Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
25. April 2018

Kommutative Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Seien R ein Hauptidealring, Λ_1, Λ_2 freie R-Moduln und $\beta\colon \Lambda_1 \times \Lambda_2 \to R$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform (d.h. für alle $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ sind $\beta(\lambda_1, \cdot) \neq 0$ und $\beta(\cdot, \lambda_2) \neq 0$). Seien weiterhin Λ_1 und Λ_2 vom Rang g.

Zeigen Sie: Es gibt (bis auf Assoziiertheit) eindeutige $a_1 | \cdots | a_g \in R$, so dass, bezüglich Basen $b_1, \dots, b_g$ von Λ_1 und $c_1, \dots, c_g$ von Λ_2, $\beta(x, y) = x^t \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_g) y$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie Λ_1 als Untermodul von Λ_2^*.

(b) Sei nun Λ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $2g$ und $\alpha\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ eine nicht-ausgeartete alternierende Form (d.h. für alle $\mu, \lambda \in \Lambda$ ist $\alpha(\mu, \lambda) = -\alpha(\lambda, \mu)$).

Zeigen Sie, dass es $d_1 | \cdots | d_g \neq 0 \in \mathbb{Z}$, sowie $b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_g \in \Lambda$ gibt, so dass

$$\Lambda = \langle b_1, c_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle b_g, c_g \rangle$$

eine α-orthogonale Zerlegung von Λ mit $\alpha(b_i, c_i) = d_i$ ist.

Hinweis: Simulieren Sie, wie im Beweis des Elementarteilersatzes, das "klassische" Gram-Schmidt-Verfahren über $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien A, B (kommutative) R-Algebren.

(a) Zeigen Sie, dass die (bilineare Fortsetzung der) Abbildung

$$m\colon (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) \to A \otimes_R B, \quad (a \otimes b, a' \otimes b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

wohldefiniert ist und $A \otimes_R B$ zu einer R-Algebra macht.

(b) Zeigen Sie, dass $A \otimes_R B$ das Koprodukt der R-Algebren ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\sigma\colon R \to A$ eine (kommutative) R-Algebra und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) $A \otimes_R R[x] \cong A[x]$;

(b) $R/I \otimes_R A \cong A/\langle \sigma(I) \rangle$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$;

(b) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 2. Mai**.