Übungszettel 3b - Relationen und Funktionen mathematische Beweise

Aufgabe 1: Eigenschaften von Funktionen

Entscheide für jede Funktion, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = |x|$

(d) $i\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $i(n) = \log_2(n)$

(e) $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $j(n) = 2^n$

(f) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k(x) = x^2$

(g) $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l(x) = 1/e^x$

(h) $m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $m(x) = 2x - 1001$

Aufgabe 2: Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine 2-stellige Relation R auf einer Menge M, sodass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $(x, x) \in R$. (Reflexivität)
2. Wenn $(x, y) \in R$, dann ist auch $(y, x) \in R$. (Symmetrie)
3. Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$. (Transitivität)

(a) Weise nach, dass $R_1 := \{(x, y) \mid x = y\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

(b) Ist $R_2 := \{(x, y) \mid x \leq y\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$?

(c) Wie sieht es aus mit $R_3 := \{(x, y) \mid x \text{ versteht sich mit } y\}$ auf der Menge aller Menschen? (Ihr dürft diskutieren!)

Aufgabe 3: Umkehrfunktion

Sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive Funktion. Die Funktion $f^{-1}\colon Y \to X$, gegeben durch $f^{-1}(y) :=$ dasjenige $x \in X$ mit $f(x) = y$, heißt **Umkehrfunktion** von f.

(a) Ist die Umkehrfunktion eine Funktion? (Warum?)

(b) Zeige: Wenn f bijektiv ist, so ist auch f^{-1} bijektiv.

(c) Warum haben wir die Umkehrfunktion nur für bijektive Funktionen definiert?

Aufgabe 4: Die Magische Zahl $z = p^2 - 1$

Beweise: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

(a) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 3 teilbar.

(b) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 2 teilbar.

(c) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 4 teilbar.

(d) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Hinweis: $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$

Aufgabe 5: Beweis Mengen

Beweise: *Seien M und N Mengen. Es gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$ genau dann, wenn M und N disjunkt sind.*

Aufgabe 6: Direkter Beweis durch Umformen

Zeige durch Umformen, dass für $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Viel Erfolg!