Aufgabe K.2

Das Vorgehen bei dieser Aufgabe besteht darin, zunächst eine Basis von W zu bestimmen und auf diese dann das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren anzuwenden.

Das Bild W der Abbildung f besteht nach Definition von f gerade aus den Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$ der Form

$$v = \begin{pmatrix} x+y+z+3w \\ x+w \\ y+w \\ z+w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Demnach ist

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

da der letzte der vier Vektoren als Summe der ersten drei in deren Erzeugnis liegt. Setzt man nun

$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so ist $C := (c_1, c_2, c_3)$ wegen der linearen Unabhängigkeit von c_1, c_2, c_3 eine Basis von W: Jedes Element aus W lässt sich als Linearkombination der Vektoren aus C schreiben und jede Linearkombination dieser Vektoren liegt in W. Auf C lässt sich das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren anwenden: In einem ersten Schritt normieren wir c_1 und erhalten so

$$b_1 := \frac{1}{\|c_1\|} c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} c_1.$$

Damit berechnen wir $\tilde{b}_2$ als

$$\tilde{b}_2 := c_2 - \langle b_1, c_2 \rangle\, b_1 = -\frac{1}{2} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und setzen nach Normieren

$$b_2 := \frac{1}{\|\tilde{b}_2\|}\tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von $\tilde{b}_3$ ergibt

$$\tilde{b}_3 := c_3 - \langle b_1, c_3\rangle\, b_1 - \langle b_2, c_3\rangle\, b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit

$$b_3 := \frac{1}{\|\tilde{b}_3\|}\tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$B := (b_1, b_2, b_3)$ ist damit wegen $\langle b_1, b_2, b_3\rangle = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ eine Orthonormalbasis von W.