ÜBUNG 10

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 10. Dezember bis 10 Uhr

Es folgt zunächst eine Wiederholung einer Anwendung des Induktionsprinzips:

Satz 0.1 (Induktionsprinzip)**.** *Für jede natürliche Zahl n sei $P(n)$ eine Aussage. Wenn*

(1) $P(1)$ wahr ist, und

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ auch wahr ist,

dann gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $P(n)$ wahr.

Behauptung 0.1. *[Summenformel] Für alle natürlichen Zahlen n wird definiert*

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann ist P(n) für alle natürlichen Zahlen eine wahre Aussage.

Beweis 0.1. *Für führen den Beweis durch Induktion (über die natürlichen Zahlen). Sei dafür für alle natürlichen Zahlen die obige Aussage P(n) definiert. Wir wollen den obigen Satz anwenden.*

(i) Induktionsanfang: Wir überprüfen $P(1)$, d.h. die Gültigkeit der Gleichung $1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$. Offensichtlich ist dies eine wahre Aussage, also gilt $P(1)$.

(ii) Induktionsannahme: Sei n eine natürliche Zahl und es gelte $P(n)$, also

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(iii) Induktionsschluss: Wir müssen nun die Gültigkeit von $P(n+1)$ nachweisen, d.h.

zu zeigen ist:

$$P(n+1) : 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Es folgt mit Hilfe der Induktionsannahme (Prämisse von (2))

$$P(n+1) : 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n+1) \underbrace{=}_{\text{Annahme}} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1,$$

also gilt

$$P(n+1) : 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2},$$

also gilt

$$P(n+1) : 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nach dem Satz über das Induktionsprinzip folgt damit zusammen mit dem Induktionsanfang die Behauptung, d.h. die Gültigkeit der Aussage $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen.

AUFGABE 1
Man beweise die Summenformel für ungerade natürliche Zahlen.
Für alle natürlichen Zahlen wird eine Aussage

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

definiert.
Man zeige durch Anwendung des Induktionsprinzips, dass für alle natürlichen Zahlen n die Aussage $P(n)$ wahr ist.

AUFGABE 2
Man beweise

a) durch Anwendung des Induktionsprinzips (Hinweis: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$),

b) durch Anwendung von Teilbarkeitsregeln (Hinweis: $4a^3 - a = a \cdot (2a - 1)(2a + 1)$),

dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Term $4n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

AUFGABE 3
Man beweise durch Anwendung des Induktionsprinzips, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Ungleichung $n^2 - 2n - 1 > 0$ gilt.

AUFGABE 4
Sei eine Menge A gegeben durch $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Man zeige, dass die Relation R gegeben durch

$$R := \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A ist und gebe die verschiedenen Äquivalenzklassen an.

b) Nun seien verschiedene Äquivalenzklassen $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}$ bzgl. einer gesuchten Äquivalenzrelation R auf A gegeben. Man bestimme nun R.

AUFGABE 5
Wir definieren eine weitere Eigenschaft von Relationen:
Eine Relation R auf einer Menge M heißt *antisymmetrisch*, wenn gilt

$$\forall a, b \in M : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

oder wieder in der üblichen Schreibkonvention

$$\forall a, b \in M : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

a) Ignor Mynus argumentiert: „Die Relation „teilt“ ist antisymmetrisch auf $\mathbb{Z}$, denn für alle ganzen Zahlen a, b folgt aus $a \mid b$ und $b \mid a$ stets $a = b$.“ Hat Ignor seine Argumentation eine Lücke?

b) Man gebe auf der Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\}$ eine (nichtleere) antisymmetrische Relation an.

c) Man untersuche folgende Relationen auf $\mathbb{Z}$ auf Antisymmetrie.

i) $S := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x \cdot y = 1\}$

ii) $T := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x \cdot y = -1\}$

iii) $U := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x \cdot y = 4\}$