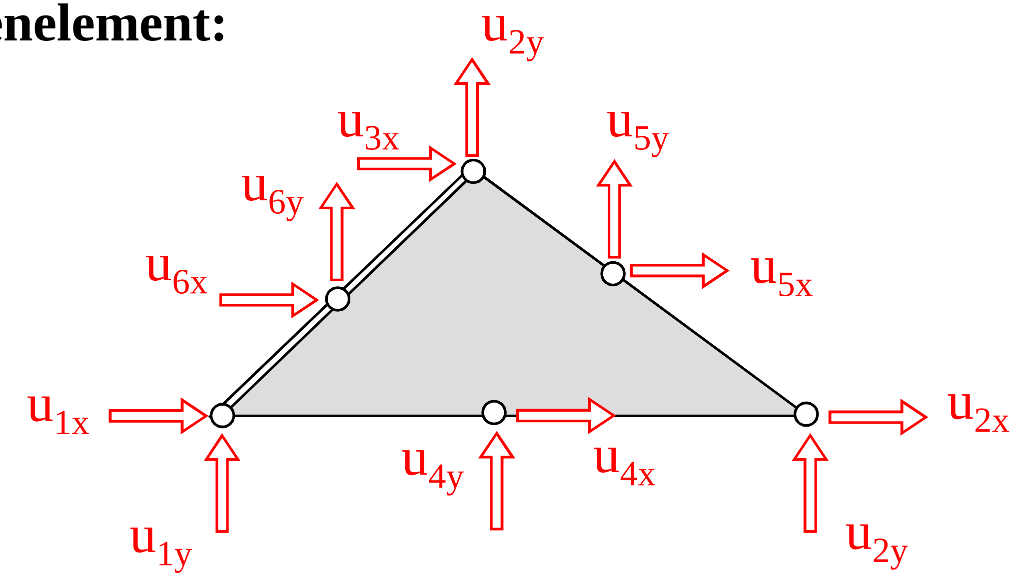
$$u_y(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x^3$$

$$u_z(x) = c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot x^2 + c_8 \cdot x^3$$

Dreieck-Scheibenelement:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3
\end{array}
$$





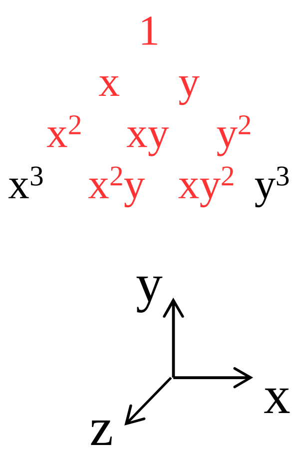
Vollständiger linearer Ansatz:

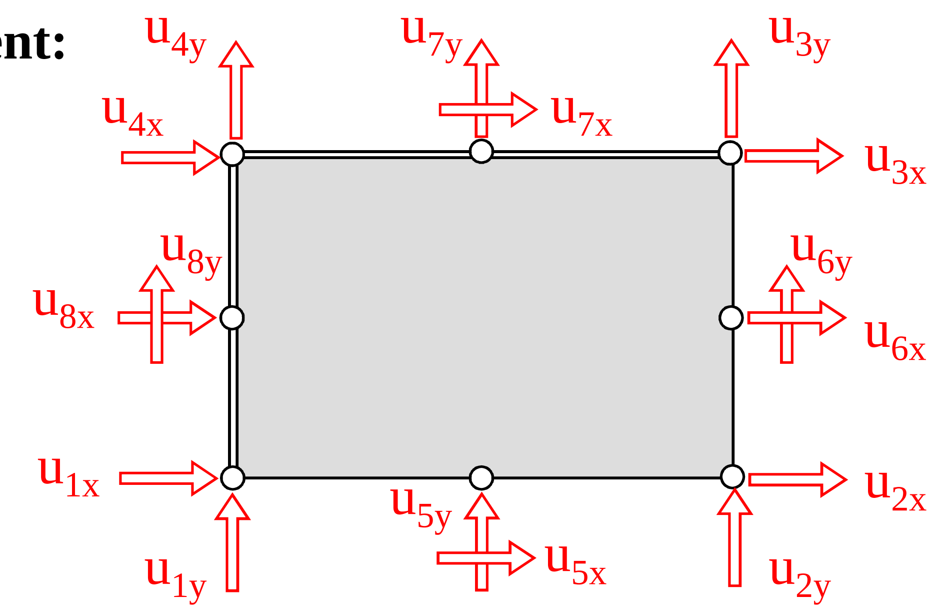
$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y$$
$$u_y(x,y) = c_4 + c_5 \cdot x + c_6 \cdot y$$

Vollst. quadratischer Ansatz:

$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot xy + c_6 \cdot y^2$$
$$u_y(x,y) = c_7 + c_8 \cdot x + c_9 \cdot y + c_{10} \cdot x^2 + c_{11} \cdot xy + c_{12} \cdot y^2$$

Rechteck-Scheibenelement:





Bilinearer Ansatz:

$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot xy$$
$$u_y(x,y) = c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot y + c_8 \cdot xy$$

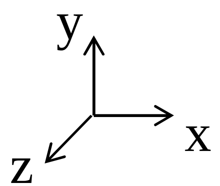
Serendipity Ansatz:

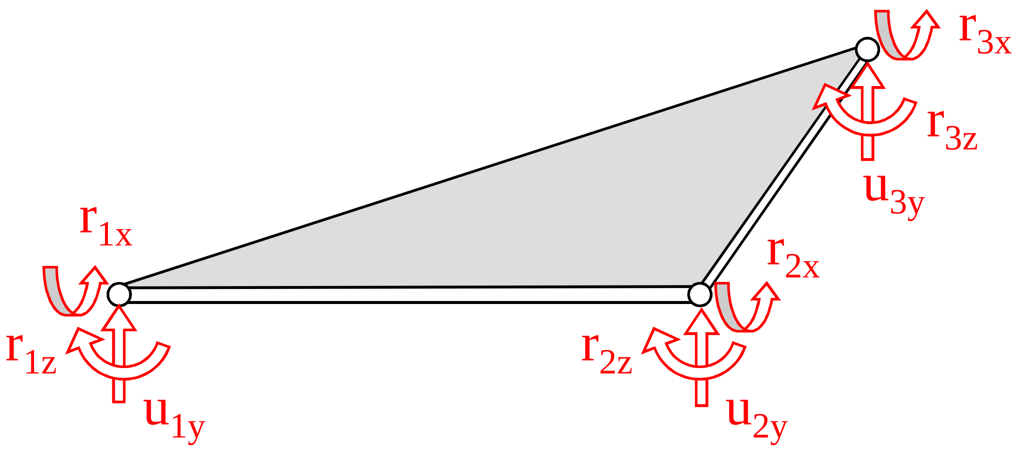
$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot xy + c_6 \cdot y^2 + c_7 \cdot x^2 y + c_8 \cdot xy^2$$
$$u_y(x,y) = c_9 + c_{10} \cdot x + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot x^2 + c_{13} \cdot xy + c_{14} \cdot y^2 + c_{15} \cdot x^2 y + c_{16} \cdot xy^2$$

Die Ansätze bilden unvollständige Polynome, erfüllen aber die Stetigkeits-anforderung an den Rändern.

Dreieck-Plattenelement:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
x^3 & & & x^2y+xy^2 & & & y^3
\end{array}
$$





Zur Beschreibung der Durchbiegung ist ein vollständiges Polynom 3. Grades notwendig. Für die 10 Konstanten des kubischen Ansatzes stehen nur 9 Knotenfreiheitsgrade zu Verfügung. Es müssen zwei Koeffizienten zusammengefasst werden:

$$u_y(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_4 \cdot x \cdot y + c_6 \cdot y^2 + c_7 \cdot x^3 + c_8 \cdot (x^2y + xy^2) + c_9 \cdot y^3$$

Das Element erfüllt die Stetigkeitsanforderung an den Rändern nicht exakt, hat sich aber in der Praxis bewährt.

Rechteck-Plattenelement:

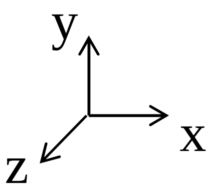
1

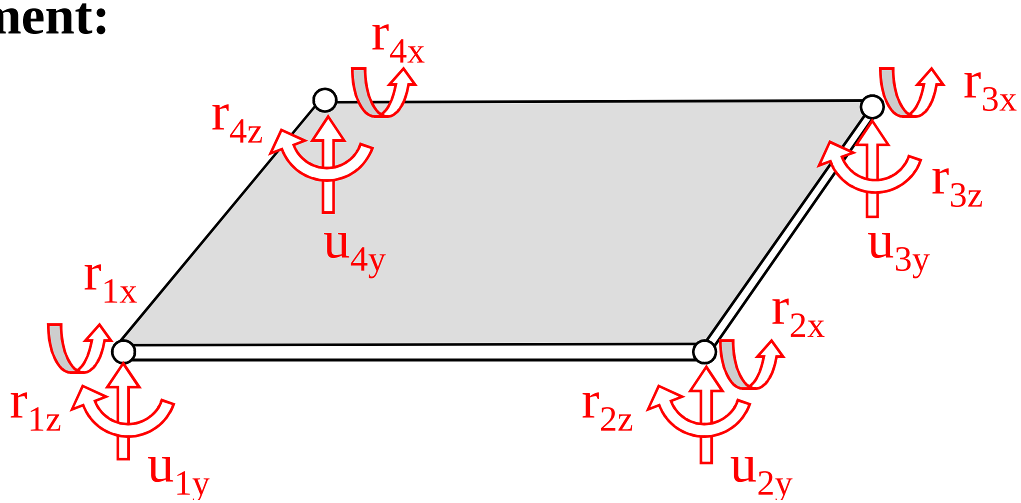
$x \quad y$

$x^2 \quad xy \quad y^2$

$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$



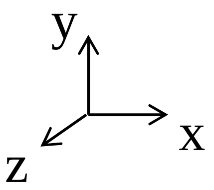


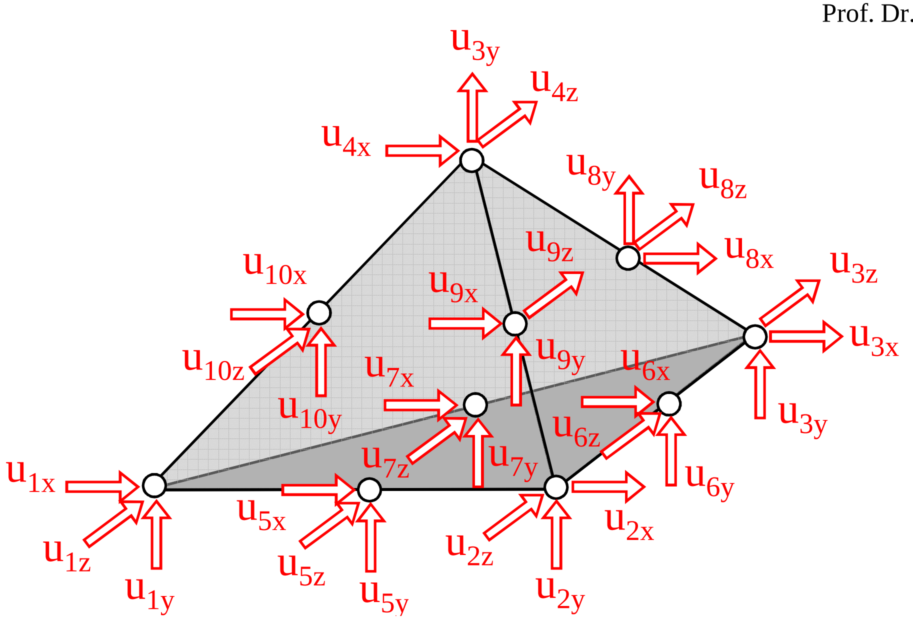
Gewählt wird ein unvollständiges Polynom 4. Grades:

$$u_y(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x^2 + c_4 \cdot x \cdot y + c_6 \cdot y^2 + c_7 \cdot x^3$$
$$+ c_8 \cdot x^2 y + c_9 \cdot xy^2 + c_{10} \cdot y^3 + c_{11} \cdot x^3 y + c_{12} \cdot xy^3$$

Auch dieses Element erfüllt die Stetigkeitsanforderung an den Rändern nicht exakt.

Tetraeder-Element:





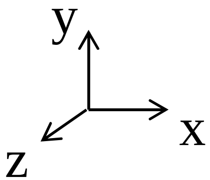
Vollständiger linearer Ansatz:

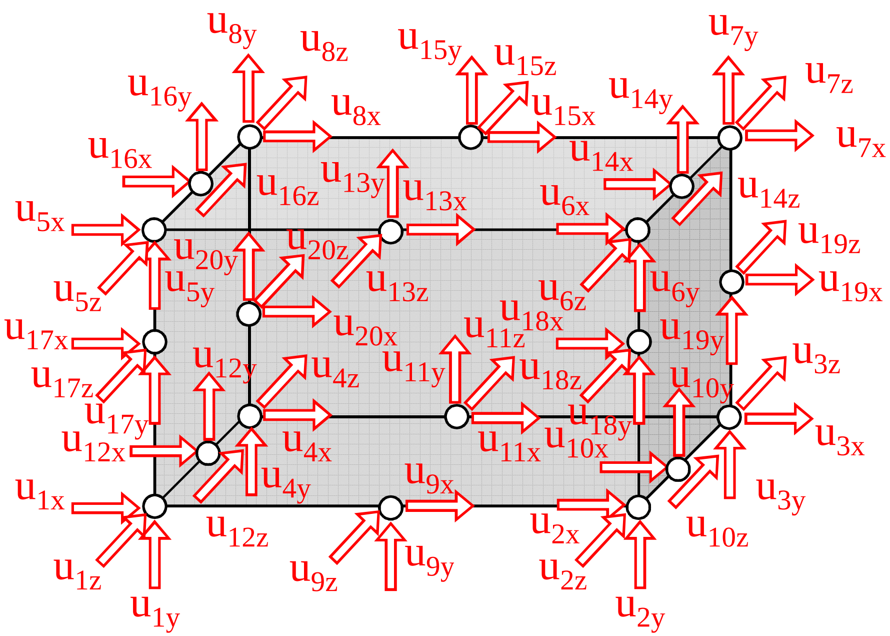
$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot z$$
$$u_y(x,y) = c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot y + c_8 \cdot z$$
$$u_z(x,y) = c_9 + c_{10} \cdot x + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot z$$

Vollständiger quadratischer Ansatz:

$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot z + c_5 \cdot x^2 + c_6 \cdot xy + \ldots + c_{10} \cdot z^2$$
$$u_y(x,y) = c_{11} + c_{12} \cdot x + c_{13} \cdot y + c_{14} \cdot z + c_{15} \cdot x^2 + c_{16} \cdot xy + \ldots + c_{20} \cdot z^2$$
$$u_z(x,y) = c_{21} + c_{22} \cdot x + c_{23} \cdot y + c_{24} \cdot z + c_{25} \cdot x^2 + c_{26} \cdot xy + \ldots + c_{30} \cdot z^2$$

Hexaeder-Element:





Trilinearer Ansatz:

$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot z + c_5 \cdot xy + c_6 \cdot yz + c_7 \cdot xz + c_8 \cdot xyz$$
$$u_y(x,y) = c_9 + c_{10} \cdot x + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot z + c_{13} \cdot xy + c_{14} \cdot yz + c_{15} \cdot xz + c_{16} \cdot xyz$$
$$u_z(x,y) = c_{17} + c_{18} \cdot x + c_{19} \cdot y + c_{20} \cdot z + c_{21} \cdot xy + c_{22} \cdot yz + c_{23} \cdot xz + c_{24} \cdot xyz$$

Serendipity Ansatz:

$$u_x(x,y) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot z + c_5 \cdot x^2 + c_6 \cdot xy + \ldots + c_{20} \cdot z^2$$
$$u_y(x,y) = c_{21} + c_{22} \cdot x + c_{23} \cdot y + c_{24} \cdot z + c_{15} \cdot x^2 + c_{16} \cdot xy + \ldots + c_{40} \cdot z^2$$
$$u_z(x,y) = c_{41} + c_{42} \cdot x + c_{43} \cdot y + c_{44} \cdot z + c_{45} \cdot x^2 + c_{46} \cdot xy + \ldots + c_{60} \cdot z^2$$

6.2 Formfunktionen

Werden die Konstanten c_i in den Ansatzfunktionen durch Einsetzen der Knotenverschiebungen eliminiert, lässt sich die kontinuierliche Element-verformung $u_i(x,y,z)$ als Summe der Produkte aus Formfunktionen $N_{ik}(x,y,z)$ und diskreten Knotenverschiebungen u_j des Elements ausdrücken.

Es gilt:

$$u_i(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} N_{ik}(x,y,z) \cdot u_j$$

i = x,y,z
j = 1,2,...m FHG´s
k= 1,2,...n Knoten

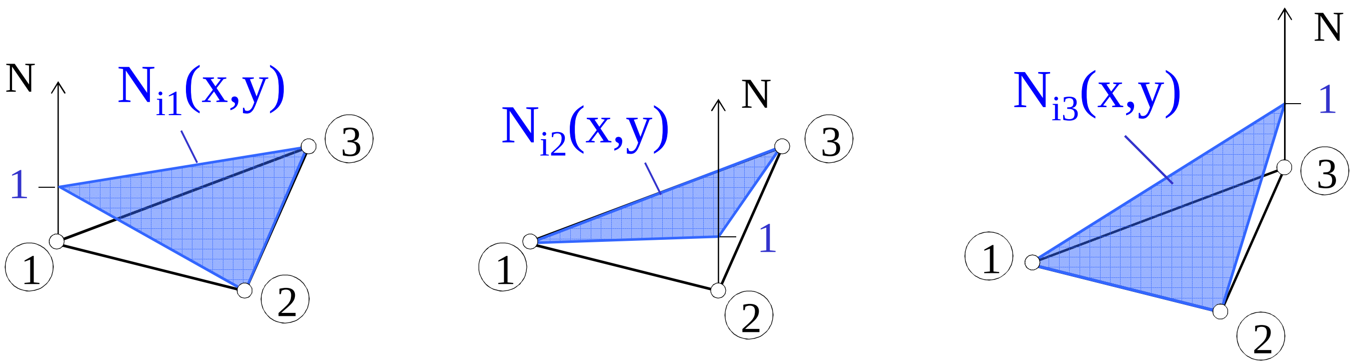
oder in Matrixschreibweise

$$\{u(x,y,z)\} = [N(x,y,z)] \cdot \{u\}$$

Die Formfunktion ist unabhängig von den Knotenverschiebungen. Sie kann als Einheitsverformung über dem Element angesehen werden.

Formfunktionen besitzen folgende Eigenschaften:

- Je Verformungsrichtung i = x,y,z eines Elements existiert für jeden Elementknoten k genau eine Formfunktion $N_{ik}(x,y,z)$.
- Die Formfunktionen $N_{ik}(x,y,z)$ besitzen im Knoten mit dem Index k den Wert 1 und liefern in allen anderen Knoten den Wert null.



- Die Formfunktionen geben den Anteil aus den Verschiebungen eines Knotens an der Elementverformung wieder.

Mit den Formfunktionen lassen sich Elementsteifigkeitsmatrizen aus dem Arbeitssatz der Mechanik gewinnen.