9. Bauteilauslegung

Kennzeichnend für die Beanspruchung eines Bauteils sind die im Werkstoff auftretenden Spannungen und Verformungen. Diese werden durch innere Kräfte und Momente (Schnittgrößen) als Folge äußerer Lasten hervorgerufen.

Torsionsbruch, ausgelöst durch ein wiederholtes Anlaufen eines rotierenden Systems

Flugzeugabsturz durch Bruch des Hauptholms der linken Tragfläche infolge eines Schwingungsanrisses (aus BFU-Bericht 3X030-0/05)

Die Auslegung eines Bauteils erfolgt in mehreren Schritten:

1. **Dimensionierung:**
   Ausgehend von einem Grobentwurf wird die Geometrie der maßgeblichen Querschnitte des Bauteils auf Basis der vorgegebenen Lasten festgelegt (dimensioniert).
2. **Gestaltung:**
   Mit den festgelegten Querschnittswerten wird das Bauteil unter Berücksichtigung von Normmaßen durchkonstruiert.
3. **Nachweis:**
   Für alle kritischen Querschnitte des Bauteils erfolgt abschließend ein Spannungsnachweis auf Basis der ausgeführten Geometrie unter Berücksichtigung örtlicher Zusatzbeanspruchungen infolge Kerbwirkung.

Die Schritte 2 und 3 müssen ggf. mit geänderter Geometrie oder Werkstoff wiederholt werden, falls die zulässige Spannung an einer oder mehreren Stellen überschritten wird.

9.1 Festigkeitsbedingung

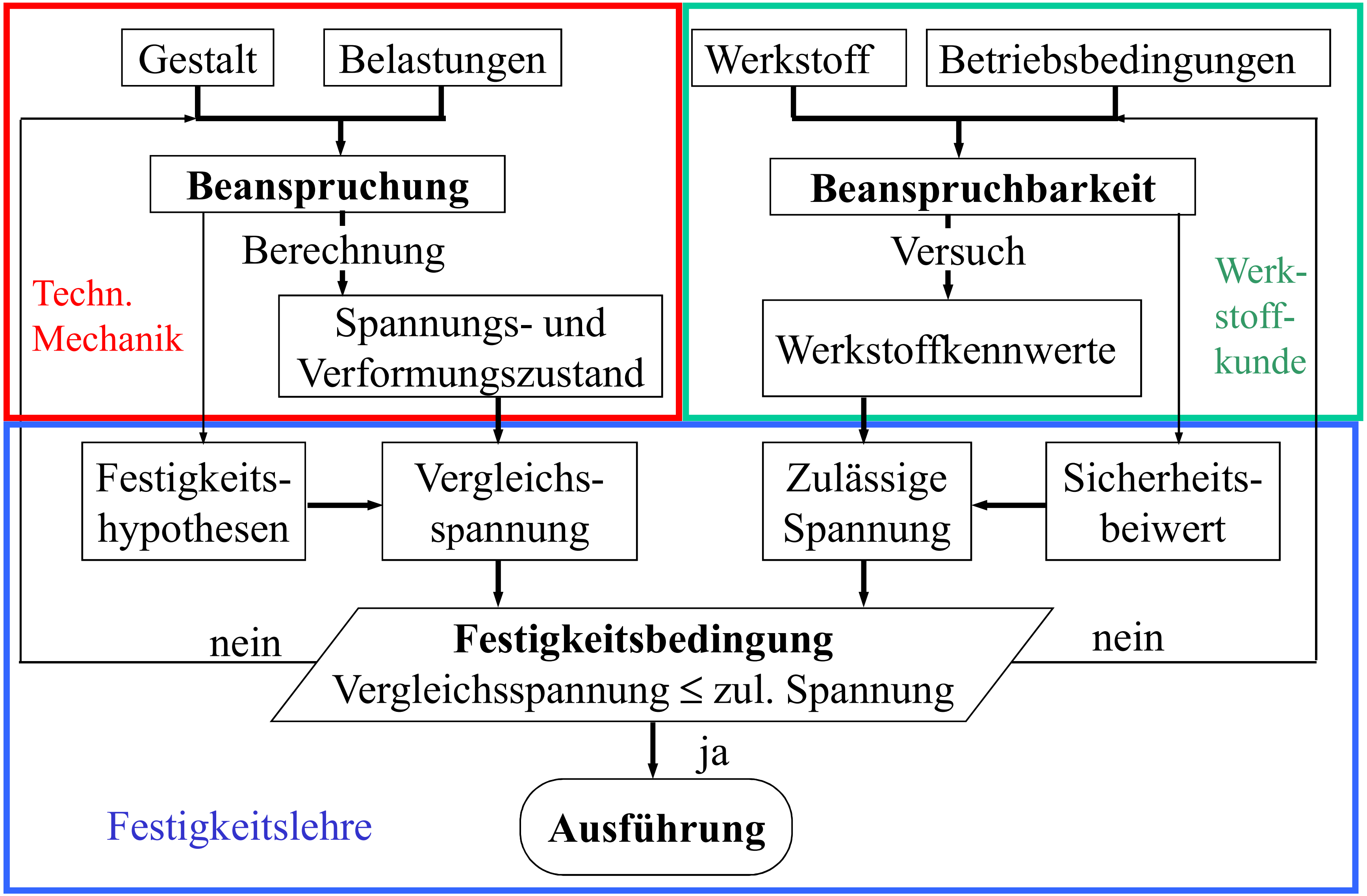
Die allgemeine Festigkeitsbedingung sagt aus, dass die Beanspruchung eines Bauteils infolge äußerer Lasten an keiner Stelle die durch den Werkstoff begrenzte Beanspruchbarkeit überschreiten darf.

Beanspruchung ≤ Beanspruchbarkeit

Die Beanspruchung eines Bauteils liefert die Technische Mechanik, indem aus den Lasten die Schnittgrößen ermittelt und daraus die Spannungen im betrachteten Schnitt berechnet werden.

Die Beanspruchbarkeit eines Bauteils ist abhängig vom verwendeten Werkstoff, den Betriebsbedingungen und der Schadensfolge. Zulässige Werte der Beanspruchbarkeit liefert die Werkstofftechnik auf der Basis experimenteller Untersuchungen.

Für den Fall einer statischen Beanspruchung ist der Berechnungsablauf im nachfolgenden Schema dargestellt


Gestalt
Belastungen
Beanspruchung
Berechnung
Techn. Mechanik
Spannungs- und Verformungszustand
Werkstoff
Betriebsbedingungen
Beanspruchbarkeit
Versuch
Werkstoffkennwerte
Werk-stoff-kunde
Festigkeits-hypothesen
Vergleichs-spannung
Zulässige Spannung
Sicherheits-beiwert
nein
Festigkeitsbedingung
Vergleichsspannung ≤ zul. Spannung
nein
ja
Ausführung
Festigkeitslehre

9.1.1 Vergleichsspannung

Wirken in einem Querschnitt nur Normalspannungen σ, können diese direkt mit der zulässigen Spannung S_{zul} verglichen werden. Wirken zusätzlich Schubspannungen τ, ist zunächst eine Vergleichsspannung zu bilden.

Nach der Schubspannungshypothese (SH) gilt

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) liefert etwas kleinere Werte

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

Damit ist die Festigkeitsbedingung

$$\sigma_v \leq S_{zul}$$

Der Ausnutzungsgrad ergibt sich mit

$$\eta = \frac{\sigma_v}{S_{zul}} \leq 1$$

und muss immer kleiner gleich eins sein.

9.1.2 Zulässige Spannung

Die zulässige Spannung (Spannungsvergleichswert) ergibt sich aus einem Werkstoffkennwert, der durch einem Sicherheitsbeiwert k abgemindert wird. Der Sicherheitsbeiwert ist abhängig von

- der Beanspruchungsart,
- dem Werkstoffkennwert,
- dem Umgebungseinfluss und
- der Schadensfolge.

Die zulässigen Spannungen sind in den Berechungsvorschriften (FKM, Stahlbaunormen, ASME etc.) festgelegt. Für ferritische Stähle kann als Anhaltspunkt

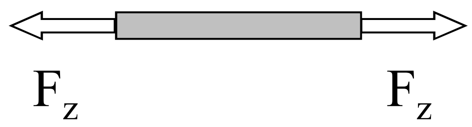
$$S_{zul} = \mathrm{Min.}\left\{\frac{R_e}{1{,}5}, \frac{R_m}{3}\right\} \qquad \text{bzw.} \qquad t_{zul} = \frac{S_{zul}}{\sqrt{3}} = \mathrm{Min.}\left\{\frac{R_e}{2{,}6}, \frac{R_m}{5{,}2}\right\}$$

gesetzt werden mit der Streckgrenze R_e und der Zugfestigkeit R_m, wobei die Streckgrenze auch durch die 0,2-Dehngrenze $R_{p0,2}$ ersetzt werden kann.

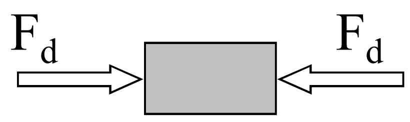
9.2 Grundbeanspruchungsarten

Die in einem Bauteil auftretenden Beanspruchungen lassen sich auf sechs Grundbeanspruchungsarten oder deren Kombination zurückführen

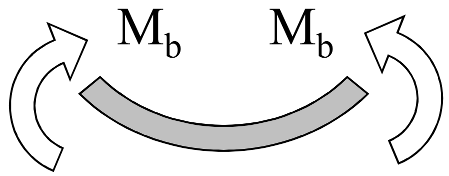
Zug wird durch Kräfte mit gemeinsamer Wirkungs-linie längs der Stabachse hervorgerufen und bewirkt eine Verlängerung von Bauteilen (Stangen, Seile).

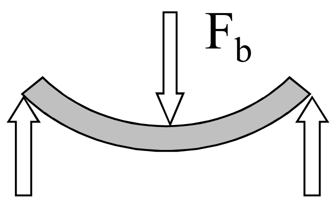


Druck wird durch Kräfte entgegengesetzt den Zugkräften hervorgerufen und bewirkt eine Bauteilverkürzung (Säulen, Stempel).

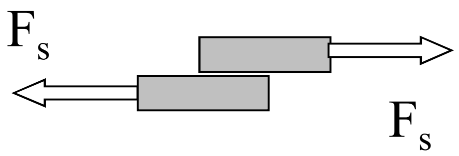


Biegung wird durch Momente (reine Biegung) oder durch Kräfte senkrecht zur Stabachse (Querkraftbiegung) hervorgerufen und bewirkt eine Durchbiegung des Bauteils (Balken, Träger).

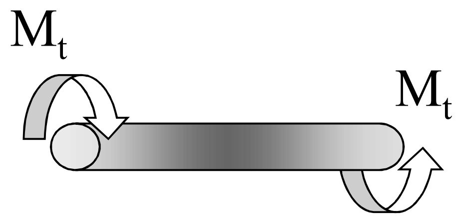




Schub wird durch Zug- oder Druckkräfte mit gemeinsamer oder leicht versetzter Wirkungslinie längs der Stabachse hervorgerufen und führen zum Abscheren von Bauteilen (Bolzen, Schweißnähte, Nieten).



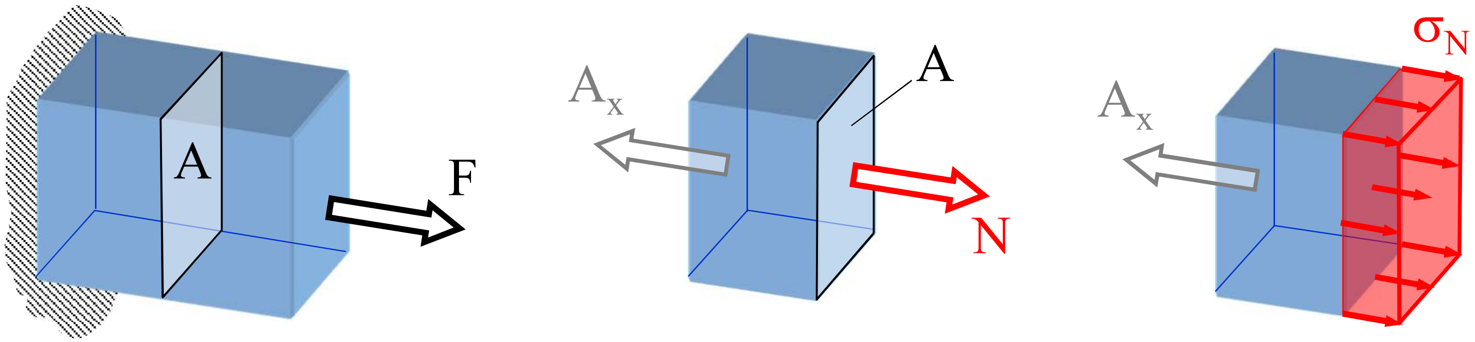
Torsion wird durch Momente längs der Stabachse hervorgerufen und bewirkt eine Verdrehung des Bauteils (Wellen, Schrauben).



Knickung wird durch Druckkräfte an langen, dünnen Bauteilen hervorgerufen und bewirkt ein plötzliches Ausbiegen (Beulen). Dabei spielt jedoch nicht die Werkstofffestigkeit eine Rolle, sondern es handelt sich um ein **Stabilitätsproblem**.

9.2.1 Zug- und Druckbeanspruchung

Zug- und Druckbeanspruchungen werden durch Normalkräfte N bewirkt, die senkrecht zur Wirkfläche stehen.



Nach dem Prinzip von St. Vernant ist die in der Querschnittsfläche A wirkende Normalspannung σ_N konstant. Die Festigkeitsbedingung lautet

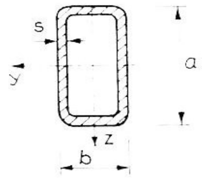
$$\sigma_N = \frac{|N|}{A} \leq S_{zul}$$

wobei die Normalkraft als Betrag einzusetzen ist.

Die erforderliche Querschnittsfläche bei Normalkraftbeanspruchung erhält man mit

$$A_{erf} \geq \frac{|N|}{S_{zul}}$$

Die Flächen für Standard-querschnitte und genormte Profile lassen sich aus Tabellen entnehmen, z. B. für rechteckige Stahlhohlprofile nach DIN 49 410.



Nennmaße a x b mm	Wanddicke s mm	Querschnitt A cm^2
50 x 30	2,9	4,23
60 x 40	2,9	5,39
70 x 40	2,9	5,97
80 x 40	2,9	6,55
90 x 50	3,2	8,46
100 x 50	3,6	10,2
100 x 60	3,6	10,9
120 x 60	4	13,5
140 x 80	4	16,7
160 x 90	4,5	21,2
180 x 100	5,6	29,3
200 x 120	6,3	37,7

Für kreisförmigen Querschnittsflächen (Achsen, Wellen, Zapfen) ergibt sich:

$$A_{erf} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{erf}^2 \geq \frac{|N|}{S_{zul}} \qquad \Rightarrow d_{erf} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N|}{\pi \cdot S_{zul}}}$$

Beispiel: Stab aus St42 unter axialer Zugkraft

Gegeben: $N = 100$ kN, $R_m = 510$ N/mm^2, $R_e = 420$ N/mm^2

Gesucht: Erf0rderlicher Querschnitt und Durchmesser, Ausnutzungsgrad

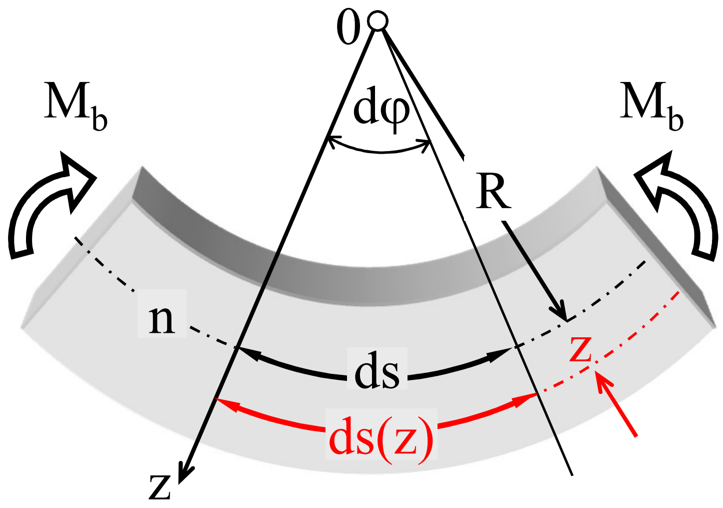
9.2.2 Biegebeanspruchung

Biegebeanspruchung tritt auf, wenn ein Biegemoment M um die Querachse eines Trägers wirkt. Dieser wird sich infolge der Belastung durchbiegen.

Im unverformten Zustand haben alle Fasern eines Balkenelements die gleiche Länge ds. Bei Biegung behält die neutrale Faser n ihre Ursprungslänge, alle anderen Fasern ändern ihre Länge.

Mit ds = R·dφ folgt für die Dehnung ε einer Faser im Abstand z von der neutralen Faserschicht:

$$\varepsilon(z) = \frac{ds(z) - ds}{ds} = \frac{(R+z)\cdot d\varphi - R\cdot d\varphi}{R\cdot d\varphi} = \frac{z}{R}$$

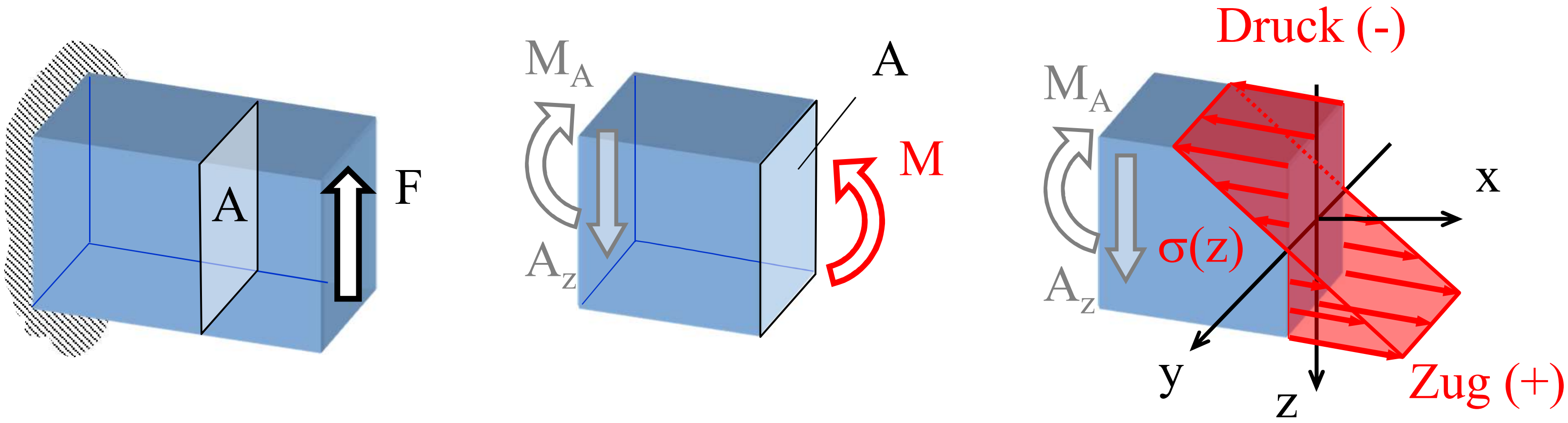


Die Dehnung ε ist proportional zum Abstand von der neutralen Faser und umgekehrt proportional zum Krümmungsradius R.

Setzt man das Hook´sche Gesetz $\sigma = E\cdot\varepsilon$ ein erhält man die durch die Balkenbiegung verursachte Biegespannung:

$$\sigma_b(z) = E \cdot \varepsilon(z) \quad = E \cdot \frac{z}{R}$$

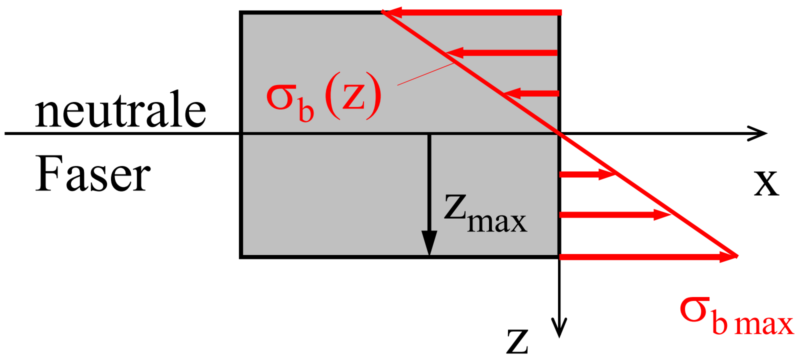
Im Gegensatz zu den durch Längskräfte verursachten Normalspannungen sind bei Biegung die Spannung über der Balkenhöhe linear veränderlich.



Es handelt sich um eine rein geometrische Beziehung, die unabhängig von der Querschnittsform ist. Die neutrale Faserschicht geht durch den Flächenschwerpunkt.

Die Abhängigkeit der Biegespannung lässt sich einfach aus dem Verhältnis $\sigma_b(z)/\sigma_{b\,max} = z/z_{max}$ herleiten.

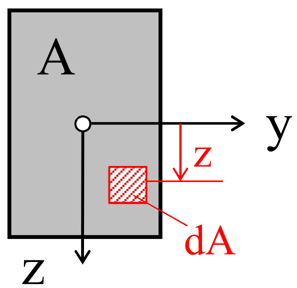
$$\sigma_b(z) = \sigma_{b\,max} \cdot \frac{z}{z_{max}}$$



mit der max. Biegerandspannung $\sigma_{b\,max}$ und dem max. Randabstand z_{max}.

Die Biegespannungen stehen mit dem Biegemoment im Gleichgewicht. Es gilt

$$M_b = \int_A z \cdot \sigma_b(z) dA = \frac{\sigma_{b\,max}}{z_{max}} \int_A z^2 dA$$



Das Integral ist das axiales Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_A z^2 \; dA$$

Das Flächenträgheitsmoment wird auch als Flächenmoment 2. Ordnung bezeichnet und hat die Einheit [m^4, mm^4 bzw. cm^4].

Die maximale Biegerandspannung erhält man aus

$$\sigma_{b\,max} = \frac{M_b}{I} \cdot z_{max}$$

Die in der Gleichung auftretenden geometrischen Größen werden zum axialen **Widerstandsmoment**

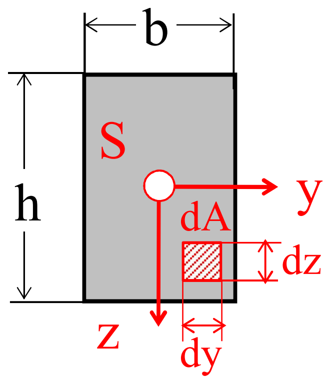
$$W_b = \frac{I}{z_{max}}$$

zusammengefasst. Die Einheit ist [m^3, mm^3 bzw. cm^3]. Damit ergibt sich die **Biegespannungsformel** zur Berechnung der maximalen Biegerandspannung

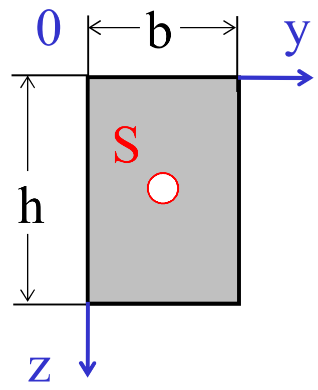
$$\sigma_{b\,max} = \frac{M_b}{W_b}$$

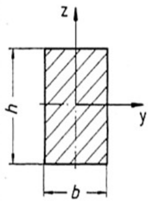
Das Flächenträgheitsmoment lässt sich durch Integration bestimmen und mit dem Randabstand das Widerstandsmoment. Für einfache Querschnitte und genormter Profile sind die geometrischen Größen in Tabellen aufgeführt.

Beispiel : Axiale Flächenträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes



Übung: Flächenträgheitsmomente eines Rechtecks bezüglich des Randes



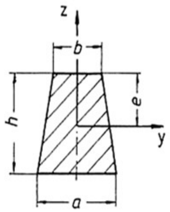


$I_y = \frac{bh^3}{12}$

$I_z = \frac{hb^3}{12}$

$W_y = \frac{bh^2}{6}$

$W_z = \frac{hb^2}{6}$

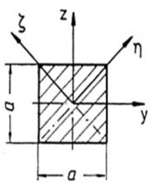


$I_y = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$

$I_z = \frac{h}{48}(a+b)(a^2+b^2)$

$W_y = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{a^2+4ab+b^2}{2a+b}$

für $e = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$

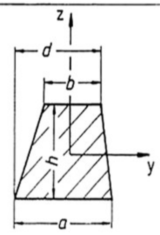


$I = \frac{a^4}{12}$

für alle Achsen gleich

$W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$

$W_\eta = W_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{12}\, a^3 \approx 0{,}118\, a^3$

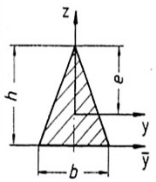


$B = a + b$

$I_y = \frac{h^3(B^2+2ab)}{36B}$

$I_z = \frac{h}{36B}\left[B^2(B^2-ab) - d(B-d)(B^2+2ab)\right]$

$I_{yz} = \frac{h^2}{72B}(B-2d)(B^2+2ab)$

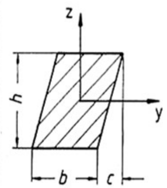


$I_y = \frac{bh^3}{36}$; $I_{\bar{y}} = \frac{bh^3}{12}$

$I_z = \frac{hb^3}{48}$

$W_y = \frac{bh^2}{24}$ für $e = \frac{2}{3}h$

$W_z = \frac{hb^2}{24}$

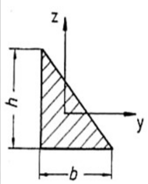


$I_y = \frac{bh^3}{12}$

$I_z = \frac{bh(b^2+c^2)}{12}$

$I_{yz} = -\frac{h^2bc}{12}$

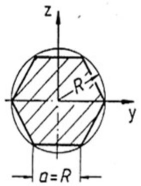
$W_y = \frac{bh^2}{6}$



$I_y = \frac{bh^3}{36}$

$I_z = \frac{hb^3}{36}$

$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}$

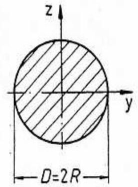


$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16}\, a^4 \approx 0{,}541\, a^4$

für alle Achsen gleich

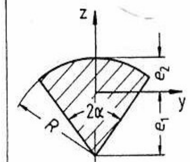
$W_y = \frac{5}{8}\, a^3$

$W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16}\, a^3 \approx 0{,}541\, a^3$



$I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

$W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$

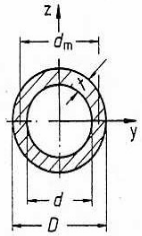


$I_y = R^4\left[\frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{8} - \frac{2(1-\cos 2\alpha)}{9\alpha}\right]$

$I_z = \frac{R^4(2\alpha-\sin 2\alpha)}{8}$

$W_y = \frac{I_y}{e_{1,2}}$

$e_{1,2}$ siehe A 2.2

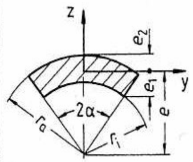


$I = \frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$

$W = \frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}$

für $t/d_m \ll 1$:

$I \approx \frac{\pi d_m^3 t}{8}$; $W \approx \frac{\pi d_m^2 t}{4}$

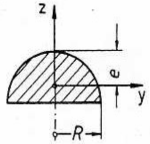


$I_y = (r_a^4-r_i^4)(2\alpha+\sin 2\alpha)/8 - e^2\alpha(r_a^2-r_i^2)$

$I_z = (r_a^4-r_i^4)(2\alpha-\sin 2\alpha)/8$

$W_{y1,2} = I_y / e_{1,2}$

e, $e_{1,2}$ siehe A 2.2

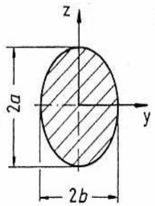


$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)R^4 \approx 0{,}1098\, R^4$

$I_z = \frac{\pi R^4}{8}$

$W_y \approx 0{,}191\, R^3$

für $e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)R$

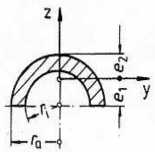


$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$

$I_z = \frac{\pi b^3 a}{4}$

$W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$

$W_z = \frac{\pi b^2 a}{4}$

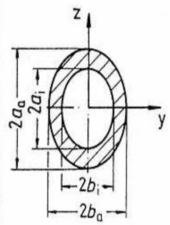


$I_y \approx 0{,}110\,(r_a^4-r_i^4) - 0{,}283\, r_a^2 r_i^2 \cdot \frac{r_a-r_i}{r_a+r_i}$

$I_z = \frac{\pi(r_a^4-r_i^4)}{8}$

$W_{y\,1,2} = \frac{I_y}{e_{1,2}}$; $e_{1,2}$ siehe A2.2

$W_z = I_z / r_a$



$I_y = \frac{\pi}{4}(a_a^3 b_a - a_i^3 b_i)$

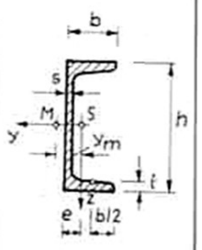
$I_z = \frac{\pi}{4}(b_a^3 a_a - b_i^3 a_i)$

$W_y = \frac{\pi}{4a_a}(a_a^3 b_a - a_i^3 b_i)$

$W_z = \frac{\pi}{4b_a}(b_a^3 a_a - b_i^3 a_i)$

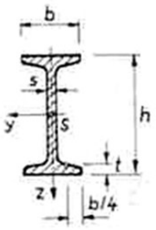
aus M. Mayr: Technische Mechanik, Anhang

A 3/2 Rundkantiger U-Stahl nach DIN 1026 (Auszug)



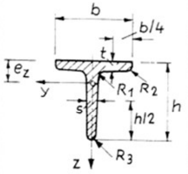
Kurzzeichen U	h mm	b mm	s mm	t mm	A cm^2	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	i_z cm	y_m cm	I_t cm^4	e cm
30 x 15	30	15	4	4,5	2,21	2,53	1,69	1,07	0,38	0,39	0,42	0,74	0,165	0,52
30	30	33	5	7	5,44	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99	2,22	0,912	1,31
40 x 20	40	20	5	5,5	3,66	7,58	3,79	1,44	1,14	0,86	0,56	1,01	0,363	0,67
40	40	35	5	7	6,21	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04	2,32	1,00	1,33
50 x 25	50	25	5	6	4,92	16,8	6,73	1,85	2,49	1,48	0,71	1,34	0,878	0,81
50	50	38	5	7	7,12	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	2,47	1,12	1,37
60	60	30	6	6	6,46	31,6	10,5	2,21	4,51	2,16	0,84	1,50	0,939	0,91
65	65	42	5,5	7,5	9,03	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	2,60	1,61	1,42
80	80	45	6	8	11,0	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	2,67	2,16	1,45
100	100	50	6	8,5	13,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	2,93	2,81	1,55
120	120	55	7	9	17,0	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	3,03	4,15	1,60
140	140	60	7	10	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	3,37	5,68	1,75
160	160	65	7,5	10,5	24,0	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	3,56	7,39	1,84
180	180	70	8	11	28,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	3,75	9,55	1,92
200	200	75	8,5	11,5	32,2	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	3,94	11,9	2,01

A 3/3 I-Träger nach DIN 1025 Blatt 1 (Auszug)



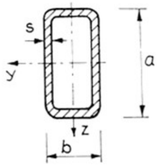
Kurzzeichen I	h mm	b mm	s mm	t mm	A cm^2	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	z cm	I_t cm^4
80	80	42	3,9	5,9	7,57	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	0,869
100	100	50	4,5	6,8	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	1,60
120	120	58	5,1	7,7	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	2,71
140	140	66	5,7	8,6	18,2	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	4,32
160	160	74	6,3	9,5	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	6,57
180	180	82	6,9	10,4	27,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	9,58
200	200	90	7,5	11,3	33,4	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	13,5
220	220	98	8,1	12,2	39,5	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	18,6
240	240	106	8,7	13,1	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	25,0
260	260	113	9,4	14,1	53,3	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	33,5
280	280	119	10,1	15,2	61,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	44,2
300	300	125	10,8	16,2	69,0	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	56,8

A 3/7 Warmgewalzter rundkantiger T-Stahl nach DIN 1024 in hochstegiger Ausführung



Kurzzeichen T	b = h mm	s = t = R_1 mm	R_2 mm	R_3 mm	e_z cm	Querschnitt A cm^2	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^3	W_z cm^3	i_z cm
20	20	3	1,5	1	0,58	1,12	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42
25	25	3,5	2	1	0,73	1,64	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51
30	30	4	2	1	0,85	2,26	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62
35	35	4,5	2,5	1	0,99	2,97	3,10	1,23	1,04	1,57	0,90	0,73
40	40	5	2,5	1	1,12	3,77	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83
45	45	5,5	3	1,5	1,26	4,67	8,13	2,51	1,32	4,01	1,78	0,93
50	50	6	3	1,5	1,39	5,66	12,1	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03
60	60	7	3,5	2	1,66	7,94	23,8	5,48	1,73	12,2	4,07	1,24
70	70	8	4	2	1,94	10,6	44,5	8,79	2,05	22,1	6,32	1,44
80	80	9	4,5	2	2,22	13,6	73,7	12,8	2,33	37,0	9,25	1,65
90	90	10	5	2,5	2,48	17,1	119	18,2	2,64	58,5	13,0	1,85
100	100	11	5,5	3	2,74	20,9	179	24,6	2,92	88,3	17,7	2,05

A 3/8 Warmgefertigte rechteckige Stahl-Hohlprofile nach DIN 59 410 (Auszug)



Nennmaße a x b mm	Wanddicke s mm	Querschnitt A cm^2	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	i_z cm	I_t cm^4	W_t cm^3
50 x 30	2,9	4,23	13,4	5,36	1,78	5,88	3,92	1,18	12,9	7,39
60 x 40	2,9	5,39	26,0	8,67	2,20	13,7	6,83	1,59	28,0	12,3
70 x 40	2,9	5,97	38,1	10,9	2,53	15,7	7,83	1,62	34,9	14,4
80 x 40	2,9	6,55	53,1	13,3	2,85	17,7	8,83	1,64	42,0	16,6
90 x 50	3,2	8,46	89,7	19,9	3,26	35,5	14,2	2,05	79,8	26,0
100 x 50	3,6	10,2	129	25,8	3,56	42,9	17,2	2,05	102	32,2
100 x 60	3,6	10,9	146	29,1	3,66	65,2	21,7	2,45	141	39,1
120 x 60	4	13,5	247	41,4	4,27	82,7	27,6	2,47	199	51,9
140 x 80	4	16,7	438	62,5	5,12	183	45,7	3,31	408	82,6
160 x 90	4,5	21,2	715	89,4	5,81	293	65,1	3,72	672	119
180 x 100	5,6	29,3	1240	137	6,50	496	99,1	4,11	1150	184
200 x 120	6,3	37,7	2010	201	7,30	910	152	4,91	2030	277

Da die Biegespannung eine Normalspannung darstellt, lässt sich die Festigkeitsbedingung für einen Träger mit konstantem Querschnitt direkt angeben.

$$\sigma_b = \frac{|M_b|}{W_b} \leq S_{zul}$$

Der Querschnitt mit dem größten Biegemoment wird als gefährdeter Querschnitt bezeichnet. Stellt man die Festigkeitsbedingung um, erhält man mit dem erforderlichen Widerstandsmoment

$$W_{b\,erf} \geq \frac{|M_b|}{S_{zul}}$$

eine geometrische Größe, die bei vorgegebenem Biegemoment zur **Bemessung** eines Trägers herangezogen werden kann.

Mit $W_b = \pi \cdot d^3/32$ folgt für den erforderlichen Durchmessers eines **Kreisquerschnitts**

$$\frac{\pi \cdot d_{erf}^3}{32} \geq \frac{|M_b|}{S_{zul}} \qquad \Rightarrow \qquad d_{erf} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_b|}{\pi \cdot S_{zul}}}$$

Mit $W_b = b \cdot h^2/6$ folgt für die Querschnittsabmessungen eines **Rechteckprofils**

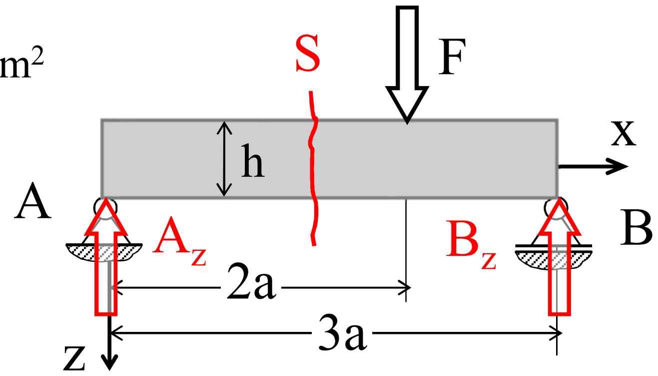
$$h_{erf} \geq \sqrt{\frac{6 \cdot |M_b|}{b \cdot S_{zul}}} \qquad \text{bzw.} \qquad b_{erf} \geq \frac{6 \cdot |M_b|}{h^2 \cdot S_{zul}}$$

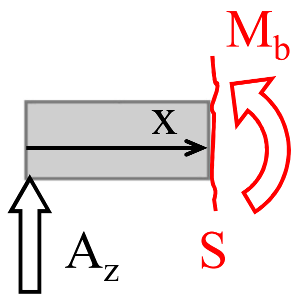
Hierin ist h die Höhe und b die Breite des Rechteckquerschnitts.

Beispiel: Rechteckträger aus dem Stahl S235

Gegeben: $F = 6$ kN, $a = 0{,}1$ m, $b = 20$ mm, $S_{zul} = 113$ N/mm²

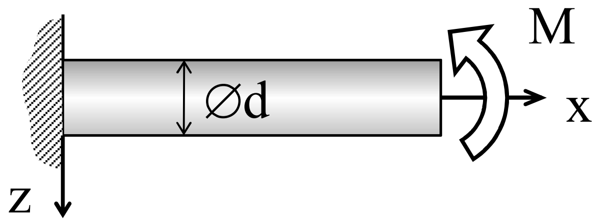
Gesucht: Höhe h und Biegespannung σ_b





…**Fortsetzung:** Dimensionierung

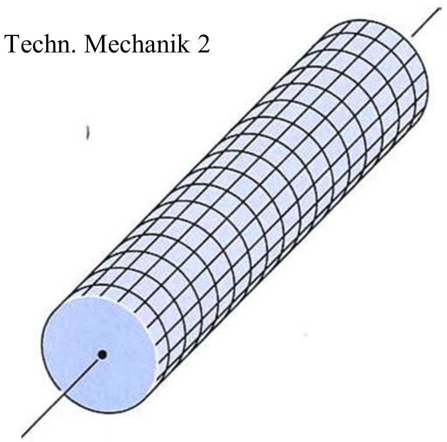
Übung: Biegemomentbelastete Achse
Gegeben: $M = 400$ Nm, $S_{zul} = 160$ N/mm^2
Gesucht: Durchmesser d und Biegespannung σ_b



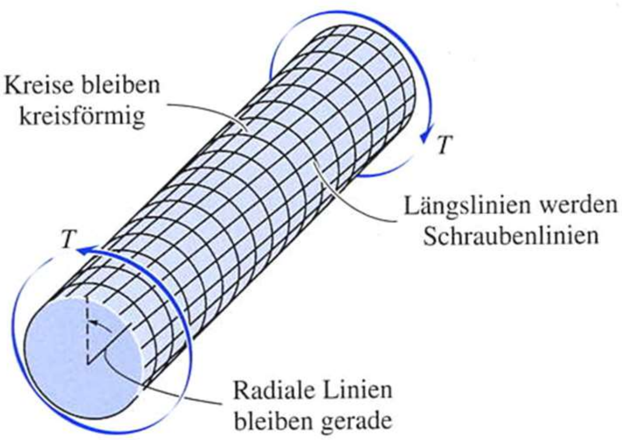
9.2.3 Torsionsbeanspruchung von Wellen

Torsion (Verdrehung) tritt auf, wenn ein Stab (Welle) mit einem Moment belastet wird, das um die Stablängsachse wirkt (Torsionsmoment oder Drehmoment). Kreis- oder Kreisringquerschnitte sind als wichtige technischen Bauteile (Wellen) zur Übertragung großer Drehmomente am besten geeignet.

aus R. Hibbeler: Techn. Mechanik 2



Vor der Deformation

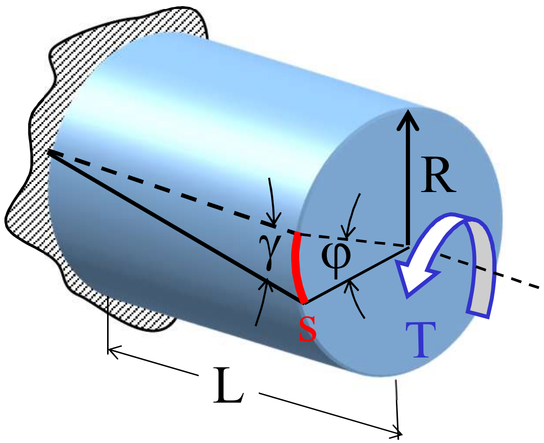


Nach der Deformation

Unter der Wirkung eines Torsionsmomentes verformen sich zur Längsachse parallele Linien auf dem Mantel schraubenförmig, während dazu senkrechte und radiale Linien unverformt bleiben.

Für eine Welle mit dem Radius R und der Länge L gilt daher mit der Bogenlänge s zwischen Drehwinkel φ und Scherwinkel γ der Zusammenhang

$$s = \gamma \cdot L = \varphi \cdot R \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{R}{L} \cdot \varphi$$

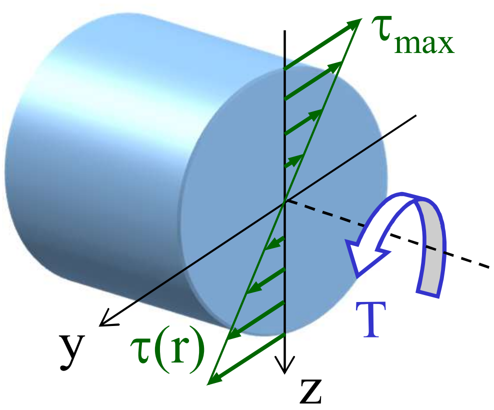


Aus dem Hook´schen Gesetz für Schub $\tau = G \cdot \gamma$ ergibt sich mit dem Schubmodul G die linear veränderliche Schubspannung

$$\tau(r) = G \cdot r \cdot \frac{\varphi}{L}$$

Die Schubspannungen stehen mit dem Torsionsmoment im Gleichgewicht. Es gilt

$$T = \int r \cdot \tau(r)\, dA = \frac{G \cdot \varphi}{L} \int r^2\, dA$$



Das Integral

$$I_p = \int r^2 dA$$

wird als polares Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Für den Drehwinkel erhält man damit

$$\varphi = \frac{L}{G \cdot I_p} \cdot T$$

Einsetzen des Drehwinkels in das Hook'sche Gesetz für Schub liefert

$$\tau(r) = G \cdot r \cdot \frac{\varphi}{L} = \frac{G \cdot r}{L} \cdot \frac{L \cdot T}{G \cdot I_p} = \frac{T}{I_p} \cdot r$$

Die maximale Schubspannung ergibt sich am Rand für r = R. Mit dem polaren Widerstandsmoment $W_p = I_p / R$ folgt die Torsionsschubspannung

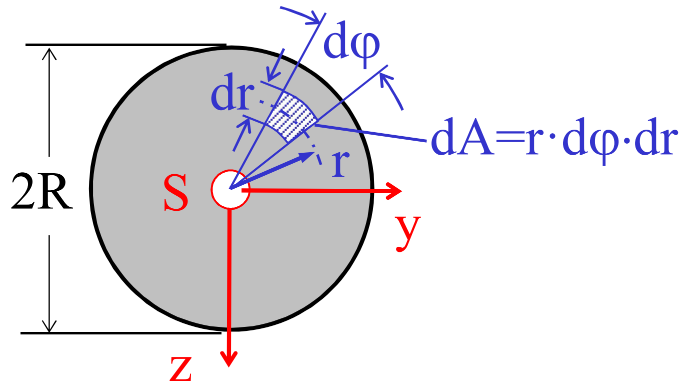
$$\tau_t = \frac{T}{W_p}$$

Aus dem polaren Flächenträgheitsmoment des Kreisquerschnitts $I_p = \pi \cdot d^4/32$ ergibt sich das polare Widerstandsmoment

$$\mathrm{W_p} = \frac{\mathrm{I_p}}{\mathrm{d}/2} = \frac{\pi \cdot \mathrm{d}^3}{16} \overset{!}{=} 2 \cdot \mathrm{W_b}$$

Das polare ist doppelt so groß wie das axiale Widerstandsmoment!

Beispiel: Polares Flächenträgheits- und Widerstandsmoment für Vollkreis



Übung: Polares Flächenträgheits- und Widerstandsmoment für Kreisring

9.2.4 Bemessung von Antriebswellen

Voll- und Hohlwellen werden zur Übertragung der Leistung von Antriebsmaschinen eingesetzt. Die Leistung ist die in einer Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Die von einer Welle übertragene Arbeit ergibt sich aus dem Drehmoment T multipliziert mit dem Drehwinkel φ. Mit dW = T· dφ und der Winkelgeschwindigkeit ω = dφ/dt folgt

$$P = \frac{T \cdot d\varphi}{dt} = T \cdot \omega$$

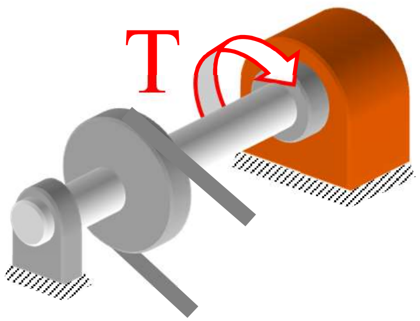
Die Einheit der Leistung wird in Watt angegeben (1 Watt = 1Nm/s = 1kgm^2/s^3).

Wird die Drehzahl f (Frequenz) der Welle angegeben, folgt aus ω = 2π·f

$$P = 2\pi \cdot f \cdot T$$

Die Einheit der Drehzahl wird in Hertz angegeben (1 Hz = 1s^{-1} = 60 min^{-1})

Beispiel: Bemessung einer Antriebswelle



Gegeben: P = 1 MW, f = 60 Hz, t_{zul} = 90 N/mm²

Gesucht: Erforderlicher Durchmesser d

$$T = \frac{P}{2\pi \cdot f} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 60} = 2652 \quad \text{Nm}$$

$$\tau_t = \frac{T}{W_p} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \leq t_{zul} \quad \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot t_{zul}}} \quad = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2652 \cdot 10^3}{\pi \cdot 90}} = 53{,}2\ mm$$

gewählt: d = 55 mm

Übung: Auslegung einer Hohlwelle

Gegeben: Innenradius R_i = 25 mm, Wandstärke s = 5 mm, zul. Spannung t_{zul} = 90 N/mm²,

Gesucht: Max. zul. Torsionsmoment T und übertragbare Leistung P bei f = 1200 min^{-1}

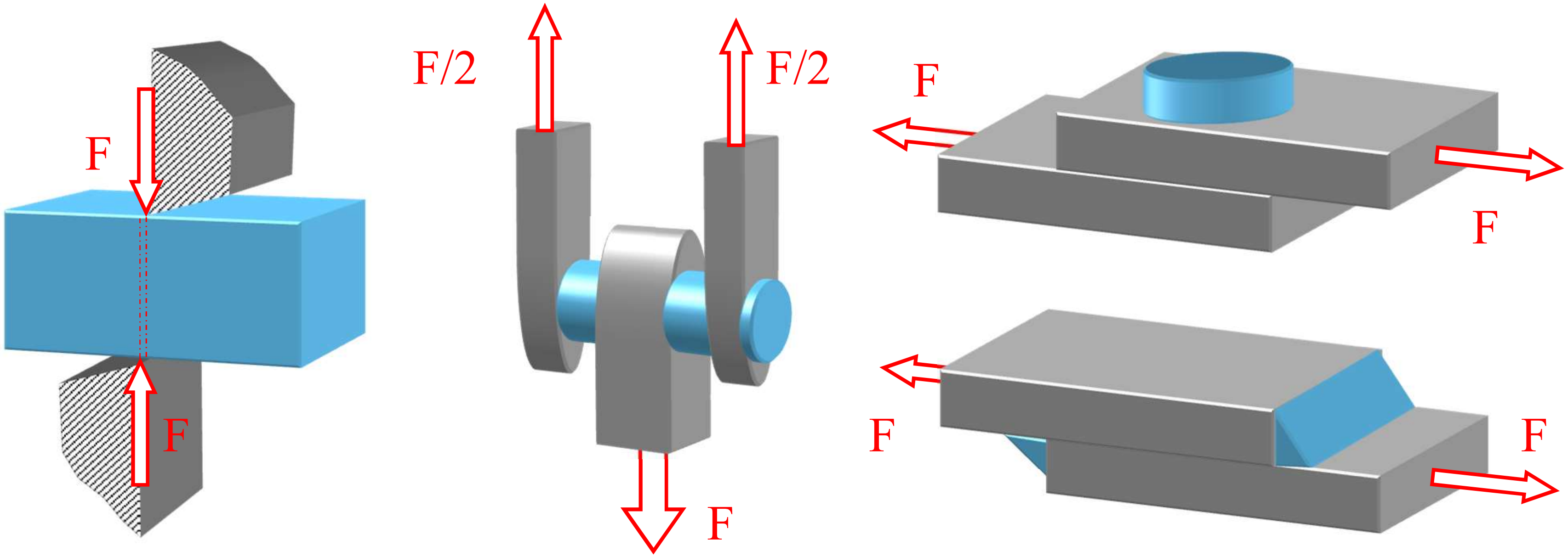
$$W_p = \frac{\pi(R_a^4 - R_i^4)}{2R_a} = \frac{\pi(30^4 - 25^4)}{2 \cdot 30} = 21958 \text{ mm}^3$$

$$T_{zul} = t_{zul} \cdot W_p = 90 \cdot 21958 = 1{,}976 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$P_{zul} = 2\pi \cdot f \cdot T_{zul} = 2\pi \cdot 20 \cdot 1{,}976 = 248 \text{kW}$$

9.2.5 Schub durch Querkräfte

Greifen Kräfte quer zur Längsachse eines Stabes mit dicht nebeneinander liegenden Wirkungslinien an, so treten im dazwischen liegenden Querschnitt Schubspannungen auf, die man auch als Scherspannungen bezeichnet.

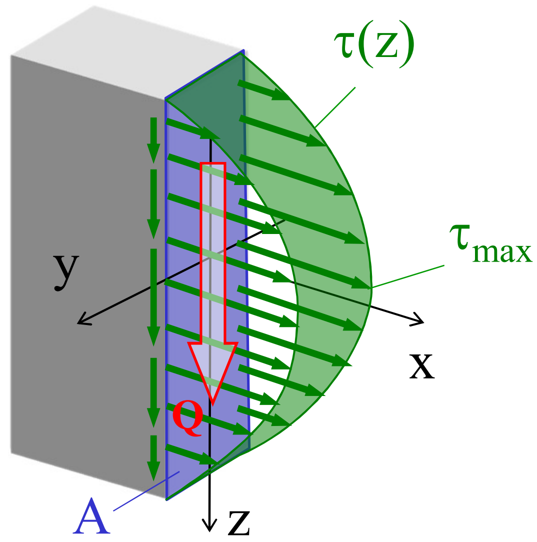


Scherspannungen treten beim Schneiden und Stanzen auf und spielen bei Schrauben-, Niet-, Schweiß- und Klebeverbindungen eine wichtige Rolle.

Zusätzlich treten noch Biegespannungen auf, die jedoch bei gedrungenen Bauteilen mit kleinem Hebelarm und fester Einspannung (Presspassung) vernachlässigt werden können.

Die Schubspannungen sind über dem Querschnitt nicht gleichmäßig verteilt. Sie sind in der Bauteilmitte maximal und fallen zu den Rändern hin parabelförmig ab. Vereinfacht rechnet man aber oftmals mit einer mittleren Abscherspannung

$$\tau_m = \frac{Q}{A}$$



Hierbei ist Q die Querkraft und A die Querschnittsfläche des Trägers

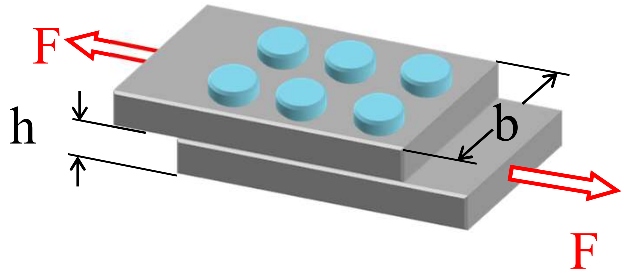
Mit Hilfe der Gestaltänderungsenergiehypothese lässt sich die zulässige Schubspannung angeben. Es gilt näherungsweise

$$t_{zul} \approx \frac{S_{zul}}{\sqrt{3}} = \min\left\{\frac{R_e}{2{,}6}; \frac{R_m}{5{,}2}\right\}$$

Beispiel: Berechnung einer Nietverbindung

Gegeben: F = 10 kN, b = 30 mm, h = 4 mm, n = 6, t_{zul} = 90 N/mm²

Gesucht: Nietdurchmesser d, Normalspannung σ im Blech



Übung: Berechnung einer Schweißverbindung

Gegeben: F = 10 kN, b = 30 mm, h = 4 mm

Gesucht: Schubspannung in der Schweißnaht