

# Zur Entkopplung nichtlinearer Systeme: ein graphentheoretischer Ansatz

T. Wey

Forschungsbericht Nr. 04/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Der vorliegende Bericht setzt sich mit der Problematik der Entkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme auseinander. Besondere Schwerpunkte sind, neben einer Einführung in die Thematik, die Sicherstellung der Regularität von entkoppelnden Rückführungen sowie die Verwendung von graphentheoretischen Verfahren zur Synthese solcher Rückführgesetze. Das hauptsächliche Ziel dieses graphentheoretisch basierten Ansatzes liegt dabei in einer möglichst übersichtlichen und für eine rechnergestützte Analyse geeigneten Lösung.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitende Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Entkoppelbarkeit nichtlinearer Systeme</b>	<b>3</b>
2.1 Entkopplungsmatrix . . . . .	3
2.2 Rechtsinvertierbarkeit . . . . .	4
<b>3 Entkopplung mit dynamischer Rückführung</b>	<b>7</b>
3.1 Struktur im Unendlichen . . . . .	7
3.2 Essentielle Ordnungen . . . . .	10
<b>4 Reguläre Entkoppelbarkeit</b>	<b>12</b>
<b>5 Graphentheoretischer Ansatz</b>	<b>14</b>
5.1 Graphentheoretische Beschreibung nichtlinearer Systeme . . . . .	14
5.2 Reguläre Entkoppelbarkeit . . . . .	16
5.3 Synthese von entkoppelnden Rückführungen . . . . .	20
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>25</b>
<b>7 Literaturverzeichnis</b>	<b>27</b>
<b>A Anhang</b>	<b>30</b>

# Nomenklatur

## Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
LS	Lineares System
NU	Nullstellen im Unendlichen

## Formelzeichen<sup>1</sup>

$\mathbf{A}, \mathbf{a}(\mathbf{x})$	Systemmatrix bzw. -vektor
$a_k$	reelle Koeffizienten
$\mathbf{B}, \mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix
$\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$	$i$ -te Spalte der Eingangsmatrix
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$\mathbf{c}_i^T$	$i$ -te Zeile der Ausgangsmatrix
$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	Jacobi-Matrix $\partial \dot{\mathbf{x}} / \partial \mathbf{x}$
$d\mathbf{u}^{(k)}$	Differential von $\mathbf{u}^{(k)}$
$d\mathbf{x}$	Differential von $\mathbf{x}$
$d\mathbf{y}^{(k)}$	Differential von $\mathbf{y}^{(k)}$
$\mathcal{E}_k$	Vektorräume der Differentiale von $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}$
$\mathbf{E}_l$	Adjazenzmatrix der gerichteten Pfade der Länge $l$
$e_i$	Kante in einem gerichteten Graphen $\mathcal{G}$
$e_{l_{ij}}$	Elemente der Matrix $\mathbf{E}_l$
$\mathbf{F}(s)$	Übertragungsmatrix eines linearen Systems
$f_k(\cdot)$	analytische Funktion
$\mathcal{G}$	gerichteter Graph eines Systems
$g_k(\cdot)$	analytische Funktion
$\mathbf{J}_k$	Jacobi-Matrix
$k \langle \mathbf{y} \rangle$	differentieller Körper aller rationalen Funktionen in den Variablen $\mathbf{y}^{(k)}$ mit Koeffizienten in $k$
$\mathcal{K}$	Körper der rationalen Funktionen in $\{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}\}$ mit meromorphen Koeffizienten in $\mathbf{x}$
$L$	Summe aller Pfadlängen
$l_k$	Länge eines gerichteten Pfades
$m$	Dimension des Eingangsvektors $\mathbf{u}(t)$
$n$	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$
$P(\cdot)$	Polynom in den Argumenten
$p$	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen

<sup>1</sup>Im weiteren Verlauf der Ausarbeitung wird die Zeitabhängigkeit der Größen  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  zum Zweck der Übersichtlichkeit nicht ständig explizit angegeben.

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$R_k$	Rang der Matrix $\mathbf{J}_k$
$T\mathcal{E}_k$	Vektorräume aus Differentialen des Tangentialsystems
$\mathcal{U}_0$	Umgebung um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$
$\mathbf{u}(t)$	Eingangsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$	Eingangsvektor und dessen zeitliche Ableitungen $\{\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots\}$
$u_j$	$j$ -te Komponente von $\mathbf{u}(t)$
$\mathbf{u}^{(k)}$	$k$ -te zeitliche Ableitung des Eingangsvektors $\mathbf{u}(t)$
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_0$	Anfangszustand
$x_k$	$k$ -te Komponente von $\mathbf{x}(t)$
$\mathbf{y}(t)$	Ausgangsvektor
$\bar{\mathbf{y}}$	Ausgangsvektor und dessen zeitliche Ableitungen $\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots\}$
$y_i$	$i$ -te Komponente von $\mathbf{y}(t)$
$\mathbf{y}^{(k)}$	$k$ -te zeitliche Ableitung des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
$\rho^*$	differentieller Rang
$\rho_T^*$	Rang des Tangentialsystems
$\Sigma$	System
$\Sigma_e$	entkoppeltes System
$\Sigma_T$	Tangentialsystem

### Sonstige Zeichen

$\forall$	für alle
$\in$	Element von
$/$	Körpererweiterung
$(\cdot)^T$	Transponieren einer Matrix
$ _*$	alle Elemente ungleich Null durch Platzhalter $*_k$ ersetzen
$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	Jacobi-Matrix zu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$A\langle x \rangle$	Körper der rationalen Funktionen in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$ mit Koeffizienten in $A$
diff. trg	differentieller Transzendenzgrad einer Körpererweiterung
$\dim \mathcal{E}$	Dimension des Vektorraums $\mathcal{E}$
min	das minimale Element in einer Menge
max	das maximale Element in einer Menge
$\min_i$	das minimale $i$ , für das eine Bedingung erfüllt ist
Rang $\mathbf{P}(s)$	Rang der Matrix $\mathbf{P}(s)$
$\text{span} \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}$	der durch die angegebenen Vektoren aufgespannte Vektorraum

# 1 Einleitende Übersicht

Der vorliegende Forschungsbericht befaßt sich mit der Ein-/Ausgangsentkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme. Hierbei handelt es sich um die Problematik, ein Mehrgrößensystem derart mit einer dynamischen Zustandsrückführung zu versehen, daß jeder Systemeingang genau nur auf einen Ausgang wirkt. Das entkoppelte System entspricht dann einer Parallelschaltung mehrerer Eingrößensysteme. Die Betrachtungen beschränken sich auf die Klasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS) und gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen.

Diese Fragestellung ist in der Literatur mittlerweile umfangreich diskutiert worden (z. B. Singh 1980, Commault u. a. 1986, Descusse und Moog 1987, Glumineau und Moog 1989, Schwarz 1991, Cao und Zheng 1992, Huijberts u. a. 1992). Dabei zeigt sich, daß nur für die Klasse der invertierbaren Systeme überhaupt eine Entkopplung möglich ist. Zum Auffinden einer geeigneten Rückführung werden in der Regel Erweiterungs- oder Strukturalgorithmen verwendet. Sie führen zu Lösungen, die sich in der Regel aus der Vorschaltung von einem oder mehreren Integratoren vor die Eingänge des Systems und anschließender statischer Zustandsrückführung zusammensetzen.

Auf diese Weise bestimmte Rückführsignale können unter Umständen, zumindest für ausgewählte Punkte im Zustandsraum, einen unendlich großen Wert annehmen. Um diese Singularitäten von vornherein auszuschließen, beinhalten manche der Algorithmen deshalb sogenannte Regularitätsbedingungen. Sie sind allerdings dermaßen restriktiv, daß solcherart ergänzte Algorithmen nicht für alle invertierbaren Systeme zu einem Ergebnis führen (Respondek 1993).

Um nun diese Restriktionen zu umgehen, wird im folgenden ein gänzlich anderer Ansatz zur Gewährleistung der Regularität einer Entkopplung gewählt. Er orientiert sich im wesentlichen an der Struktur im Unendlichen des Systems und bietet den Vorteil von wesentlich schwächeren Anforderungen an ein System als bei entsprechenden Erweiterungsalgorithmen. Zudem besteht die Möglichkeit, die Regularitätsanalyse mit Hilfe graphentheoretischer Methoden durchzuführen. Denn aufbauend auf bisherige Forschungsergebnisse (Wey 1993) kann die Struktur im Unendlichen anhand eines einem System zugeordneten Graphen beschrieben werden. Darüber hinaus ist auch die Synthese von entkoppelnden Zustandsrückführungen mit Hilfe des Graphen möglich.

Im einzelnen gliedert sich der Bericht wie folgt:

In Abschnitt 2 werden die wesentlichen Grundlagen, die zum Verständnis der Entkopplungsproblematik von Interesse sind, kurz angesprochen. Vor allem die Differenzierung zwischen statischer und dynamischer Entkopplung wird diskutiert. Außerdem ist die Eigenschaft der Invertierbarkeit von nichtlinearen Systemen ein Thema. Anschließend geht Abschnitt 3 gezielt auf die Entkopplung mit dynamischer Rückführung ein. Hierzu wird die Struktur im Unendlichen und das Kriterium der essentiellen Ordnungen eingeführt.

---

Abschnitt 4 zeigt dann Möglichkeiten auf, mit denen Singularitäten bei der Auslegung einer entkoppelnden Rückführung vermieden werden können. Ein wichtiges Hilfsmittel hierfür stellt die Analyse des linearisierten Zustandsmodells eines ALS, im weiteren auch als Tangentialsystem bezeichnet, dar. Die zuvor diskutierten Konzepte werden dann in Abschnitt 5 derart aufbereitet, daß sie mit Hilfe graphentheoretischer Verfahren nachvollziehbar sind. Neben der Formulierung notwendiger graphentheoretischer Kriterien für eine Entkoppelbarkeit kann insbesondere ein neues am Systemgraphen orientiertes Syntheseverfahren zur Auslegung einer regulären entkoppelnden Rückführung entwickelt werden. Hierbei bestätigt sich die bessere Übersichtlichkeit dieser Vorgehensweise im Vergleich zu klassischen algebraischen Verfahren. Zusammenfassung und Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten in diesem Bereich schließen den Bericht ab.

## 2 Entkoppelbarkeit nichtlinearer Systeme

Ein nichtlineares Mehrgrößensystem wird als *entkoppelt* bezeichnet, wenn, eventuell nach einer Umnummerierung der Ausgänge, jeder Ausgang  $y_i(t)$  nur durch den korrespondierenden Eingang  $u_i(t)$  beeinflusst wird. In diesem Fall gilt

$$\bar{y}_i = f(u_i) \quad \text{und} \quad \bar{y}_i \neq f(u_j) \quad ; \quad \forall i \neq j; \quad \bar{y}_i = \{y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, \dots\} \quad . \quad (2.1)$$

Die Problemstellung der *Ein-/Ausgangsentkopplung* besteht darin, für ein gegebenes nicht entkoppeltes System eine statische Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (2.2)$$

bzw. eine dynamische Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.3)$$

zu finden, so daß der geschlossene Regelkreis mit der neuen Eingangsgröße  $\mathbf{v}$  entkoppelt ist. Inwieweit ein System überhaupt entkoppelbar ist, kann mittels verschiedener Verfahren überprüft werden. In der weiteren Ausarbeitung wird ausschließlich auf die Entkoppelbarkeit von ALS in skalare Teilsysteme eingegangen. Folglich ist eine Einschränkung auf *quadratische* Systeme, d. h. auf Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgangsgrößen, notwendig:

$$\sum_{ALS} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n ; \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m ; \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für diese Klasse von Systemen bieten sich verschiedene Kriterien zur Überprüfung der Entkoppelbarkeit an, die im folgenden einander gegenübergestellt werden sollen.

### 2.1 Entkopplungsmatrix

Die Entkopplungsmatrix eines ALS wird mit Hilfe von mathematischen Werkzeugen aus dem Bereich der Differentialgeometrie, den *Lie-Operatoren*, definiert. Eng verknüpft mit der Definition dieser Matrix ist der Begriff des *Differenzengrades*:

**Definition 2.1** (Schwarz 1991)

Ein Mehrgrößensystem der Form (2.4) hat den (Vektor-) Differenzengrad  $\mathbf{d}$  für alle  $\mathbf{x}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\} \quad (2.5)$$

mit<sup>2</sup>

$$d_i = \min\{r \mid L_{\mathbf{B}} L_{\mathbf{a}}^{r-1} \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad . \quad (2.6)$$

□

---

<sup>2</sup> $\mathbf{c}_i^T$  in Gl. (2.6) bezeichnet die  $i$ -te Zeile der Matrix  $\mathbf{C}$ .

Anschaulich bedeutet (2.6), daß  $d_i$  gerade der Anzahl der zeitlichen Differentiationen von  $y_i$  entspricht, bis mindestens eine Eingangsgröße  $u_j$  explizit darin enthalten ist:

$$\begin{aligned} y_i^{(k)}(t) &= \frac{\partial^k y_i(t)}{\partial t^k} \neq f(\mathbf{u}(t)) \quad ; \quad k = 1, \dots, d_i - 1 \\ y_i^{(d_i)}(t) &= \frac{\partial^{d_i} y_i(t)}{\partial t^{d_i}} = f(\mathbf{u}(t)) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Faßt man die Zeilendifferenzengrade  $d_i$  nun zusammen und verwendet die Spalten  $\mathbf{b}_j$  der Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , so ergibt sich die Entkopplungsmatrix  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  zu (Isidori 1989, Schwarz 1991)

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} & \dots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} & \dots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} & \dots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix} . \quad (2.8)$$

Diese Matrix ist für die Entkoppelbarkeit eines ALS von ausschlaggebender Bedeutung:

**Satz 2.1** (Schwarz 1991)

Das Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem für quadratische ALS in einer Umgebung  $\mathcal{U}_0$  um einen Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_0$  kann dann, und nur dann, mit Hilfe einer regulären statischen Zustandsrückführung (2.2) gelöst werden, wenn die Matrix  $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0)$  *nichtsingulär* ist und das System damit einen Vektordifferenzengrad  $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_m\}$  mit  $d_i \neq 0$  für den betrachteten Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_0$  hat.  $\square$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so lassen sich die Koeffizienten der gesuchten Zustandsrückführung sehr einfach direkt mit der Entkopplungsmatrix bestimmen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^{d_1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \\ L_{\mathbf{a}}^{d_2} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{d_m} \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}(\mathbf{x}) &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Das resultierende System mit der neuen Eingangsgröße  $\mathbf{v}(t)$  genügt dann den in Gl. (2.1) genannten Bedingungen für entkoppelte Systeme.

## 2.2 Rechtsinvertierbarkeit

Eine weitere Möglichkeit zur Charakterisierung der Entkoppelbarkeit nichtlinearer Systeme ist die Verwendung des Konzepts der *Invertierbarkeit*. Für lineare Systeme (LS) läßt sich dieser Begriff anschaulich erklären:

Ein System mit der  $(p \times m)$ -Übertragungsmatrix  $\mathbf{F}(s)$  wird als *linksinvertierbar* bezeichnet, wenn eine rationale  $(m \times p)$ -Matrix  $\mathbf{L}(s)$  derart existiert, daß

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



gilt. Von *Rechtsinvertierbarkeit* spricht man demgegenüber, wenn es eine rationale  $(m \times p)$ -Matrix  $\mathbf{R}(s)$  gibt, die die Gleichung

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{R}(s) = \mathbf{I}_p \quad (2.11)$$

erfüllt.

Um das Konzept der Invertierbarkeit auf nichtlineare Systeme zu erweitern, ist die Anwendung spezieller mathematischer Verfahren notwendig. Zu nennen sind in diesem Zusammenhang die *Differentialgeometrie* (Isidori 1989, Schwarz 1991) und die *Differentialalgebra* (Fliess 1990a, Wey 1992, Fliess und Glad 1993).

Die Differentialalgebra erweist sich als besonders geeignet, da mit ihr die Definition der Invertierbarkeit nichtlinearer Systeme einfach und elegant möglich ist und außerdem eine weitgehende Konsistenz zur Theorie linearer Regelungssysteme erhalten bleibt. Denn der Rang eines ALS kann, in Analogie zum Rang der Transfermatrix  $\mathbf{F}(s)$  für LS, als Kriterium für die Invertierbarkeit herangezogen werden:

**Definition 2.2** (Fliess 1986)

Ein System ist dann, und nur dann, (differentiell) linksinvertierbar (bzw. rechtsinvertierbar), wenn sein differentieller Rang  $\rho^*$  mit<sup>3</sup>

$$\rho^* = \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k \quad (2.12)$$

gleich der Anzahl von Eingängen (bzw. Ausgängen) ist. □

Die Linksinvertierbarkeit ist Voraussetzung dafür, daß die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  eines Systems aus der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(t)$  berechnet werden kann. Die Rechtsinvertierbarkeit kann dagegen direkt mit dem Begriff der Entkoppelbarkeit verknüpft werden. Es gilt:

**Definition 2.3** (Fliess 1987)

Ein System kann dann, und nur dann, durch Zustandsrückführung entkoppelt werden, wenn es rechtsinvertierbar ist. □

**Anmerkung:**

Satz 2.1 und Definition 2.3 unterscheiden sich in wesentlichen Punkten. Zunächst ist die differentialalgebraische Aussage zur Entkoppelbarkeit global gültig. Im Gegensatz hierzu kann die Nichtsingularität der Entkopplungsmatrix im allgemeinen als vom betrachteten Arbeitspunkt abhängig angesehen werden. Außerdem handelt es sich bei der Aussage in Definition 2.3 um eine umfassendere Form des Entkopplungsproblems. Denn ein

---

<sup>3</sup>**diff. Trg** bezeichnet den differentiellen Transzendenzgrad einer Körpererweiterung. Im vorliegenden Fall entspricht  $\rho^*$  der Anzahl von Elementen der Menge  $\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots\}$ , die kein Polynom  $P(\cdot) = 0$  mit Koeffizienten in  $k$  erfüllen (vgl. Fliess und Glad 1993, Wey 1992).

differentiell rechtsinvertierbares System muß nicht unbedingt durch eine statische Zustandsrückführung entkoppelbar sein, vielmehr ist auch der Einsatz einer *dynamischen* Zustandsrückführung der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad ; \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^q; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{2.13}$$

zulässig.

### 3 Entkopplung mit dynamischer Rückführung

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse läßt sich zusammenfassend sagen, daß das Entkopplungsproblem für rechtsinvertierbare Systeme grundsätzlich lösbar ist. Allerdings ist die Synthese einer geeigneten Rückführung zumindest für den dynamischen Fall nicht trivial. Bisher wurden zahlreiche Verfahren zur konkreten Bestimmung einer solchen entkoppelnden Zustandsrückführung entwickelt (z. B. Singh 1980, Descusse und Moog 1987, Glumineau und Moog 1989, Di Benedetto u. a. 1989, Cao und Zheng 1992). Diesen im allgemeinen mit *Erweiterungs-Algorithmen* oder *Struktur-Algorithmen* bezeichneten Verfahren ist gemein, daß zunächst Integratoren vor den Systemeingängen angefügt werden, damit anschließend eine statische Zustandsrückführung die Entkopplung bewirken kann. Allerdings führen die Berechnungsvorschriften nicht für alle rechtsinvertierbaren ALS zu einem Ergebnis (Respondek 1993, Martin 1993).

Um unabhängig von Erweiterungs-Algorithmen die Anzahl sowie geeignete Position zusätzlicher Integratoren zu ermitteln, bietet sich die Analyse der *essentiellen Ordnungen* eines ALS an. Bei diesem Konzept wird von der Struktur eines Systems direkt auf die zur Entkopplung notwendige dynamische Erweiterung geschlossen. Zunächst muß die *Struktur im Unendlichen* eines nichtlinearen Systems erläutert werden.

#### 3.1 Struktur im Unendlichen

Für ALS der Form (2.4) wird im weiteren angenommen, daß deren Eingangsgrößen  $n$ -mal stetig differenzierbar sind. Dann gilt die folgende Taylorreihenentwicklung

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_j^{(k)} \frac{(t-t_0)^k}{k!} + R_{n-1}(t-t_0) \quad ; \quad u_j^{(0)} = u_j(t_0) \quad , \quad (3.1)$$

so daß die Elemente der Menge  $\{\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}\}$  voneinander unabhängige Variablen darstellen.

Die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgröße eines Systems ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &&= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) &&= \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \\ &\vdots && \\ \mathbf{y}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) &&= \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{u}^{(i+1)} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Im Falle von LS ist die Struktur im Unendlichen eng mit dem Begriff der *Toeplitz-Matrizen* verknüpft (Pugh u. a. 1989, Svaricek 1993). Das nichtlineare Äquivalent der Toeplitz-Matrix ist die aus den zeitlichen Ableitungen von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  aufgebaute Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) &= \frac{\partial(\dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})}{\partial(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)})} \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad ; \quad \mathbf{J}_0 = \mathbf{0} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} & \dots & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(k-1)}} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\mathbf{J}_k$  kann direkt zur Bestimmung der nichtlinearen Struktur im Unendlichen verwendet werden. Der Zusammenhang wird deutlich, wenn man die algebraische Definition der Nullstellen im Unendlichen (NU) betrachtet:

Es wird ein Körper  $\mathcal{K}$  definiert, der aus rationalen Funktionen in  $\{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}\}$  mit meromorphen Koeffizienten in  $\mathbf{x}$  besteht (vgl. Di Benedetto u. a. 1989, Wey 1993). Mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet man einen Vektorraum über  $\mathcal{K}$ , der von den Differentialen  $\{d\mathbf{x}, d\mathbf{u}, \dots, d\mathbf{u}^{(n-1)}\}$  aufgespannt wird. Die Differentiale  $dy_i^{(k)}$  der Ausgangsgröße  $y_i(t)$ , die allgemein durch

$$d\eta(\mathbf{v}) = \sum_j \frac{\partial \eta(\mathbf{v})}{\partial v_j} dv_j \quad (3.4)$$

berechnet werden, entsprechen dann gerade der multiplikativen Verknüpfung von den Elementen der Matrix  $\mathbf{J}_k$  mit den Basisvektoren von  $\mathcal{E}$ :

$$dy_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} & \dots & \frac{\partial y^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(n-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ \vdots \\ d\mathbf{u}^{(n-1)} \end{bmatrix} + \frac{\partial y^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad . \quad (3.5)$$

Der Differenzegrad eines ALS, der in Gl. (2.6) auf differentialgeometrische Weise definiert wurde, kann mit der hier verwendeten Nomenklatur differentialalgebraisch wiedergegeben werden:

$$d_i = \min \{k > 0 \mid dy_i^{(k)} \notin \text{span} \{d\mathbf{x}\}\} \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.6)$$

In einem nächsten Schritt führt man eine sukzessive Kette von Vektorräumen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}\} \\ \mathcal{E}_1 &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}\} \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_n &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ein. Diese stellen Unterräume von  $\mathcal{E}$  dar:

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{d\mathbf{x}, d\bar{\mathbf{u}}\}; \quad \bar{\mathbf{u}} := \{\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots\} \quad . \quad (3.8)$$

Die Zeilen von  $\mathbf{J}_k$  charakterisieren bis auf die  $d\mathbf{x}$  die aufspannenden Vektoren von  $\mathcal{E}_k$ . Aus diesem Grund stimmt der Rang von  $\mathbf{J}_k$  bis auf eine additive Komponente mit der Dimension von  $\mathcal{E}_k$  überein (Di Benedetto u. a. 1989):

$$\text{rang } \mathbf{J}_k = \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_0 = \dim \mathcal{E}_k - n \quad . \quad (3.9)$$

Ein grundlegendes Resultat bezüglich der Dimensionen dieser Vektorräume sind die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0 : \quad \dim \mathcal{E}_{k+1} - \dim \mathcal{E}_k &\geq \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_{k-1} \\ \forall k \geq n : \quad \dim \mathcal{E}_{k+1} - \dim \mathcal{E}_k &= \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1} \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Darauf aufbauend erhält man die Definition der Struktur im Unendlichen:

**Definition 3.1** (Martin 1993)

$\sigma_k := \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_{k-1} \geq 0$  ist die Anzahl der Nullstellen im Unendlichen der Ordnungen kleiner oder gleich  $k$ . Die Gesamtanzahl der Nullstellen im Unendlichen ist  $\sigma_n$ . Die Struktur im Unendlichen entspricht der Menge  $\{n'_1, \dots, n'_{\sigma_n}\}$  von Indizes  $k$ , für die  $\sigma_k - \sigma_{k-1} \neq 0$  ist, jeder Index wird  $\sigma_k - \sigma_{k-1}$  mal wiederholt. Die Struktur im Unendlichen gibt folglich die Ordnungen der Nullstellen im Unendlichen wieder.  $\square$

Diese Definition ist konsistent mit der ursprünglich von Moog (1988) genannten. Erwähnenswert ist die Tatsache, daß es sich bei den Vektorräumen  $\mathcal{E}_k$  um gewöhnliche, nicht-differentielle Vektorräume handelt.

Mit den in Gl. (3.7) festgelegten Vektorräumen kann die differentialalgebraische Definition 2.2 der Invertierbarkeit für die hier betrachteten ALS in eine mit klassischen mathematischen Hilfsmitteln beschreibbare Definition überführt werden. Weil es sich bei den Differentialen  $d\mathbf{y}^{(k)}$  um *Kähler-Differentiale* (Johnson 1969) handelt, entspricht die Anzahl  $\sigma_n$  der NU genau der Anzahl von unabhängigen Ausgangsgrößen. Aus diesem Grund stimmt auch die Gesamtanzahl der NU gerade mit dem differentiellen Rang gemäß Definition 2.2 überein:

$$\sigma_n = \rho^* \quad . \quad (3.11)$$

Daher gilt:

**Definition 3.2** (Di Benedetto u. a. 1989)

Ein System ist dann und nur dann (differentiell) rechtsinvertierbar, wenn die Gesamtanzahl

$$\sigma_n = \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1} = \text{rang } \mathbf{J}_n - \text{rang } \mathbf{J}_{n-1} \quad (3.12)$$

der Nullstellen im Unendlichen gleich der Anzahl  $m$  von Ausgängen ist.  $\square$

## 3.2 Essentielle Ordnungen

Cremer (1971) hat bereits Anfang der siebziger Jahre erkannt, daß für die Theorie linearer Regelungssysteme der Begriff der *rangbestimmenden* Vektoren einer Matrix von Bedeutung ist. Dieses Kriterium kommt dann zum Tragen, wenn singuläre Matrizen, z. B. mit mehr Zeilen als Spalten, betrachtet werden. Ein rangbestimmender Spalten- oder Zeilenvektor einer solchen Matrix hat die Eigenschaft, daß er von allen anderen Spalten- bzw. Zeilenvektoren linear unabhängig ist. Folglich verringert sich der Rang der Matrix, sobald eine rangbestimmende Zeile, im folgenden auch als *essentielle Zeile* bezeichnet, gestrichen wird. Im Gegensatz dazu tritt keine Änderung des Ranges auf, wenn eine nicht essentielle Zeile entfernt wird.

Die Zeilen in  $\mathbf{J}_k$  entsprechen, wie schon erwähnt, den aufspannenden Vektoren der Räume  $\mathcal{E}_k$ . Das Konzept der *essentiellen Ordnungen* sucht nun nach den Matrizenzeilen, die für den Rang von  $\mathbf{J}_k$  und damit für die Dimensionen der  $\mathcal{E}_k$  bestimmend sind:

**Definition 3.3** (Glumineau und Moog 1989)

Die essentielle Ordnung  $n_{ie}$  einer Ausgangsgröße  $y_i$  des Systems  $\Sigma$  ist definiert als

$$n_{ie} = \min \{k \geq 1 \mid dy_i^{(k)} \notin \text{span}_{\mathcal{K}}\{d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, \dots, d\mathbf{y}^{(k-1)}, dy_{j \neq i}^{(k)}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}\}\} \quad . \quad (3.13)$$

Wenn dieses  $k$  nicht existiert, so gilt  $n_{ie} = \infty$ . □

$n_{ie}$  entspricht nach dieser Definition dem kleinsten  $k$ , für das eine Matrizenzeile

$$\mathbf{y}_i^k = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} & \dots & \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(n-1)}} \end{array} \right] \quad (3.14)$$

relevant für den Rang der Matrix  $\mathbf{J}_n$  ist.

Mit Hilfe der essentiellen Ordnungen läßt sich eine einfach zu überprüfende Bedingung für die Entkoppelbarkeit eines ALS angeben:

**Satz 3.1** (Glumineau und Moog 1989)

Wenn eine statische oder dynamische Zustandsrückführung existiert, die ein System  $\Sigma$  nach Gl. (2.4) entkoppelt, so gilt

$$d_i(\Sigma_e) \geq n_{ie}(\Sigma) ; \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.15)$$

Hierbei bezeichnet  $\Sigma_e$  das entkoppelte System.

Außerdem existiert im Falle einer dynamischen Zustandsrückführung ein erweitertes entkoppeltes System  $\Sigma'_e$ , so daß die Gleichung

$$d_i(\Sigma'_e) = n_{ie}(\Sigma) ; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16)$$

Gültigkeit hat. □

Für ein entkoppeltes System stimmen die durch den Differenzengrad festgelegten Ordnungen  $d_i$  mit den Ordnungen  $n'_i$  der NU überein. Satz 3.2 liefert daher die Aussage, daß bei Verwendung einer dynamischen Rückführung ein rechtsinvertierbares System immer so entkoppelt werden kann, daß  $\Sigma_e$  eine Struktur im Unendlichen aufweist, deren Ordnungen mit den essentiellen Ordnungen übereinstimmt.

Ein weiteres für die Auslegung von entkoppelnden dynamischen Rückführungen wichtiges Kriterium läßt sich aus diesem Satz ableiten:

**Satz 3.2** (Glumineau und Moog 1989)

Die drei Mengen  $\{d_i\}$ ,  $\{n_{ie}\}$  und  $\{n'_i\}$  sind dann und nur dann gleich, wenn das zugehörige System  $\Sigma$  mit einer regulären statischen Zustandsrückführung entkoppelt werden kann.  $\square$

Zur Synthese einer dynamischen Zustandsrückführung, die ein ALS gemäß Satz 3.2 entkoppelt, läßt sich daher dessen Struktur, gekennzeichnet durch die Nullstellen im Unendlichen, verwenden. Und zwar kann durch Vergleich der Mengen  $\{n_{ie}\}$  und  $\{n'_i\}$  festgestellt werden, welche Ordnung

$$n_{min} = \sum_{i=1}^m n_{ie} - \sum_{k=1}^m n'_k \quad (3.17)$$

die Rückführung aufweisen muß (Huijberts u. a. 1992). Stimmen die Ordnungen der Struktur im Unendlichen und die essentiellen Ordnungen dann aufgrund der dynamischen Erweiterung überein, kann anschließend eine statische Rückführung die Entkopplung bewirken.

Im Gegensatz zu den hier betrachteten quadratischen ALS ist für allgemeine nichtlineare Mehrgrößensysteme Satz 3.2 nicht ohne weiteres gültig. Denn es existieren durchaus rechteckige Systeme, d. h. Systeme mit einer ungleichen Anzahl von Ein- und Ausgängen, die trotz nicht übereinstimmender Mengen  $\{n_{ie}\}$  und  $\{n'_i\}$  durch eine rein statische Rückführung entkoppelbar sind (vgl. Herrera und Lafay 1993).

## 4 Reguläre Entkoppelbarkeit

Bei der Auslegung von dynamischen Entkopplungen für ALS wurde die *Regularität* einer Zustandsrückführung bisher nicht angesprochen. Aufgrund der bisherigen globalen Betrachtungsweise ist das Auftreten von Singularitäten nicht auszuschliessen (Di Benedetto und Grizzle 1990, Martin 1993, Respondek 1993), auch die Verwendung von essentiellen Ordnungen zur Analyse und Synthese des Entkopplungsproblems führt lediglich im statischen Fall zu regulären Zustandsrückführungen. Um auch für eine dynamische Entkopplung die Regularität der Lösung gewährleisten zu können, sind zusätzliche Überlegungen notwendig. Diese führen, wie im Falle einer differentialgeometrischen Systemanalyse, zu Betrachtungen, die nur innerhalb der Umgebung um einen Arbeitspunkt gültig sein können.

Zunächst wird das um einen Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  linearisierte Zustandsmodell eines ALS eingeführt. Im weiteren wird dieses auch als das *lineare Tangentialsystem*  $\Sigma_T$  zu einem ALS  $\Sigma$  bezeichnet (Fliess 1990b):

$$\begin{aligned} \Sigma_T \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} + \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die zugehörigen Vektorräume  $T\mathcal{E}_k$  des Tangentialsystems werden nach Gl. (3.7) bestimmt. Da es sich um ein lineares System handelt, können die  $T\mathcal{E}_k$  sowohl über dem Körper  $\mathcal{K}$  als auch über  $\mathbb{R}$  generiert werden. Denn die aufspannenden Vektoren sind für LS konstant.

Die Dimensionen der im letzten Abschnitt eingeführten Vektorräume  $\mathcal{E}_k$  beinhalten generische Informationen. Diese bilden eine obere Abschätzung zu den Dimensionen an stationären Arbeitspunkten<sup>4</sup> (Martin 1993)

$$\dim \mathcal{E}_k(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}_0) \leq \dim \mathcal{E}_k ; \quad \forall k \quad . \quad (4.2)$$

Von wesentlichem Interesse ist die Tatsache, daß sich die Dimension eines Vektorraums  $\mathcal{E}_k$  an einem Arbeitspunkt anhand des korrespondierenden Tangentialsystems zu

$$\dim T\mathcal{E}_k = \dim \mathcal{E}_k(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}_0) \quad (4.3)$$

ermitteln läßt. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs kann die Singularität bzw. Regularität eines ALS und damit auch sofort die reguläre Entkoppelbarkeit charakterisiert werden:

**Definition 4.1** (Martin 1993)

Ein System  $\Sigma$  wird dann als *regulär* in einer Umgebung  $\mathcal{U}_0$  um einen Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  bezeichnet, wenn ab einem  $k_0$  für die Vektorraumdimensionen des Tangentialsystems  $\Sigma_T$

$$\dim T\mathcal{E}_k = \dim \mathcal{E}_k \quad ; \quad \forall k \geq k_0 \quad (4.4)$$

---

<sup>4</sup>Für die Menge  $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots)$  gilt an einem Arbeitspunkt  $\bar{\mathbf{u}}_0 = (\mathbf{u}_0, 0, \dots, 0)$ .



gilt. *Regulär invertierbar* wird ein System dann genannt, wenn es sowohl regulär als auch invertierbar ist.

Jedes regulär invertierbare System ist *regulär entkoppelbar*.  $\square$

Anschaulich steht hinter dieser Definition, daß ein ALS dann an einem Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  regulär entkoppelt werden kann, wenn  $\dim \mathcal{E}_k(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})$  in einer Umgebung  $\mathcal{U}_0$  um diesen Punkt konstant bleibt. Aus Sicht einer rechnergestützten Analyse dieses Kriteriums ist der folgende Satz von Interesse, der sich unmittelbar aus Gl. (3.10) ableiten läßt:

**Satz 4.1** (Martin 1993)

Ein System  $\Sigma$  ist dann und nur dann regulär in  $\mathcal{U}_0$ , wenn gilt

$$\dim T\mathcal{E}_n = \dim \mathcal{E}_n \quad . \quad (4.5)$$

Damit ist sichergestellt, daß nach maximal  $n$  Berechnungsschritten festgestellt werden kann, ob ein System regulär ist oder nicht.

Eine weitere Charakterisierung eines regulären Systems läßt sich in Abhängigkeit der NU formulieren:

**Satz 4.2** (Martin 1993)

Ein System  $\Sigma$  ist dann und nur dann regulär in  $\mathcal{U}_0$ , wenn es die gleiche Gesamtanzahl von NU und denselben *Defekt* wie das zugehörige Tangentialsystem  $\Sigma_T$  aufweist. Der Defekt

$$\delta = n - \sum_{j=1}^{\sigma_n} n'_j \quad . \quad (4.6)$$

geht direkt aus den Ordnungen der NU hervor.  $\square$

Dieser Zusammenhang bietet eine geeignete Basis für eine *qualitative* Untersuchung des Entkopplungsproblems. Durch solch einen Ansatz, der z. B. unter Zuhilfenahme der Graphentheorie erfolgen kann, sind bestimmte Systemstrukturen auffindbar, die unabhängig von Systemparametern immer regulär entkoppelt werden können. Hierauf wird in Abschnitt 5 näher eingegangen.

## 5 Graphentheoretischer Ansatz

Die im vorherigen Abschnitt diskutierten Kriterien zur Beurteilung der Entkoppelbarkeit eines ALS und die daraus resultierenden Möglichkeiten zur Synthese von entkoppelnden Zustandsrückführungen können mit Hilfe graphentheoretischer Verfahren gut analysiert werden. Hierzu wird einem ALS zunächst ein Graph  $\mathcal{G}$  zugeordnet.

### 5.1 Graphentheoretische Beschreibung nichtlinearer Systeme

Mit Hilfe eines *graphentheoretischen Ansatzes* kann die Struktur eines nichtlinearen Systems sehr übersichtlich wiedergegeben werden. Dazu ist einem ALS ein *gerichteter Graph*  $\mathcal{G}$  zuzuordnen, der nach den folgenden Gesichtspunkten konstruiert wird:

Der *gerichtete Graph*  $\mathcal{G}$  eines ALS gemäß Gl. (2.4) mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  besteht aus  $m$  Eingangsknoten  $u_1, \dots, u_m$ , aus  $n$  Zustandsknoten  $1, \dots, n$  und aus  $p$  Ausgangsknoten  $y_1, \dots, y_p$ . Die einzelnen Knoten werden nach den folgenden Regeln mit gerichteten Verbindungslinien bzw. Kanten versehen (Svaricek 1992):

1. Es existiert eine gerichtete Kante vom Eingangsknoten  $j$  zum Zustandsknoten  $i$ , wenn die partielle Ableitung der  $i$ -ten Zeile der Zustandsdifferentialgleichung nach der  $j$ -ten Eingangsvariable ungleich Null ist, d. h. wenn gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial(a_i(\mathbf{x}) + b_{i1}(\mathbf{x})u_1 + \dots + b_{im}(\mathbf{x})u_m)}{\partial u_j} = b_{ij}(\mathbf{x}) \neq 0 ; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} . \quad (5.1)$$

2. Es existiert eine gerichtete Kante vom Zustandsknoten  $j$  zum Zustandsknoten  $i$ , wenn die partielle Ableitung der  $i$ -ten Zeile der Zustandsdifferentialgleichung nach der  $j$ -ten Zustandsvariable ungleich Null ist, d. h. wenn gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(a_i(\mathbf{x}) + b_{i1}(\mathbf{x})u_1 + \dots + b_{im}(\mathbf{x})u_m)}{\partial x_j} \neq 0 ; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} . \quad (5.2)$$

3. Es existiert eine gerichtete Kante vom Zustandsknoten  $j$  zum Ausgangsknoten  $i$ , wenn die partielle Ableitung der  $i$ -ten Zeile der Ausgangsgleichung des Zustandsmodells nach der  $j$ -ten Zustandsvariable ungleich Null ist, d. h. wenn gilt

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(c_{i1}x_1 + \dots + c_{in}x_n)}{\partial x_j} = c_{ij} \neq 0 ; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, n \end{array} . \quad (5.3)$$

Die genannten mathematischen Ausdrücke in den Gln. (5.1) bis (5.3), die für die Existenz einer Kante verantwortlich sind, werden auch als deren *Gewichtung* oder *Bewertung* bezeichnet. Die hier verwendete Beschreibung des Graphen nichtlinearer Systeme stimmt im wesentlichen mit bereits bekannten Definitionen (vgl. Kasinski und Levine 1984, D'Andrea und Levine 1986) überein.

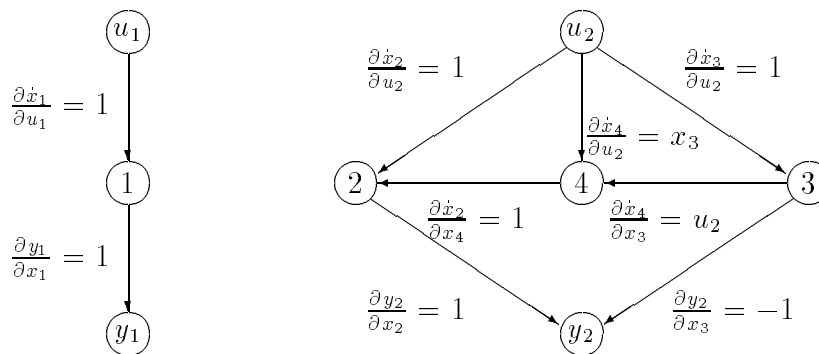
Zur Anwendung graphentheoretischer Verfahren bei der Analyse von ALS wird zudem der Begriff des *gerichteten Pfades* benötigt:

**Definition 5.1** (Svaricek 1992)

Ein gerichteter Pfad in einem Graphen ist die Aneinanderreihung mehrerer Kanten  $\{e_i, e_j, \dots\}$ , wobei der Anfangsknoten einer weiterführenden Kante der Endknoten der vorhergehenden Kante ist. Dabei müssen die einzelnen Kanten nicht notwendigerweise verschieden voneinander sein. Die Anzahl der Kanten  $\{e_i, e_j, \dots\}$  in einem gerichteten Pfad wird als dessen *Länge* bezeichnet, die Pfadbewertung entspricht der multiplikativen Verknüpfung der zugehörigen Kantenbewertungen.  $\square$

**Beispiel 5.1** (Perdon u.a. 1989)

Zur Verdeutlichung, wie der bewertete gerichtete Graph eines ALS erstellt wird, soll



**Bild 5.1:** Bewerteter gerichteter Graph  $\mathcal{G}$  des Systems aus Beispiel 5.1

hier ein Beispielsystem mit den Matrizen

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_3(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B 5.1-1})$$

verwendet werden. Der zugehörige Graph  $\mathcal{G}$  ist in Bild 5.1 dargestellt, die Kanten und deren Bewertungen ergeben sich hierbei aus der Anwendung der Regeln (5.1) bis (5.3).

Eine kompakte Darstellungsweise für die in einem Graphen enthaltenen gerichteten Pfade zwischen Eingängen und Ausgängen ist mit sogenannten *Adjazenzmatrizen*  $\mathbf{E}_l$  möglich (Reinschke 1988). Die Bewertungen aller Ein-/Ausgangspfade der Länge  $l$  zwischen  $u_j$  und  $y_i$  sind in den Elementen  $e_{l_{ij}}$  der Matrizen

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{C} \mathbf{D}^{l-2}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{B}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.4)$$

enthalten.

## 5.2 Reguläre Entkoppelbarkeit

Das in Abschnitt 4 behandelte Verfahren zur Analyse der regulären Entkoppelbarkeit bietet sich als Grundlage für eine graphentheoretische Bearbeitung des Entkopplungsproblems an. Wesentliches Ziel eines solchen Ansatzes ist es, eine möglichst übersichtliche und für eine rechnergestützte Analyse geeignete Methode zu entwickeln.

Die Analyse der regulären Entkoppelbarkeit eines ALS in einer Umgebung  $\mathcal{U}_0$  um einen Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  basiert im wesentlichen auf der Prüfung der Invertierbarkeit sowie der Verwendung der Struktur im Unendlichen des zugehörigen Tangentialsystems. Vergleicht man die Definition des Tangentialsystems in Gl. (4.1) mit der von  $\mathcal{G}$ , so beschreiben beide, bis auf die explizite Berücksichtigung eines Arbeitspunktes  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , identische Systeme. Zwischen den einen Graph beschreibenden Adjazenzmatrizen  $\mathbf{E}_l$  und den zur Regularitätsuntersuchung benötigten Dimensionen der durch das Tangentialsystem definierten Vektorräume  $T\mathcal{E}_k$  läßt sich folgender Zusammenhang finden (Commault u. a. 1986, Pugh u. a. 1989):

$$\dim T\mathcal{E}_k = \text{rang}_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{E}_{k+1} & \cdots & \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} + n \quad . \quad (5.5)$$

Neben dieser algebraischen Verknüpfung, die auf der Anwendung von Toeplitz-Matrizen basiert, kann auch ein direkter Zusammenhang zwischen dem Graphen und der regulären Entkoppelbarkeit aufgezeigt werden.

In einem ersten Schritt ist zu prüfen, ob ein System überhaupt entkoppelt werden kann. In Analogie zur Theorie linearer Regelungssysteme kann dies mit Hilfe von *knotendisjunkten* Pfaden geschehen. Das sind diejenigen Pfade zwischen Ein- und Ausgängen, die keine gemeinsamen Knoten und damit auch keine gemeinsamen Kanten besitzen. Es gilt die notwendige Bedingung:

### Satz 5.1

Ein ALS ist nur dann entkoppelbar mit einer statischen oder dynamischen Zustandsrückführung, wenn die maximale Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade mit der Anzahl  $m$  von Ein- bzw. Ausgängen übereinstimmt.  $\square$

Besonders geeignet ist die Anwendung der Graphentheorie dann, wenn *qualitative* Systemmodelle betrachtet werden. Für diese sind die Kantenbewertungen als voneinander unabhängige Größen angenommen, so daß eine gegenseitige Auslöschung von Ein-/Ausgangspfadbewertungen, wie dies z. B. in Bild 5.1 (Pfade  $u_2 \rightarrow 2 \rightarrow y_2$  und  $u_2 \rightarrow 3 \rightarrow y_2$ ) geschieht, nicht auftreten kann. Lediglich die Struktur, d. h. die Existenz bzw. Nichtexistenz von Kanten, wird berücksichtigt. Deshalb spricht man in diesem Fall auch von einer strukturellen Systemanalyse. Mit dieser Art der Analyse ist es möglich, Systemkenngrößen für

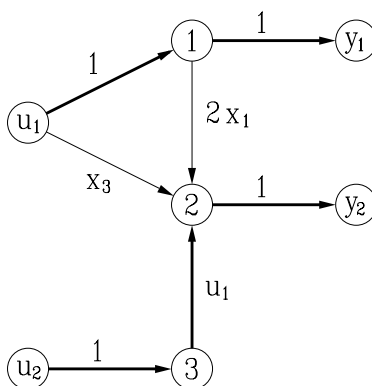
ganze Klassen von strukturell identischen ALS zu bestimmen. Wenn z. B. ein System voneinander unabhängige Kantenbewertungen hat und damit die gleichen Eigenschaften wie das zugehörige Strukturmodell aufweist, dann ist Satz 5.1 sowohl notwendig als auch hinreichend.

**Beispiel 5.2** (Wey u. a. 1994)

Der in Bild 5.2 dargestellte Graph korrespondiert mit dem durch die Matrizen

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B 5.2-1})$$

beschriebenen System. Es kann sehr einfach festgestellt werden, daß zwei knotendis-



**Bild 5.2:** Graph  $\mathcal{G}$  des Systems (B 5.2-1)

junkte Ein-/Ausgangspfade, die im Graphen durch breitere Kanten gekennzeichnet sind, existieren und damit die notwendige Bedingung für die Entkoppelbarkeit erfüllt ist. Darüber hinaus tritt keine gegenseitige Elimination der Bewertungen von Ein-/Ausgangspfaden auf, so daß Satz 5.1 auch hinreichend ist. Durch Anwendung von Definition 3.2 kann, wenn auch in deutlich aufwendigerer Form, ebenfalls festgestellt werden, daß das System rechtsinvertierbar und damit entkoppelbar ist:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1^2 + x_3 u_1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \sigma_1 &= \text{rang } \mathbf{J}_1 = \text{rang} \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} \right] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B 5.2-2})$$

Die Differenz  $\sigma_1 - \sigma_0$  erreicht noch nicht den größtmöglichen Rang, deshalb sind

weitere Differentiationen notwendig:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ 2x_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_1 + x_3\dot{u}_1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2x_1 + u_2 & u_1 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \sigma_2 &= \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} - \text{rang } \mathbf{J}_1 = 2 \quad .
\end{aligned} \tag{B 5.2-3}$$

Wegen Gl. (3.10) kann  $\sigma_3$  nicht kleiner als  $\sigma_2$  werden, so daß für den Rang  $\rho^* = \sigma_3 = \sigma_2 = 2$  gilt. Folglich ist das System entkoppelbar.

Um im weiteren Aussagen zur regulären Entkoppelbarkeit eines Systems an verschiedenen Arbeitspunkten machen zu können, wird Satz 4.2 ausgenutzt. Dieser fordert als notwendige Bedingung eine gleiche Anzahl von NU für das zu entkoppelnde und das Tangentialsystem. Da es sich bei dem Tangentialsystem um ein lineares System handelt, hat der folgende Satz Gültigkeit:

**Satz 5.2** (van der Woude 1991)

Die maximale Anzahl von knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfaden im Systemgraphen eines LS ist gleich dem generischen Rang von  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$ .  $\square$

Außerdem kann für *fast alle* LS, die ein technisches System beschreiben, von einer Übereinstimmung des generisch und des numerisch bestimmbaren Rangs ausgegangen werden (Svaricek 1987, Reinschke 1988). Daraus folgt unmittelbar, daß die maximale Anzahl der knotendisjunkten Pfade im Graphen  $\mathcal{G}_T$  des Tangentialsystems dessen Rang  $\rho_T^* = \dim T\mathcal{E}_n - \dim T\mathcal{E}_{n-1}$  entspricht.

Mit den in Abschnitt 3 und 4 genannten Zusammenhängen läßt sich nachweisen, daß der Rang eines ALS durch  $\rho_T^*$  nach unten hin begrenzt wird (vgl. Anhang A). Für nichtgenerische ALS besteht somit die Möglichkeit, den Systemrang allein mit Hilfe des Graphen nach oben und unten hin abzuschätzen:

**Satz 5.3**

Der differentielle Rang  $\rho^*$  eines ALS ist nach oben hin durch die Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade im zugehörigen Systemgraph  $\mathcal{G}$  beschränkt. Eine untere Schranke für den Rang stellt die maximal mögliche Anzahl von knotendisjunkten Pfaden im Graphen  $\mathcal{G}_T$  des Tangentialsystems dar.  $\square$

Neben dieser Aussage gilt wegen Satz 4.2 der folgende Zusammenhang zwischen Systemgraphen und regulärer Entkoppelbarkeit:

**Satz 5.4**

Eine notwendige Bedingung für die reguläre Entkoppelbarkeit eines generischen ALS in einem Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  ist, daß der Graph  $\mathcal{G}_T$  des Tangentialsystems an diesem Punkt die gleiche Anzahl von knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfaden aufweist wie der Graph  $\mathcal{G}$  des ALS.  $\square$

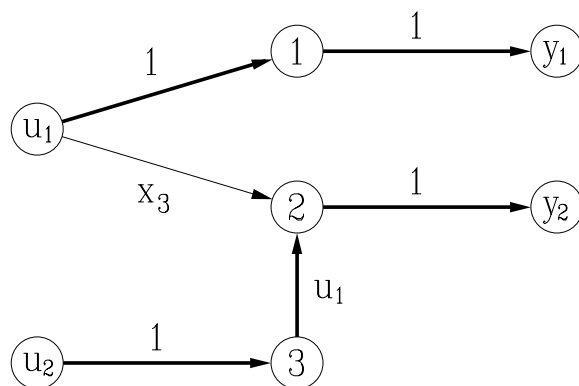
Um eine hinreichende Bedingung für die reguläre Entkoppelbarkeit formulieren zu können, muß der Defekt  $\delta$  von ALS und Tangentialsystem verglichen werden. Inwieweit das mit Hilfe eines Graphen möglich ist, ist zur Zeit noch nicht geklärt.

**Beispiel 5.3** (Delaleau und Fliess 1992)

Man betrachte ein ALS dritter Ordnung mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B 5.3-1})$$

Der zugehörige Graph ist in Bild 5.3 dargestellt. Er erfüllt offensichtlich die Anforderungen für eine qualitative Systemanalyse, da die einzelnen Pfadbewertungen voneinander unabhängig sind. Die knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade sind durch



**Bild 5.3:** Graph  $\mathcal{G}$  des Systems (B 5.3-1).

breitere Kanten kenntlich gemacht.

Für einen stationären Arbeitspunkt muß  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  gelten. Aus Gl. (B 5.3-1) folgt, daß für alle Arbeitspunkte  $u_{10} = 0$  und  $u_{20} = 0$  gelten muß, an den Anfangszustand  $x_{30}$  sind dagegen keine besonderen Bedingungen geknüpft. Berücksichtigt man diese Randbedingungen im Graphen  $\mathcal{G}$ , so führt das zu dem in Bild 5.4 wiedergegebenen Graphen  $\mathcal{G}_T$  des Tangentialsystems.

In  $\mathcal{G}_T$  sind nicht mehr zwei knotendisjunkte Pfade wie in  $\mathcal{G}$  enthalten, deshalb kann nach Satz 5.4 das System in keinem stationären Arbeitspunkt regulär entkoppelbar

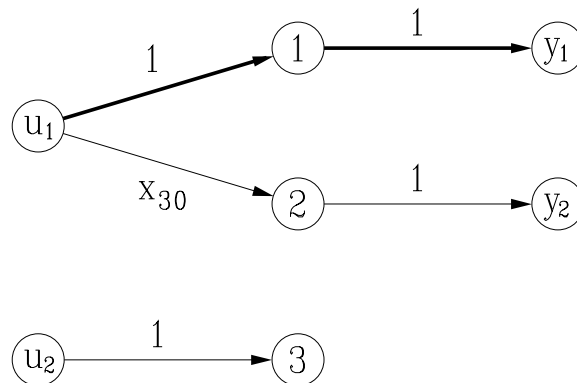


Bild 5.4: Graph  $\mathcal{G}$  des Tangentialsystems zu (B 5.3-1).

sein. In Delaleau und Fließ (1992) wird die folgende entkoppelnde Rückführung für (B 5.3-1) angegeben:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= \frac{v_2 - x_3 \dot{v}_1}{v_1} . \end{aligned} \quad (\text{B 5.3-2})$$

Weil an allen stationären Arbeitspunkten  $u_{10} = 0$  und somit auch  $v_{10} = 0$  gelten muß, ist sofort einsichtig, daß diese Rückführung dort nicht regulär sein kann.

### 5.3 Synthese von entkoppelnden Rückführungen

Neben der reinen Analyse ist auch die Synthese einer entkoppelnden Rückführung mit Hilfe der Graphentheorie durchaus möglich. Dies kann an einem Beispiel von Respondek (1993) nachgewiesen werden, für das eine entkoppelnde reguläre Zustandsrückführung *nicht* mit den üblichen Erweiterungs- oder Struktur-Algorithmen gefunden werden kann. Die von Respondek angegebene Lösung des Problems wurde heuristisch ermittelt.

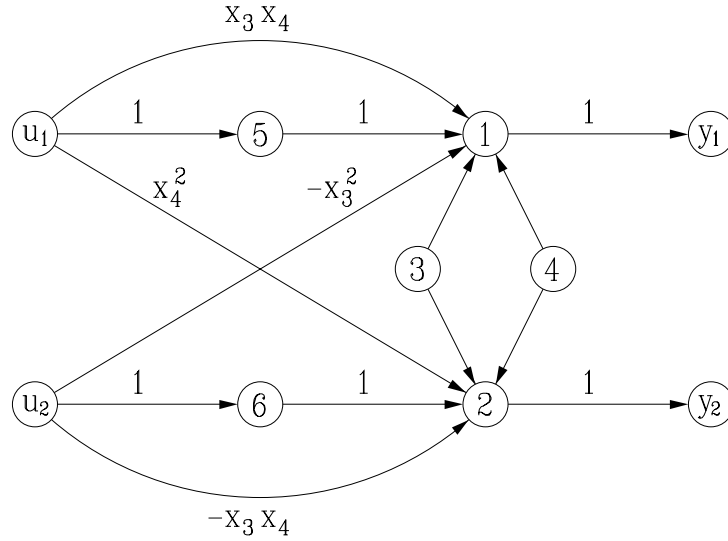
#### Beispiel 5.4 (Respondek 1993)

Das durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_5 + x_3 x_4 u_1 - x_3^2 u_2 ; & y_1 &= x_1 , \\ \dot{x}_2 &= x_6 + x_4^2 u_1 - x_3 x_4 u_2 ; & y_2 &= x_2 , \\ \dot{x}_3 &= a(\mathbf{x}) , \\ \dot{x}_4 &= b(\mathbf{x}) , \\ \dot{x}_5 &= u_1 , \\ \dot{x}_6 &= u_2 \end{aligned} \quad (\text{B 5.4-1})$$

beschriebene System soll in der Umgebung um einen Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  durch eine reguläre Zustandsrückführung entkoppelt werden. Der Arbeitspunkt wird als stationär angenommen, so daß  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  gilt.



Bild 5.5: Graph  $\mathcal{G}$  des Systems (B 5.4-1).

Im zugehörigen gewichteten Systemgraphen  $\mathcal{G}$  in Bild 5.5 sind Pfade zu den Zuständen  $x_3$  und  $x_4$  aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht enthalten, weil sie nicht relevant für die hier diskutierte Problemstellung sind (Respondek 1993).

In einem ersten Schritt ist nun zu überlegen, welche Ordnung eine dynamische Erweiterung des Systems haben muß, damit anschließend eine statische Zustandsrückführung die Entkopplung bewirken kann. Hierzu wird das Konzept der essentiellen Ordnungen (Abschnitt 3.2) angewendet, welches auf der Analyse der Jacobi-Matrizen  $\mathbf{J}_k$  beruht. Im vorliegenden Beispiel erhält man für die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= x_5 + x_3 x_4 u_1 - x_3^2 u_2, \\
 \dot{y}_2 &= x_6 + x_4^2 u_1 - x_3 x_4 u_2, \\
 \ddot{y}_1 &= u_1 + a(\mathbf{x}) x_4 u_1 + x_3 b(\mathbf{x}) u_1 + x_3 x_4 \dot{u}_1 - 2x_3 a(\mathbf{x}) u_2 - x_3^2 u_2 \\
 \ddot{y}_2 &= u_2 + 2x_4 b(\mathbf{x}) u_1 + x_4^2 \dot{u}_1 - x_3 b(\mathbf{x}) u_2 - a(\mathbf{x}) x_4 u_2 - x_3 x_4 \dot{u}_2 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{B 5.4-2}$$

so daß sich  $\mathbf{J}_3$  zu (vgl. Gl. (3.3))

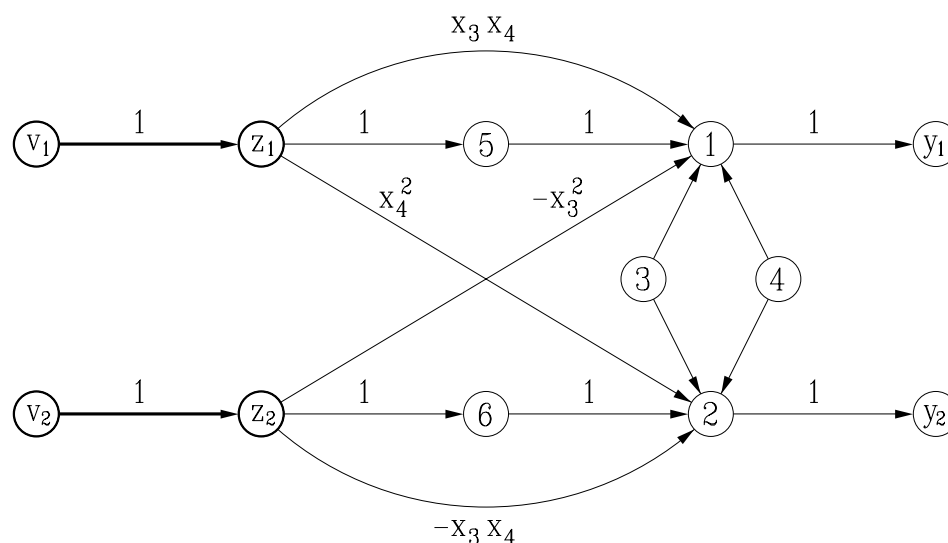
$$\mathbf{J}_3 = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc}
 x_3 x_4 & -x_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_4^2 & -x_3 x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 + c & -2a x_3 & x_3 x_4 & -x_3^2 & 0 & 0 \\
 2b x_4 & 1 - c & x_4^2 & -x_3 x_4 & 0 & 0 \\
 \hline
 2ab & -2a^2 & 1 + 2c & -4a x_3 & x_3 x_4 & -x_3^2 \\
 2b^2 & -2ab & 4b x_4 & 1 - 2c & x_4^2 & -x_3 x_4
 \end{array} \right] \tag{B 5.4-3}$$

$$\text{mit } a = a(\mathbf{x}); \quad b = b(\mathbf{x}); \quad c = a x_4 + x_3 b$$

berechnet. Die zwei Nullstellen im Unendlichen besitzen gemäß Definition 3.1 die Ordnungen  $\{1, 3\}$ . Weil das Streichen einer der ersten 4 Zeilen in  $\mathbf{J}_3$  keine Rangänderung bewirkt, nehmen die essentiellen Ordnungen demgegenüber die Werte  $\{3, 3\}$  an. Berücksichtigt man, daß die NU des entkoppelten Systems im günstigsten Fall (minimale dynamische Erweiterung) gerade mit der essentiellen Struktur übereinstimmen (vgl. Satz 3.1), so sind zwei zusätzliche Zustände als dynamische Erweiterung vorzusehen. Das korrespondiert auch mit der Aussage von Gl. (3.17).

Wie diese beiden Zustände  $z_1$  und  $z_2$  nun in das vorhandene System zu integrieren sind, läßt sich mit Hilfe des Graphen ermitteln:

Wenn die angestrebten beiden Ordnungen der NU gleich 3 sind, darf kein gerichteter Pfad zwischen einem Eingang und einem Ausgang existieren, dessen Länge



**Bild 5.6:** Modifizierter Graph  $\mathcal{G}'$  des Systems (B 5.4-1).

kleiner als 4 ist. Damit überhaupt Ein-/Ausgangspfade dieser Länge realisiert werden können, muß vor jedem der beiden Eingänge einer der Zustände  $z_{1,2}$  angeordnet werden. Diese Vorgehensweise ist auch deshalb naheliegend, weil am Graphen die Symmetrie des Problems sofort ersichtlich ist. Folglich ergibt sich der neue Graph wie in Bild 5.6 dargestellt. Die bisherigen Eingänge  $u_{1,2}$  sind durch die neuen Zustände ersetzt und zwei neue Eingangsgrößen  $v_{1,2}$  hinzugefügt worden. Aus physikalischer Sicht entspricht das dem Vorschalten von Integratoren vor den beiden Eingängen.

Trotz dieser Maßnahme bestehen immer noch Ein-/Ausgangspfade, die kürzer als 4 sind:

$$\begin{aligned}
 v_1 &\xrightarrow{1} z_1 \xrightarrow{x_3 x_4} 1 \xrightarrow{1} y_1, \\
 v_1 &\xrightarrow{1} z_1 \xrightarrow{x_4^2} 2 \xrightarrow{1} y_2, \\
 v_2 &\xrightarrow{1} z_2 \xrightarrow{-x_3^2} 1 \xrightarrow{1} y_1, \\
 v_2 &\xrightarrow{1} z_2 \xrightarrow{-x_3 x_4} 2 \xrightarrow{1} y_2 \quad .
 \end{aligned} \tag{B 5.4-4}$$

Daraus ergibt sich direkt die Adjazenzmatrix  $\mathbf{E}'_3$  zu

$$\mathbf{E}'_3 = \begin{bmatrix} x_3 x_4 & -x_3^2 \\ x_4^2 & -x_3 x_4 \end{bmatrix} \quad . \tag{B 5.4-5}$$

Zur Elimination der Pfade (B 5.4-4) sollen nun weitere Verbindungen im Graphen hinzugefügt werden, so daß alle Elemente von  $\mathbf{E}'_3$ , welche durch Summation von Pfadgewichten gebildet werden, den Wert Null annehmen. Allerdings können die inneren Systemstrukturen nicht abgeändert werden. Demnach sind zusätzliche Verbindungskanten nur zwischen  $v_{1,2}$  und den von den bisherigen Eingangsgrößen  $u_{1,2}$  beeinflussbaren Systemzuständen, im vorliegenden Fall  $x_1, x_2, x_5$  und  $x_6$ , zulässig.

Zur Elimination des ersten Ein-/Ausgangspfad in (B 5.4-4) benötigt man einen Pfad der Länge 3 von  $v_1$  zu  $y_1$  mit der Gewichtung  $-x_3 x_4$ . Das kann durch eine zusätzliche Kante zwischen  $v_1$  und  $x_5$  realisiert werden:

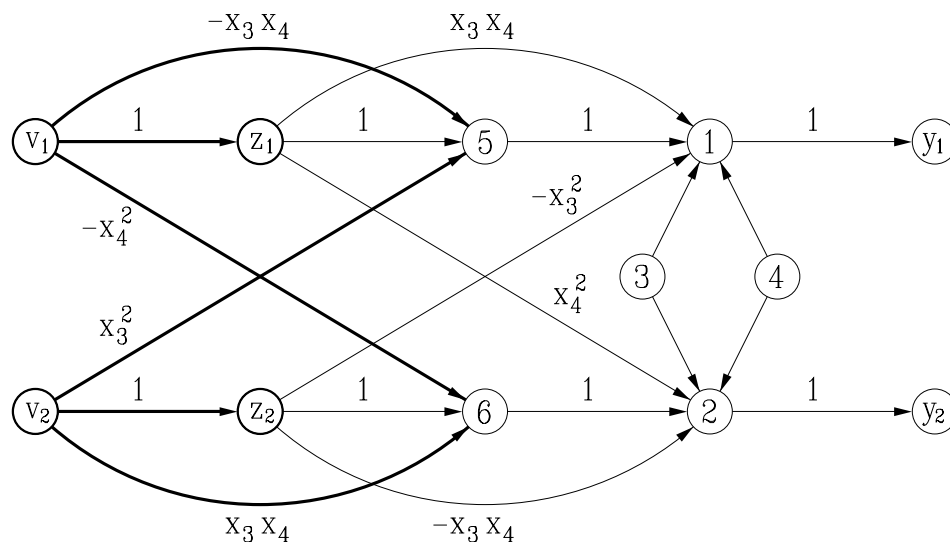
$$v_1 \xrightarrow{-x_3 x_4} 5 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} y_1 \quad . \tag{B 5.4-6}$$

Analoges Vorgehen für die anderen Pfade in (B 5.4-4) führt dann zu dem Graph  $\mathcal{G}''$  in Bild 5.7. Die Bestimmung der zugehörigen Adjazenzmatrix  $\mathbf{E}''_3$  liefert

$$\mathbf{E}''_3 = \mathbf{E}'_3 + \begin{bmatrix} -x_3 x_4 & x_3^2 \\ -x_4^2 & x_3 x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad . \tag{B 5.4-7}$$

Mittels Rückrechnen vom Graphen erhält man nun unmittelbar eine dynamische Erweiterung

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= v_1 \\
 \dot{z}_2 &= v_2 \\
 u_1 &= z_1 - x_3 x_4 v_1 + x_3^2 v_2 \\
 u_2 &= z_2 - x_4^2 v_1 + x_3 x_4 v_2 \quad ,
 \end{aligned} \tag{B 5.4-8}$$



**Bild 5.7:** Modifizierter Graph  $\mathcal{G}''$  des Systems (B 5.4-1).

durch die das resultierende System mit einer rein statischen Zustandsrückführung entkoppelbar wird. Die gefundene Lösung stimmt mit dem von Respondek (1993) gefundenen Resultat überein. Setzt man die Rückführung in die Systemgleichung ein, so ergibt sich im Bereich eines stationären Arbeitspunktes das entkoppelte Ein-/Ausgangsverhalten

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= v_1 \\ y_2^{(3)} &= v_2 \quad . \end{aligned} \tag{B 5.4-9}$$

D. h., es ist keine zusätzliche statische Rückführung zur Entkopplung notwendig.

Inwieweit das dargestellte graphentheoretische Vorgehen allgemein anwendbar ist, ist bis jetzt noch nicht überprüft worden. Für eine rechnergestützte Anwendung eignet es sich jedoch deshalb gut, weil zum einen die angewandten Berechnungsschritte vollkommen systematisch sind und zum anderen zahlreiche effiziente Algorithmen zur Graphenanalyse verfügbar sind (Gibbons 1987, Rote 1990 u. a.).

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Forschungsbericht<sup>5</sup> behandelt das Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem für nichtlineare Mehrgrößensysteme. Neben einer grundlegenden Einführung in die Thematik wird insbesondere die reguläre Entkoppelbarkeit von ALS anhand eines neuen Ansatzes nach Martin (1993) behandelt. Es zeigt sich, daß dieser Ansatz, der sich an der Struktur im Unendlichen orientiert, wesentlich allgemeinere Lösungen zuläßt als es mit klassischen Erweiterungs- oder Strukturalgorithmen möglich ist.

Durch die Verwendung der Struktur im Unendlichen konnte hier zudem, aufbauend auf bisherigen Arbeiten (Svaricek und Schwarz 1993, Wey 1993) die Graphentheorie zur Analyse der Entkoppelbarkeit eingesetzt werden. Es wird nachgewiesen, daß die Bedingungen an die ein System beschreibenden Differentialgleichungen, unter denen die Ein-/Ausgangsentkopplung möglich ist, mit den in einem Systemgraphen enthaltenen Informationen verknüpft sind. Der Begriff der *knotendisjunkten* Ein-/Ausgangspfade erweist sich als hierbei besonders geeignet, um notwendige Bedingungen für die reguläre Entkoppelbarkeit zu formulieren.

Der Übergang zu einer qualitativen Systemanalyse, bei der nur die Existenz von Abhängigkeiten zwischen Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen, nicht aber die expliziten Systemparameter berücksichtigt werden, erlaubt den graphentheoretisch basierten Analysemethoden auch die Formulierung von hinreichenden Bedingungen für die Entkoppelbarkeit. Damit ist die Graphentheorie von den Möglichkeiten her vergleichbar mit algebraischen Analyseverfahren, ihr wesentlicher Vorteil liegt jedoch in einer größeren Übersichtlichkeit. Das zeigt sich besonders im letzten Teil der Ausarbeitung, der sich mit der graphentheoretisch basierten Synthese von entkoppelnden Rückführungen beschäftigt. Anhand eines Beispiels von Respondek (1993) wird ein Syntheseverfahren vorgestellt, das für Systeme, bei denen Erweiterungsalgorithmen zu keinem Ergebnis führen, eine Lösung des regulären Entkopplungsproblems ermöglicht. Dieses basiert im wesentlichen auf einer systematischen Erweiterung des Systemgraphen, so daß die knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade die durch die essentiellen Ordnungen vorgegebenen Längen annehmen. Anschließend wird aus der graphischen Erweiterung ein explizites Regelgesetz abgeleitet.

Für zukünftige Untersuchungen sind eine Reihe von offenen Fragestellungen von Interesse. Sie betreffen im wesentlichen die Verknüpfung der Synthese von entkoppelnden Zustandsrückführungen mit der Anwendung der Graphentheorie. Zum einen ist zu klären, ob die hier an einem Beispiel aufgezeigte Auslegungsmethode mit Hilfe des Graphen auch allgemein für ALS Gültigkeit hat. Es ist vorstellbar, daß dies nur qualitativ in Form von an der Systemstruktur orientierten Algorithmen möglich ist. Genausogut ist eine für die allgemeine Klasse der ALS gültige Auslegungsmethode denkbar, denn auch das hier behandelte Beispiel erfüllt nicht die speziellen Anforderungen an ein strukturelles

---

<sup>5</sup>Diese Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes „Qualitative Analyse nichtlinearer Systeme mittels Digraphen“.

---

Systemmodell. Zum anderen bleibt zu prüfen, ob das hier dargestellte Syntheseverfahren mit bereits bekannten graphentheoretischen Algorithmen nachvollzogen werden kann. Das würde sich deshalb anbieten, weil die Effizienz solcher Algorithmen aufgrund des fortgeschrittenen Kenntnisstandes im Bereich der Graphentheorie sehr hoch ist.

## 7 Literaturverzeichnis

- D'Andrea, B. und J. Levine.** 1986. C.A.D. for nonlinear systems decoupling, perturbations rejection and feedback linearization with applications to the dynamic control of a robot arm. *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*. Fliess, M.; Hazewinkel, M. (eds.) Dordrecht: Reidel.
- Di Benedetto, M.D.; J.W. Grizzle und C.H. Moog.** 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization*. 27. 658-672.
- Di Benedetto, M.D. und J.W. Grizzle.** 1990. Intrinsic notions of regularity for local inversion, output nulling and dynamic extension of non-square systems. *Control Theory and advanced Technology*. 6. 357-381.
- Cao, L. und Y.-F. Zheng.** 1992. On minimal compensators for decoupling control. *Systems & Control Letters*. 18. 121-128.
- Commault, C.; J. Descusse; J.M. Dion; J.F. Lafay und M. Malabre.** 1986. New decoupling invariants: the essential orders. *Int. J. Control*. 44. 689-700.
- Cremer, M.** 1971. A Precompensator of Minimal Order for Decoupling a Linear Multi-Variable System. *Int. J. Control*. 14. 1089-1103.
- Delaleau, E. und M. Fliess.** 1992. An Algebraic Interpretation of the Structure Algorithm with an Application to Feedback Decoupling. *Proc. of the IFAC Nonlinear Control System Design Symposium*. Bordeaux. 489-494.
- Descusse, J. und C.H. Moog.** 1987. Dynamic decoupling for right-invertible nonlinear systems. *Systems & Control Letters*. 8. 345-349.
- Fliess, M.** 1986. Nonlinear Control Theory and differential Algebra. *Modelling and Adaptive Control*. Byrnes, C. I.; Kurszanski, A. (eds.) Lecture Notes in Control and Information Science. 105. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1987. Nonlinear Control Theory and Differential Algebra: Some illustrative Examples. *Proc. of the 10th IFAC World Congress*. 8. 114-118.
- Fliess, M.** 1990a. Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics. *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-35. 994-1001.
- Fliess, M.** 1990b. *Controllability revisited. Mathematical System Theory: The Influence of R.E. Kalman*. Antoulas, A.C. (ed.) Berlin: Springer.
- Fliess, M. und S.T. Glad.** 1993. An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*. Trentelmann, H.L.; Willems, J.C. (eds.) Boston: Birkhäuser.

- Gibbons, A.** 1987. *Algorithmic graph theory*. London u.a.: Cambridge University Press.
- Glumineau, A. und C.H. Moog.** 1989. Essential orders and the non-linear decoupling problem. *Int. J. Control.* 50. 1825-1834.
- Herrera, A.N. und J.F. Lafay.** 1993. New Results about Morgan's Problem. *IEEE Trans. Automat. Control AC-38.* 1834-1838.
- Huijberts, H.J.C.; H. Nijmeijer und L.L.M. van der Wegen.** 1992. Minimality of dynamic input-output decoupling for nonlinear systems. *Systems & Control Letters.* 18. 435-443.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.
- Johnson, J.** 1969. Kähler differentials and differential algebra. *Ann. of Math.* 89. 92-98.
- Kasinski, A. und J. Levine.** 1984. A fast graph theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems. *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Fuhrmann, P.A. (ed.) Lecture Notes in Control and Information Science. 58. Berlin: Springer.
- Martin, P.** 1993. A intrinsic sufficient condition for regular decoupling. *Systems & Control Letters.* 20. 383-391.
- Moog, C.H.** 1988. Nonlinear Decoupling and Structure at Infinity. *Math. Control Signals Systems 1.* 257-268.
- Perdon, A.M.; G. Conte und C.H. Moog.** 1989. Some canonical properties of nonlinear systems. *Proc. of the Int. Sympos. on Mathematical Theory of Networks and Systems. MTNS-89. 1.* 89-96.
- Pugh, A.C.; E.R.L. Jones; O. Demianczuk und G.E. Hayton.** 1989. Infinite-frequency structure and a certain matrix Laurent expansion. *Int. J. Control.* 50. 1793-1805.
- Reinschke, K.J.** 1988. *Multivariable Control — A Graph-theoretic Approach*. Berlin: Springer.
- Respondek, W.** 1993. Dynamic input-output linearization and decoupling of nonlinear systems. *Proc. of the European Control Conference*. Groningen. 1523-1527.
- Rote, G.** 1990. Path Problems in Graphs. *Computational Graph Theory*. Tinhofer, G.; Mayr, E.; Noltemeier, H.; Syslo, M. (eds.) Wien: Springer.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme — Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.



- Singh, S.N.** 1980. Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation. *IEEE Trans. Automat. Contr. AC-25*. 1237-1239.
- Svaricek, F.** 1987. *Graphentheoretische Beschreibung und Bestimmung der endlichen und unendlichen Nullstellen von linearen Mehrgrößensystemen*. VDI Fortschrittsberichte. Reihe 8. Nr. 135. Düsseldorf: VDI.
- Svaricek, F.** 1992. A Graph-Theoretic Approach for the Determination of the Structure at Infinity of Nonlinear Systems. *Proc. of the IFAC Nonlinear Control System Design Symposium*. Bordeaux. 124-129.
- Svaricek, F.** 1993. *Zur rechnergestützten Analyse linearer Regelungssysteme*. Habilitationsschrift. Universität - GH - Duisburg.
- Svaricek, F. und H. Schwarz.** 1993. Graph-Theoretic Determination of the Nonlinear Zeros at Infinity: Computational Results. *Proc. of the European Control Conference*. Groningen. 2086-2089.
- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht 10/92. MSRT. Universität - GH - Duisburg.
- Wey, T.** 1993. *Zur graphentheoretischen Charakterisierung des Rangs nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 04/93. MSRT. Universität - GH - Duisburg.
- Wey, T.; F. Svaricek und H. Schwarz.** 1994. A graph-theoretic characterization for the rank of nonlinear systems. *Proc. of the Int. Conf. Control'94*. Coventry.
- van der Woude, J.W.** 1991. A Graph-Theoretic Characterization for the Rank of the Transfer Matrix of a Structured System. *Math. Control Signals Systems 4*. 33-40.

## A Anhang

### Beweis zu Satz 5.3:

Aus den Zusammenhängen in Abschnitt 3 und Abschnitt 4 folgt, daß der Rang  $\rho_T^*$  des Tangentialsystems in einem Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  immer kleiner oder gleich dem Rang des zugehörigen ALS ist:

$$\rho_T^* \leq \rho^* \quad . \quad (\text{A.1})$$

Der Beweis hierzu wird durch Widerlegen der Annahme

$$\rho_T^* > \rho^* \quad (\text{A.2})$$

erbracht. Denn wegen Gl. (3.11) ist die Aussage in (A.2) identisch mit

$$\sigma_{n_T} > \sigma_n \quad , \quad (\text{A.3})$$

so daß mit Definition 3.1 auch

$$\begin{aligned} \dim T\mathcal{E}_n - \dim T\mathcal{E}_{n-1} &> \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1} \\ \Leftrightarrow \dim \mathcal{E}_{n-1} - \dim T\mathcal{E}_{n-1} &> \dim \mathcal{E}_n - \dim T\mathcal{E}_n \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Gültigkeit haben muß. Mit der Beziehung aus Gl. (3.10) ist (A.4) auch für alle  $k \geq n$  wahr:

$$\dim \mathcal{E}_{k-1} - \dim T\mathcal{E}_{k-1} > \dim \mathcal{E}_k - \dim T\mathcal{E}_k \quad ; \quad \forall k \geq n \quad . \quad (\text{A.5})$$

Daher ist die Folge

$$a_k = \dim \mathcal{E}_k - \dim T\mathcal{E}_k \quad (\text{A.6})$$

streng monoton fallend. Aus den Gln. (4.2) und (4.3) folgt demgegenüber, daß für alle  $k$  die Ungleichung

$$\dim T\mathcal{E}_k \leq \dim \mathcal{E}_k \quad ; \quad \forall k \quad (\text{A.7})$$

und damit auch unmittelbar

$$\dim \mathcal{E}_k - \dim T\mathcal{E}_k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_k \geq 0 \quad ; \quad \forall k \quad (\text{A.8})$$

erfüllt ist. Das widerspricht aber der Aussage, daß die Folge  $a_k$  streng monoton fallend ist und somit für  $k \rightarrow \infty$  unter alle Grenzen fällt. Aus diesem Grund muß die Annahme (A.2) falsch sein.  $\square$