Joachim Weidmann Frankfurt am Main, 28. Februar 2006

Notizen zur Vorlesung „Kompakte Operatoren“ (WS 2005/06)

1 Kurzer Überblick über die Theorie linearer Operatoren in Hilbert/Banach–Räumen

Beschränkte Operatoren, Norm, hermitesche Operatoren, Integraloperatoren, Graphen, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. Aus den Kapiteln 2,4,5 und 6 von [7]

2 Kompakte Operatoren

Abschnitt 3.1 aus [7]

3 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte (und normale) Operatoren

Abschnitt 3.2 aus [7]

4 Spektraltheorie beliebiger kompakter Operatoren

Abschnitt 5.4 aus [7]

5 Hilbert–Schmidt–Operatoren

Abschnitt 3.3 und 6.4 aus [7]

6 Die Schatten–Klassen kompakter Operatoren

Abschnitt 3.4 aus [7]

7 Störung selbstadjungierter Operatoren durch kompakte Operatoren

Abschnitt 1.2 aus [7]

8 Der Satz von Weyl, von Neumann und Kuroda

Dieses Kapitel orientiert sich weitgehend an Kap X.2 aus [2].

Es ist bemerkenswert, daß jeder selbstadjungierte Operator eine Störung aus C_p (außer $p = 1$) in einem Operator mit reinem Punktspektrum überführt werden kann. Das wird in diesem Abschnitt bewiesen.

Wir führen zunächst noch eine Verallgemeinerung der C_p–Normen ein: Eine Norm $|||\cdot|||$ auf dem Raum der kompakten Operatoren heißt eine *Cross–Norm*, wenn gilt:

- für jeden 1–dimensionalen Operator K ist $|||K||| = \|K\|$,
- $|||\cdot|||$ ist eine symmetrische Funktion der singulären Werte $s_j(K)$, die bezüglich jedes $s_j(K)$ nicht–fallend ist.

Insbesondere ist $|||\cdot|||$ unitär invariant, d. h. für unitäre Operatoren U, V gilt $|||UKV||| = |||K|||$.

Die C_p–Normen sind offenbar Cross–Normen und es gilt

$$\|K\| = \|K\|_\infty \le |||K||| \le \|K\|_1.$$

Die erste Ungleichung ist offensichtlich, die zweite folgt aus

$$\|K\|_1 = \sum_j s_j(K) = \sum_j \|s_j(K)\langle\varphi_j,\cdot\rangle\psi_j\| = \sum_j |||s_j(K)\langle\varphi_j,\cdot\rangle\psi_j||| \ge |||K|||,$$

wobei $K = \sum s_j(K)\langle\varphi_j,\cdot\rangle\psi_j$ die kanonische Entwicklung des Operators K ist.

Satz 1 (H. Weyl, J. von Neumann, S. T. Kuroda) *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum X, $\varepsilon > 0$, $|||\cdot|||$ eine beliebige Cross–Norm, die zu $\|\cdot\|_1$ nicht äquivalent ist. Dann gibt es einen kompakten selbstadjungierten Operator B mit $|||B||| < \varepsilon$ so, daß $A+B$ reines Punktspektrum hat.*

Zum Beweis benötigen wir den

Satz 2 *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum X, $x \in X$, $\eta > 0$ und $|||\cdot|||$ eine beliebige Cross–Norm, die nicht zu $\|\cdot\|_1$ äquvalent ist. Dann gibt es eine endlichdimensionale orthogonale Projektion P in X und einen kompakten selbstadjungierten Operator B so, daß gilt*

$$\|(I-P)x\| < \eta, \quad |||B||| < \eta, \quad A+B \quad \textit{wird von } R(P) \textit{ reduziert.}$$

Im Verlauf des Beweises dieses Satzes benötigen wir den

Satz 3 *Sei $|||\cdot|||$ eine beliebige Cross–Norm die nicht zu $\|\cdot\|_1$ äquivalent ist. Dann gibt es eine Nullfolge (c_n) so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$|||K_n||| \leq nc_n \|K_n\|$$

für jeden n–dimensionalen beschränkten Operator K_n.

Beweis. Für die C_p–Normen ($p > 1$) folgt dies wegen $s_j(K_n) \leq s_1(K_n) = \|K_n\|$ sofort aus

$$\|K_n\|_p = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} s_j(K_n)^p \Big\}^{1/p} \leq \Big\{ ns_1(K_n)^p \Big\}^{1/p} = n^{1/p}\|K_n\|$$

wegen $\dfrac{1}{p} = 1 + \Big(\dfrac{1}{p} - 1\Big)$ und $\dfrac{1}{p} - 1 < 0$.

Ist $|||\cdot|||$ eine beliebige Cross–Norm, die nicht äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist, so bedeutet dies wegen $|||\cdot||| \leq \|\cdot\|_1$ nichts anderes wie

– es gibt *kein* $C \geq 0$ mit $|||\cdot||| \geq C\|\cdot\|_1$.

Da $|||\cdot|||$ und $\|\cdot\|$ beide nur von den singulären Werten abhängen, genügt es, die Behauptung für nichtnegative selbstadjungierte Operatoren K_n zu zeigen.

Seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die positiven Eigenwerte von K_n, also $\lambda_1 = \|K_n\|$. Da $|||K_n|||$ eine nichtfallende Funktion aller λ_k ist und $\|K_n\| = \lambda_1$ gilt, genügt es sogar, die Behauptung für $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$ zu zeigen, d. h., daß gilt

$$\frac{1}{n}|||P_n||| =: c_n \to 0$$

für n–dimensionale Projektionen P_n (wegen der unitären Invarianz hängt $|||P_n|||$ natürlich nur von n ab).

Sind $Q_1, \ldots, Q_n, Q_{n+1}$ paarweise orthogonale Projektionen der Dimension 1, so folgt

$$\begin{aligned} n|||P_{n+1}||| &= n|||Q_1 + \ldots + Q_{n+1}||| = |||nQ_1 + \ldots + nQ_{n+1}||| \\ &\leq \quad |||Q_1 + \ldots + Q_n||| + |||Q_1 + \ldots + Q_{n-1} + Q_{n+1}||| + \\ &\quad\ \ \ldots + |||Q_2 + \ldots + Q_{n+1}||| \\ &= \quad (n+1)|||Q_1 + \ldots + Q_n||| = (n+1)|||P_n|||, \end{aligned}$$

also

$$c_n := \frac{1}{n}|||P_n||| \geq \frac{1}{n+1}|||P_{n+1}||| =: c_{n+1},$$

d. h. die Folge (c_n) ist nichtwachsend.

Nehmen wir an, daß $c_n \to 0$ *nicht* gilt. Dann existiert $c > 0$ mit $c_n \geq c$ für alle n. Also gilt $|||P_n||| \geq nc$ und für $\lambda_k \geq 0$

$$\begin{aligned}
&nc(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)|||P_n||| \\
&= \quad |||(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)(Q_1 + \ldots + Q_n)||| \\
&\leq \quad |||\lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n||| + |||\lambda_2 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_{n-1} + \lambda_1 Q_n||| + \ldots \\
&\quad\quad + |||\lambda_n Q_1 + \lambda_1 Q_2 + \ldots + \lambda_{n-1} Q_n||| \\
&\quad\quad \text{(wegen unitärer Invarianz)} \\
&= \quad n|||\lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n|||,
\end{aligned}$$

und somit

$$c(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \leq |||\lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n|||.$$

Da für $K_n := \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n$ gilt $\|K_n\|_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, folgt

$$c\|K_n\|_1 \leq |||K_n||| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und dies gilt (wegen unitärer Äquivalenz) für jeden endlichdimensionalen Operator.

Da sich jeder Operator K mit $|||K||| < \infty$ durch endlichdimensionale Operatoren bezüglich der Norm $|||\cdot|||$ approximieren läßt, gilt diese Ungleichung für alle K mit $|||K||| < \infty$. Das ist ein Widerspruch zur Feststellung („es gibt kein $C \geq 0$ mit $|||\cdot||| \geq C\|\cdot\|_1$“) am Anfang des Beweises; also gilt $c_n \to 0$. ∎

Beweis von Satz 2. Sei $E(\cdot)$ die Spektralschar von A. Dann gibt es ein $a > 0$ mit

$$\Big\|\Big(I - (E(a) - E(-a))\Big)x\Big\| < \eta.$$

Für (zunächst beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ sei

$$E_k := E\Big(\frac{2k-n}{n}a\Big) - E\Big(\frac{2k-n-2}{n}a\Big), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(man hat hier das Intervall $(-a, a)$ in n gleiche Teile geteilt und E_k sind die Spektralprojektionen zu diesen Teilintervallen; später werden noch die Mittelpunkte $\lambda_k = \dfrac{2k-n-1}{n}a$, $k = 1, \ldots, n$, eine Rolle spielen). Offenbar gilt

$$E_j E_k = \delta_{jk} E_k \quad \text{für} \quad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir definieren

$$x_k := E_k x \quad \text{und } y_k := \frac{1}{\|x\|_k} x_k \quad (= 0, \text{ falls } x_k = 0).$$

Wenn wir die eventuell auftretenden $y_k = 0$ ignorieren, bildet $\{y_k\}$ eine orthonormale Familie (man mache sich im folgenden klar, daß die y_k mit $y_k = 0$ nicht stören). Jedenfalls gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k = (E(a) - E(-a))x.$$

Die y_k sind offenbar „approximative Eigenwerte“ von A im folgenden Sinn:

$$\|(A - \lambda_k)y_k\| \leq \frac{a}{n} \quad \text{für} \quad \lambda_k = \frac{2k-n-1}{n} a.$$

Sei nun P die orthogonale Projektion auf $L\{y_1, \ldots, y_n\}$. Dann ist $\dim P \leq n$ und es gilt

$$\|(I-P)x\| = \|(I-P)[x - (E(a) - E(-a))x\| \leq \|x - (E(a) - E(-a))x\| < \eta$$

(da $R(P) \subset R(E(a) - E(-a))$ und somit $(I-P)(E(a) - E(-a) = 0$ gilt). Da $(I-P)y_k = 0$ ist, gilt weiter

$$\|(I-P)Ay_k\| = \|(I-P)(A-\lambda_k)y_k\| \leq \|(A-\lambda_k)y_k\| \leq \frac{a}{n}.$$

Wir zeigen jetzt

$$(I-P)Ay_j \perp (I-P)Ay_k \quad \text{für} \quad j \neq k. \tag{$*$}$$

Dazu genügt es $(I-P)Ay_k \in R(E_k)$ zu beweisen. Da $y_k \in R(E_k)$ ist und A von $R(E_k)$ reduziert wird, gilt auch

$$Ay_k \in R(E_k)$$

und somit

$$Ay_k \perp y_j \quad \text{für} \quad j \neq k.$$

Da sich P in der Form $Pz = \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, z\rangle y_j$ schreiben läßt, folgt auch

$$PAy_k = \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, Ay_k\rangle y_j = \langle y_k, Ay_k\rangle y_k \in R(E_k),$$

also insgesamt $(I-P)Ay_k \in R(E_k)$, womit $(*)$ bewiesen ist.

Wir schätzen nun die Norm von $(I-P)AP$ ab: Für alle $n \in X$ gilt (da die $(I-P)Ay_k$ paarweise orthogonal sind und $\|(I-P)Ay_k\| \leq \frac{a}{n}$) gilt

$$\begin{aligned}\|(I-P)APu\|^2 &= \|(I-P)\sum_k \langle y_k, u\rangle Ay_k\|^2 = \Big\| \sum_k \langle y_k, u\rangle (I-P)Ay_k \Big\|^2 \\ &= \sum_k |\langle y_k, u\rangle|^2 \|(I-P)Ay_k\|^2 \leq \|u\|^2 \frac{a^2}{n^2},\end{aligned}$$

also

$$\|(I-P)AP\| \leq \frac{a}{n}.$$

Mit Satz 3 folgt daraus

$$|||(I-P)AP||| \leq nc_n \frac{a}{n} = c_n a \quad \text{mit } c_n \to 0$$

und somit

$$|||(I-P)AP||| = |||PA(I-P)||| < \frac{\eta}{2} \ \text{ für hinreichend großes } n.$$

Wegen

$$A = PAP + (I+P)A(I-P) + (I-P)AP + PA(I-P)$$

gilt

$$A - (I-P)AP - PA(I-P) = PAP + (I-P)A(I-P).$$

Da hier offensichtlich die rechte Seite von $R(P)$ reduziert wird, ist das Lemma mit

$$B := -(I-P)AP - PA(I-P), \quad |||B||| < \eta$$

bewiesen. (Die weitere Aussage $\|(I-P)x\| < \eta$ wurde bereits oben bewiesen.) ■

Wir kommen nun zum

Beweis des Satzes von Weyl, v. Neumann, Kuroda. Sei $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Wir wenden Hilfssatz 2 auf den Operator A im Hilbertraum X, $x_1 := u_1$ und $\eta := \frac{\varepsilon}{2}$ an. Die entsprechenden Operatoren P und B bezeichnen wir mit P_1 und B_1. Es gilt also

$$\|(I-P_1)x_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, |||B_1||| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ und } R(P_1) \ \text{ reduziert } A + B_1.$$

Nun wendet man den Hilfssatz 2 auf $A+B_1$ in $(I-P_1)X$ (d. h. auf $A_1 := (A+B_1)\Big|_{R(I-P_1)}$), $x_2 := (I-P_1)u_2$ und $\eta := \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2^2}$ an. Die entsprechenden Operatoren P und B bezeichnen wir mit P_2 und B_2. Diese können natürlich auf ganz X fortgesetzt werden, indem sie auf $R(P_1)$ gleich 0 gesetzt werden; insbesondere ändert sich dadurch die p–Norm nicht. Es gilt

$$\|(I-P_2)x_2\| < \frac{\varepsilon}{4}, |||B_2||| < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ und}$$
$$R(P_1) \ \text{ und } R(P_2) \ \text{ reduzieren } A + B_1 + B_2$$

(dazu beachte man, daß B_2 auf $R(P_1)$ verschwindet).

Nun wendet man das Lemma auf $A + B_1 + B_2$ in $R(I - P_1 - P_2)$ (also auf $A_2 := (A + B_1 + B_2)\Big|_{R(I-P_1-P_2)}$) an…

Dieses Verfahren liefert:

– endlichdimensionale orthogonale Projektionen $P_1, P_2, \ldots$ mit $P_j P_k = \delta_{jk} P_{ik}$ und

$$\Big\|(I - P_1 - \ldots - P_k)u_k\Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2^k},$$

– selbstadjungierte Operatoren $B_1, B_2, \ldots(X)$ mit $B_k R(I - P_{k-1}) \subset R(I - P_{k-1})$ und $|||B_k||| < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$.

Es existiert also $B := \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ mit $|||B||| < \varepsilon$. Es gilt weiter:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k = I$: Ist nämlich ein $x \in X$ und ein $\delta > 0$ gegeben, dann existiert (da $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist) ein n mit $\|u_n - u\| < \dfrac{\delta}{2}$ und $\dfrac{\varepsilon}{2^n} < \dfrac{\delta}{2}$. Wegen $\|(I - P_1 - \ldots - P_n)u_n\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2^n} < \dfrac{\delta}{2}$ ist dann

$$\|(I - P_1 - \ldots - P_n)u\| \leq \|(I - P_1 - \ldots - P_n)(u - u_n)\| + \|(I - P_1 - \ldots - P_n)u_n\| < \delta,$$

also $\sum_{k=1}^{\infty} P_k u = n$.

(ii) Alle $R(P_k)$ reduzieren $A+B$: Für jedes n ist $R(P_n)$ ein Teilraum von $R(I - P_1 - \ldots - P_{n-1})$, der $A + B_1 + \ldots + B_n$ reduziert. Also ist P_n mit $A + B_1 + \ldots + B_n$ vertauschbar. Da außerdem $P_n B_k = B_k P_n = 0$ für $k > m$ gilt, ist P_n mit $A+B$ vertauschbar, d. h. $R(P_n)$ reduziert $A+B$.

(iii) Jedes $R(P_k)$ ist endlichdimensional und reduziert $A+B$. Es existiert also in jedem $R(P_k)$ eine ONB von Eigenelementen von $A+B$. Wegen $\oplus R(P_k) = X$ liefert die Vereinigung dieser ONBen eine ONB von X, die aus Eigenelementen von $A+B$ besteht. $A+B$ hat reines Punktspektrum. ■

9 Stabilität des absolut stetigen Spektrums bei Spurklassen–Störungen

In diesem Abschnitt wird ein einfaches Resultat aus der Streutheorie mit Spurklassenstörungen unter stark vereinfachten Bedingungen reproduziert. Für wesentlich allgemeinere Resultate vergleiche man Abschnitt 22.3 aus [8].

Wir wissen aus früheren Abschnitten:

– kompakte (d. h. C_∞–)Störungen ändern das wesentliche Spektrum eines selbstadjungierten Operators nicht,

- beliebig kleine Störungen aus C_p ($p > 1$) können das gesamte Spektrum eines selbstadjungierten Operators im separablen Hilbertraum in ein reines Punktspektrum umwandeln.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß auch bei beliebig kleinen C_1–Störungen (sogar C_p mit $p < 1$) Eigenwerte auftreten können, wo vorher keine waren.

Beispiel 9.1 Sei A_0 der Operator in $L^2(0,2)$ mit

$$D(A_0) = L^2(0,1), \quad A_0 f(x) = x f(x).$$

Offensichtlich ist A_0 beschränkt und selbstadjungiert, positiv und hat keine Eigenwerte.

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ sei

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \chi_{(0,\varepsilon)}(x), \quad \|\varphi\| = 1,$$
$$K := -1\varepsilon \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi.$$

Dann ist K ein 1–dimensionaler selbstadjungierter Operator und es gilt

$$\langle \varphi, (A_0 + K)\varphi \rangle = \langle \varphi, A_0 \varphi \rangle - 2\varepsilon < -\varepsilon.$$

Also hat $A_0 + K$ mindestens einen negativen Eigenwert. Andererseits hat $A_0 + K$ sicher nicht mehr als einen negativen Eigenwert, denn sonst wäre $\dim E_{A_0}(0) \geq 2$, d. h. es gäbe ein $g \in \{\varphi\}^\perp \cap R(E_{A_0+K}(0))$ mit $\|g\| = 1$. Wegen $Kg = 0$ gilt dann aber

$$\langle g, (A_0 + K)g \rangle = \langle g, A_0 g \rangle > 0,$$

ein Widerspruch zu $g \in R(E_{A_0+K}(0))$. $\square$

Indem man eine geeignete orthogonale Summe von „ähnlich“ gebauten Operatoren betrachtet, kann man natürlich auch Eigenwerte im Inneren des kontinuierlichen Spektrums erzeugen.

Ähnlich kann man, beim gleichen ungestörten Operator A_0, mit einer n–dimensionalen Störung bis zu n negative Eigenwerte erzeugen. Aber es ist auch möglich, mit $K \in C_1$ (sogar $K \subset C_r$ mit $r < 1$) abzählbar viele negativen Eigenwerte zu erzeugen, die sich dann natürlich bei 0 häufen müssen.

Beispiel 9.2 Sei A_0 wie oben,

$$\varphi_n(x) := C_{\varepsilon,n} \chi_{\left(\frac{\varepsilon}{(n+1)^2}, \frac{\varepsilon}{n^2}\right)}(x), \quad \|\varphi_n\| = 1,$$
$$K := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{n^2} \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n.$$

Offensichtlich ist $K \in C_1$ mit $\|K\|_1 = 2\varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, und für alle $f \in L\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$, $f = \sum c_n \varphi_n$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f, (A_0 + K)f \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Big\{ \langle \varphi_n, A_0 \varphi_n \rangle + \langle \varphi_n, K \varphi_n \rangle \Big\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Big\{ \frac{\varepsilon}{n^2} - \frac{2\varepsilon}{n^2} \Big\} < 0 \end{aligned}$$

(dabei wurde benutzt, daß $\langle \varphi_m, A_0 \varphi_n \rangle = \langle \varphi_m, K \varphi_n \rangle = 0$ gilt für $n \neq m$). Es gibt also einen unendlich–dimensionalen Teilraum, auf dem $A_0 + K$ negativ ist, d. h. $A_0 + K$ hat unendlich viele negative Eigenwerte (die sich natürlich bei 0 häufen müssen; da K kompakt ist, kann kein anderes Spektrum in $(-\infty, 0)$ vorliegen). □

Es kann also viel passieren bei endlichdimensionalen oder Spurklasse–Störungen. Andererseits bleibt das „absolut stetige Spektrum“ erhalten. Ohne diesen Begriff hier genauer zu diskutieren zeigen wir im folgenden exemplarisch an einem einfachen Beispiel, daß der „absolut stetige Teil“ von T unitär äquivalent zu einem Teil von $T + K$ ist, wenn K aus der Spurklasse ist.

Dazu betrachten wir wieder den einfachen Operator A_0 in $L^2(0,1)$,

$$D(A_0) = L^2(0,1), \quad A_0 f(x) = x f(x).$$

Ein technischer Vorteil liegt darin, daß A_0 und der unten betrachtete Operator $A = A_0 + K$ beschränkt sind. Die Spektralschar E_0 von A_0 ist explizit gegeben durch

$$E_0(\lambda) f = \chi_{(-\infty,\lambda]} f = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq 0, \\ \chi_{[0,\lambda]} f & \text{für } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ f & \text{für } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$\|E_0(\lambda) f\|^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq 0, \\ \int\limits_0^{\lambda} |f(x)|^2 & \text{für } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \|f\|^2 & \text{für } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \|E_0(\lambda) f\|^2$ ist also für jedes $f \in L^2(0,1)$ absolut stetig; das ist die Bedeutung von „das Spektrum von A_0 ist (rein) absolut stetig“. Insbesondere hat A_0 keine Eigenwerte. Dieses absolut stetige Spektrum $[0,1]$ bleibt bei C_1–Störungen erhalten; i. allg. kommen allerdings noch andere Spektralteile dazu, die sich u. U. mit dem absolut stetigen Teil überlagern.

Satz 9.3 *Wie oben sei A_0 in $L^2(0,1)$ definiert durch*

$$D(A_0) = L^2(0,1), \quad A_0 f(x) = x f(x).$$

Weiter sei $V \in C_1$ selbstadjuniert, $A := A_0 + V$. Dann existieren

$$\Omega_\pm f := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itA}e^{-itA_0} f \quad \textit{für alle } f \in L^2(0,1).$$

(In der Streutheorie heißen diese $\Omega_\pm$ Møller–Wellenoperatoren.*)*

Aus diesem Satz folgt:

- $\Omega_\pm$ sind isometrische (aber i. allg. nicht unitäre[1]) Operatoren: Da $\Omega(t) : e^{itA}e^{-itA_0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist, folgt

  $$\|\Omega_\pm f\| = \lim_{t\to\pm\infty} \|e^{itA}e^{-itA_0} f\| = \|f\| \quad \text{für alle } f \in L^2(0,1).$$

- Die Operatoren $\Omega_\pm$ haben folgende (intertwining=verbindende=verflechtende) Eigenschaft:

  $$\Omega_\pm A_0 = A\Omega_\pm.$$

  Zunächst gilt für alle $f \in L^2(0,1)$

  $$\begin{aligned}\Omega_\pm e^{isA_0} f &= \lim_{t\to\pm\infty} e^{itA}e^{-itA}e^{isA_0} f = \lim_{t\to\pm\infty} e^{isA}e^{i(t-s)A}e^{-i(t-s)A_0} f \\ &= \lim_{\tau\to\infty} e^{isA}e^{i\tau A}e^{-i\tau A_0} f = e^{isA}\Omega \pm f.\end{aligned}$$

  Differentiation nach s liefert die Behauptung.

- Sind $P_\pm$ die orthogonalen Projektionen auf $R(\Omega_\pm)$, so gilt also

  $$A_0 = \Omega_\pm^* A P_\pm \Omega_\pm = \Omega_\pm^* P_\pm A P_\pm \Omega_\pm,$$

  d. h. die Einschränkungen von A auf $R(\Omega_\pm)$ ist unitär äquivalent zu A_0.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir die folgende einfache Version des Cookschen Lemmas (J. M. COOK 1957):

[1] Man beachte, daß aus U_n unitär für alle n und $U_n f \to Uf$ alle f i. allg. nicht folgt, daß U unitär ist, Beispiel: In ℓ^2 sei für $x = (x_1, x_2, \ldots)$

$$U_n x = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Offensichtlich sind alle U_n unitär, aber es gilt

$$U_n x \to (0, x_1, x_2, \ldots) =: Ux,$$

d. h. U ist nicht unitär. (Es dürfte dem Leser nicht schwer fallen, sich in $L^2(0,\infty)$ ein kontinuierliches Analogon U_t zu basteln, für das der Limes $t \to \infty$ zwar isometrisch, aber nicht unitär ist.)

Lemma 9.4 *Seien A_0, V und A wie oben (können auch wesentlich allgemeiner sein). Ist die Funktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|Ve^{-itA_0}f\|$$

bei $-\infty$ bzw. $+\infty$ integrierbar, so existiert $\Omega_- f$ bzw. $\Omega_+ f$. (Ist die Funktion bei $+\infty$ und $-\infty$ integrierbar, so existieren $\Omega_+ f$ und $\Omega_- f$.)

Beweis. Ist $h : \mathbb{R} \to X$ (X Banachraum) stetig differenzierbar und ist $\|h'(\cdot)\|$ bei $-\infty$ bzw. $+\infty$ integrierbar, so existiert $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t)$ bzw. $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$ (Beweis: Man zeigt, daß $\|h(t) - h(s)\|$ klein ist für t und s nahe $-\infty$ bzw. $+\infty$).

Im obigen Fall ist mit $h(t) = \Omega(t)f$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Omega(t)f &= \frac{d}{dt}e^{itA}e^{-itA_0}f = e^{itA}(iA - iA_0)e^{-itA_0}f \\
&= ie^{itA}Ve^{-itA_0}f \\
\|\frac{d}{dt}\Omega(t)f\| &= \|Ve^{-itA_0}f\|.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung sofort aus obiger Feststellung. ■

Beweis des Satzes. Der Beweis dieses Satzes folgt i. wes. dem Beweis von Satz 11.8 in [6].

1. Schritt: Die Behauptung gilt für $f \in C_0^\infty(0,1)$, wenn V die Form

$$Vf = \sum_{j=1}^n c_j \langle \varphi_j, f\rangle \varphi_j$$

hat mit $\varphi_j \in C_0^\infty(0,1)$ (und o. E. $\|\varphi_j\| = 1$). Zusätzlich gilt unter dieser Voraussetzung für $f \in C_0^\infty(0,1)$

$$\begin{aligned}
&\|\Omega(t)f - \Omega(s)f\|^2 \\
&\le 8\pi\|f\|_\infty \sum_{j=1}^n |c_j| \Big\{ \Big(\int_t^\infty |F(\overline{\varphi_j}f)(u)|^2 \,\mathrm{d}u \Big)^{1/2} + \Big(\int_s^\infty |F(\overline{\varphi_j}f)(u)|^2 \,\mathrm{d}u \Big)^{1/2} \Big\}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage gilt mit den Integralen $\int\limits_{-\infty}^t$ und $\int\limits_{-\infty}^s$.

Beweis des 1. Schrittes: Wegen $e^{-itA_0}f(x) = e^{-itx}f(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Ve^{-itA_0}f\| &= \sum_{j=1}^n c_j \int_0^1 \overline{\varphi_j(x)} e^{-itx} f(x) \,\mathrm{d}x \,\varphi_j\| \\
&\le \sum_{j=1}^n |c_j| (2\pi)^{1/2} |F(\overline{\varphi_j}f)(t)|,
\end{aligned}$$

wobei F die Fouriertransformation ($L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$) ist und $\overline{\varphi_j} f$ durch 0 auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt gedacht ist. Diese endlich vielen Summanden sind wegen $\overline{\varphi_j} f \in C_0^\infty$ schnell–fallend, also ist $\|Ve^{-itA_0}f\|$ über ganz $\mathbb{R}$ integrierbar, $\Omega_\pm f$ existieren. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
&\|\Omega_+ f - \Omega(t) f\|^2 = \|\Omega_+ f\|^2 + \|\Omega(t) f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle \Omega_+ f, \Omega(t) f\rangle \\
&= \quad 2\|\Omega_+ f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle \Omega_+ f, \Omega(t) f\rangle \\
&= \quad 2\,\mathrm{Re}\,\langle \Omega_+ f, \Omega_+ f - \Omega(t) f\rangle = 2\,\mathrm{Re} \int_t^\infty \frac{d}{ds}\langle \Omega_+ f, \Omega(s) f\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \quad 2\,\mathrm{Re}\, i \int_t^\infty \langle \Omega_+ f, e^{isA} V e^{-isA_0} f\rangle \,\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{Im} \int_t^\infty \langle \Omega_+ e^{-isA_0} f, V e^{-isA_0} f\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \quad -2\,\mathrm{Im} \sum_{j=1}^n c_j \int_t^\infty \langle \Omega_+ e^{-isA_0} f, \varphi_j\rangle \langle \varphi_j, e^{-isA_0} f\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\le \quad 2 \sum_{j=1}^n |c_j| \Big\{ \int_t^\infty \Big|\langle \Omega_+ e^{-isA_0} f, \varphi_j\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}s \int_s^\infty \Big|\langle \varphi_j, e^{-isA_0} f\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}s \Big\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\infty \Big|\langle \Omega_+ e^{-isA_0} f, \varphi_j\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}s = \int_t^\infty \Big| e^{-isA_0} f, \Omega_+^* \varphi_j\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \quad \int_t^\infty \Big| e^{isx} \overline{f(x)} (\Omega_+^* \varphi_j)(x)\,\mathrm{d}x\Big|^2 \,\mathrm{d}s \le 2\pi \Big\| F^{-1}(\overline{f}(\Omega_+^* \varphi_j))\Big\|^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \quad 2\pi \|\overline{f}(\Omega_+^* \varphi_j)\|^2 \le 2\pi \|f\|_\infty \|\Omega_+^* \varphi_j\| \le 2\pi \|f\|_\infty,
\end{aligned}
$$

$$
\int_t^\infty \Big|\langle \varphi_j, e^{-isA_0} f\rangle\Big|^2 \,\mathrm{d}s = 2\pi \int_t^\infty \Big| F(\overline{\varphi}_j f)(s)\Big|^2 \,\mathrm{d}s,
$$

also

$$
\|\Omega_+ f - \Omega(t) f\|^2 \le 4\pi \|f\|_\infty \sum_{j=1}^n |c_j| \Big\{ \int_t^\infty |F(\overline{\varphi}_j f)(s)|^2 \,\mathrm{d}s \Big\}^{1/2}.
$$

Damit folgt (mit der entsprechenden Ungleichung für s statt t)

$$
\begin{aligned}
\|\Omega(t) f - \Omega(s) f\|^2 \quad &\le \quad 2\Big(\|\Omega_+ f - \Omega(t) f\|^2 + \|\Omega_+ f - \Omega(s) f\|^2\Big) \\
&\le \quad \text{wie in (*) behauptet.}
\end{aligned}
$$

2. Schritt: Die Aussage gilt für allgemeines $V \in C_1$,

$$
V = \sum_{j=1}^\infty c_j \langle \varphi_j, \cdot\rangle \varphi_j \quad \text{mit } \|\varphi_j\| = 1, \sum_{j=1}^\infty |c_j| < \infty,
$$

und $f \in C_0^\infty(0,1)$.

Beweis des 2. Schrittes: Für jedes $j \in \mathbb{N}$ wählt man eine Folge $(\varphi_{j,n})_n$ aus $C_0^\infty(0,1)$ mit $\|\varphi_{j,n}\| \leq 1$ und $\|\varphi_{j,n} - \varphi_j\| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt im Sinne der Operatornorm–Konvergenz (aber auch z. B. im Sinne der $\|\cdot\|_1$–Norm)

$$V_n := \sum_{j=1}^n c_j \langle \varphi_{j,n}, \cdot \rangle \varphi_{j,n} \to V.$$

Mit $A_n := A_0 + V_n$ und $\Omega_n(t) = e^{itA_n} e^{-itA_0}$ gilt dann

$$e^{it_nA} f \to e^{itA} f \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } f \in L^2(0,1),$$

$$\Omega_n(t) f \to \Omega(t) f \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } f \in L^2(0,1).$$

Die obige Abschätzung gilt für Ω_n statt Ω mit $\varphi_{j,n}$ statt φ_j. Wegen

$$\overline{\varphi}_{j,n} f \to \overline{\varphi_j} f \qquad \text{und} \qquad F(\overline{\varphi}_{j,n} f) \to F(\overline{\varphi}_j f)$$

für $f \in C_0^\infty(0,1)$ folgt damit für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\|\Omega(t)f - \Omega(s)f\|^2 \\ &\leq 8\pi \|f\|_\infty \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 \Big\{ \Big(\int_t^\infty |F(\overline{\varphi_j} f)(u)|^2 \, du \Big)^{1/2} + \Big(\int_s^\infty |F(\overline{\varphi_j} f)(u)|^2 \, du \Big)^{1/2} \Big\}. \end{aligned}$$

Da die Integralterme alle durch $\|\overline{\varphi}_j f\| = \|f\|_\infty$ beschränkt sind, für $t, s \to \infty$ gegen 0 konvergieren, und $\sum |c_j| < \infty$ ist, wird also $\|\Omega(t)f - \Omega(s)f\|$ klein für große s und t. Also existiert $\Omega_+ f = \lim_{t\to\infty} \Omega(t) f$ für $f \in C_0^\infty(0,1)$. Entsprechend folgt die Existenz des Grenzwerts $\Omega_- f$ für $t \to -\infty$, indem man die Integrale $\int_{-\infty}^t$ und $\int_{-\infty}^s$ verwendet.

3. Schritt: Die Aussage gilt auch für beliebiges $f \in L^2(0,1)$.

Beweis des 3. Schrittes: Ist $f \in L^2(0,1)$ beliebig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f_\varepsilon \in C_0^\infty(0,1)$ mit

$$\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und ein $t_\varepsilon^+ \in \mathbb{R}$ mit

$$\|\Omega(s) f_\varepsilon - \Omega(t) f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } s, t \geq t_\varepsilon^+.$$

Damit folgt für $s, t \geq t_\varepsilon^+$

$$\begin{aligned} \|\Omega(s)f - \Omega(t)f\| &\leq \|\Omega(s)(f - f_\varepsilon)\| + \|(\Omega(s) - \Omega(t)) f_\varepsilon\| + \|\Omega(t)(f_\varepsilon - f)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also existiert $\Omega_+ f = \lim_{t\to\infty} \Omega(t) f$.

Entsprechend folgt die Existenz von

$$\Omega_- f = \lim_{t\to-\infty} \Omega(t) f.$$

■

10 Der Spursatz von V. B. Lidskiǐ

Es handelt sich hier um eine Übertragung des elementaren Resultats, daß die Spur einer Matrix gleich der Summe der Eigenwerte ist, auf Spurklassenoperatoren. Der Beweis ist (hoffentlich) leichter zugänglich als die in der Literatur vorhandenen.

Ein erster Beweis wurde von V. B. Lidskiǐ gegeben (Dokl. Akad. Nauk. SSSR **125** (1959), 485–487). Weitere Beweise findet man bei Dunford–Schwartz Teil II (SatzXI. 9.19), B. Simon, (Adv. Math. **24** (1977), 244–273) und J. R. Retherford „Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem (1993). Wir folgen hier in etwa Dunford–Schwartz.

Satz 10.1 *Sei K ein kompakter Operator im Hilbertraum X. Für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist der verallgemeinerte Eigenraum (Hauptraum) endlich–dimensional (d. h. jeder von 0 verschiedene Eigenwert hat endliche algebraische Vielfachheit; der weiter oben gegebene Satz lieferte nur endliche geometrische Vielfachheit).*

Beweis. Offenbar gilt

$$X_1 := N(K-\lambda) \subset X_2 := N((K-\lambda)^2) \subset \ldots \subset X_n := ((K-\lambda)^n) \subset X_{n+1} \ldots$$

Wir wissen bereits: $k := \dim X_1 < \infty$.

Daraus folgt $\dim X_n \leq nk$: Beweis durch Induktion: Die Aussage ist richtig für $n = 1$. Sei $\dim X_{n-1} \leq (n-1)k$. Wäre $\dim X_n > nk$, so würde aus

$$X_n = \{x : (K-\lambda)x \in X_{n-1}\}$$

folgen $\dim N(K-\lambda) > k$, ein Widerspruch!

Wir zeigen nun: Es gibt ein $n = n(\lambda) \in \mathbb{N}$ mit

$$X_{n+1} = X_n \quad \text{und damit } X_{n+k} = X_n \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Aus der Annahme, daß es ein solches n nicht gibt, folgt die Existenz einer orthonormalen Folge (x_n) mit $x_n \in X_n \cap X_{n-1}^{\perp}$, insbesondere auch $x_n \xrightarrow{w} 0$ und somit $Kx_n \to 0$. Es gilt andererseits

$$(K-\lambda)x_1 = 0, \quad Kx_1 = \lambda x_1, \quad \|Kx_1\| = |\lambda|$$

$$(K-\lambda)x_{n+1} \in X_n = N((K-\lambda)^n),$$

$$Kx_{n+1} = \lambda x_{n+1} + u_n \quad \text{mit} \quad u_n \in X_n, u_n \perp x_{n+1}$$

also

$$\|Kx_{n+1}\| = |\lambda| + \|u_n\| \geq \lambda,$$

im Widerspruch zu $Kx_n \to 0$. ∎

Satz 10.2 *Sei K ein kompakter Operator im Hilbertraum X, λ ein von 0 verschiedener Eigenwert, $n = n(\lambda)$ wie im obigen Beweis (d. h. $N((K-\lambda)^{n-1}) \subsetneq N((K-\lambda)^n) = N((K-\lambda)^{n+1})$). Dann gibt es in $N((K-\lambda)^n)$ eine (Orthonormal-)Basis $\{x_j : j = 1, \dots, N(\lambda)\}$ so, daß K bezüglich dieser Basis durch eine obere Dreiecksmatrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

dargestellt wird.

Beweis. Sei $k_j := \dim((N-\lambda)^j)$, also $N(\lambda) = k_{n(\lambda)}$,

$$\{x_1, \dots, x_{k_1}\} \text{ eine ONB von } N(K-\lambda),$$

$$\{x_1, \dots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2}\} \text{ eine ONB von } N((K-\lambda)^2), \quad \text{usw.}$$

Damit gilt die Behauptung. ∎

Satz 10.3 *Sei K ein kompakter Operator im Hilbertraum X. In der (abgeschlossenen) linearen Hülle aller verallgemeinerten Eigenräume gibt es eine ONB $\{e_j\}$ bezüglich der K durch eine obere Dreiecksmatrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & \\ & \ddots & & & & * & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mu_1 & & & * \\ & \mu_2 & & \\ & & \mu_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dargestellt wird (hierdurch wird eine neue Numerierung $\{\mu_j\}$ der Eigenwerte $\{\lambda_j\}$ definiert). Insbesondere gilt

$$\langle e_j, K e_j \rangle = \mu_j \quad \textit{für alle } j.$$

Beweis. Eine solche Basis erhält man z. B. durch Orthonormalisieren der Elemente

$$\left\{ x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}, x_1^{(3)}, \dots \right\},$$

wobei $\left\{ x_1^{(j)}, \dots, x_{k_j}^{(j)} \right\}$ eine ONB von $N\Big((K-\lambda)^{n(\lambda_j)}\Big)$ ist. ∎

Satz 10.4 (Weylsche Ungleichungen) *Sei K ein kompakter Operator im Hilbertraum X, $\{\mu_j\}$ seien die dem Betrag nach fallend geordneten Eigenwerte von K (im Sinne des vorhergehenden Satzes numeriert), $\{s_j\}$ die singulären Werte von K. Dann gilt*

a) $\prod_{j=1}^{n} |\mu_j| = \prod_{j=1}^{n} s_j$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Ist außerdem $K \in C_p(X)$, so gilt*

$$\sum |\mu_j|^p \leq \sum s_j^p = \|K\|_p^p.$$

Beweis. a) Sei $\{e_j\}$ das im vorhergehenden Satz konstruierte ONS. Ist $L_n := L\{e_1, \ldots, e_n\}$, so wird die Einschränkung von K auf L_n durch eine Matrix der Form

$$M_n = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

erzeugt und es gilt

$$\prod_{j=1}^{n} |\mu_j| = \Big| \prod_{j=1}^{n} \mu_j \Big| = |\det M_n|.$$

Ist P_n die orthogonale Projektion auf L_n, so wird der Operator $P_n K^* P_n$ durch die Matrix M_n^* erzeugt, und $M_n^* M_n$ erzeugt den Operator $P_n K^* K P_n$. Sind $\kappa_1^{(n)}, \ldots, \kappa_n^{(n)}$ die Eigenwerte (= singulären Werte) von $(P_n K^* K P_n)^{1/2} = P_n |K| P_n$, so gilt also

$$\prod_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 = |\det M_n|^2 = \det M_n^* M_n = \prod_{j=1}^{n} (\kappa_j^{(n)})^2.$$

Die inf–sup–Charakterisierung der singulären Werte liefert

$$\begin{aligned}
\kappa_j^{(n)} &= \inf_{x_1,\ldots,x_n} \sup \Big\{ \|P_n|K|P_n x\| : x \perp x_1, \ldots, x_n, \|x\| = 1 \Big\} \\
&\leq \inf_{x_1,\ldots,x_n} \sup \Big\{ \| \, |K| x \| : x \perp x_1, \ldots, x_n, \|x\| = 1 \Big\} \\
&= s_j(K) = s_j.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\prod_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 = \prod_{j=1}^{n} (\kappa_j^{(n)})^2 \leq \prod_{j=1}^{n} s_j^2.$$

Das ist die Behauptung.

b) Mit dem im vorhergehenden Satz konstruierten ONS gilt

$$\begin{aligned}
\sum |\mu_j|^p &= \sum |\langle e_j, K e_j \rangle|^p \\
&= \sup \Big\{ \sum |\langle e_j, K f_j \rangle|^p : \{e_j\}, \{f_j\} \text{ ON–Folgen } \Big\} \\
&= \|K\|_p^p.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 10.5 *Man beachte, daß die den Weylschen Ungleichungen entsprechenden Ungleichungen nicht für die einzelnen Eigenwerte und singulären Werte gilt. So gilt z. B. im Allgemeinen nicht $\mu_2 \leq s_2$. Dies kann schon aneinem 2–dimensionalen Operator gezeigt werden:*

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Die singulären Werte sind die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

mit den Nullstellen (= Quadrate der singulären Werte)

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \sim \frac{3 \pm 2,236}{2} = 2,618 \quad \textit{bzw.}\ 0,382.$$

Damit sind die singulären Werte

$$s_1 \sim 1,618 \quad \textit{bzw.}\ s_2 \sim 0,618.$$

Es gilt also (wie es sein soll)

$$\mu_1 = 1 \leq 1,618 = s_1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 2 \leq 2,236 = s_1 + s_2, \mu_1\mu_2 = 1 = s_1 s_2,$$

aber

$$\mu_2 = 1 > 0,618 = s_2.$$

Zum Beweis, daß ein quasinilpotenter kompakter Operator aus $C_1(X)$ (d. h. $\|K^n\|^{1/n} \to 0$ für $n \to \infty$, $\varrho(K) = \{0\}$) die Spur 0 hat, brauchen wir noch das folgende funktionentheoretische

Lemma 10.6 (Carathéodory) *Sei f holomorph für $|z| \leq R$, $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ für $|z| = R$. Dann gilt $|f(z)| \leq 2M$ für $|z| \leq \dfrac{R}{2}$.*

Beweis. Wir definieren

$$g(z) := h \circ f(z) = \frac{f(z)}{2M - f(z)} \quad \text{für } |z| \le R$$

mit $h(\xi) = \dfrac{\xi}{2M - \xi}$.

h bildet $H_M := \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} \le M\}$ in den Einheitskreis ab, und es gilt $h(0) = 0$. Also bildet g die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ in den Einheitskreis ab, und es gilt $g(0) = 0$.

Daraus folgt, daß $\dfrac{g(z)}{z}$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ holomorph ist (genauer: $g = h \circ f$ ist holomorph nach 0 fortsetzbar), und es gilt

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right| \le \frac{1}{R} \quad \text{für } |z| = R.$$

Mit dem Maximumprinzip folgt

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(z)}{z}\right| &\le \frac{1}{R} \quad \text{für } |z| \le R,\\ |g(z)| &\le \frac{|z|}{R} \quad \text{für } |z| \le R.\end{aligned}$$

Speziell gilt also

$$\begin{aligned}&\frac{|f(z)|}{2M + |f(z)|} \le \left|\frac{f(z)}{2M - f(z)}\right| = |g(z)| \le \frac{1}{2} \quad \text{für } |z| \le \frac{R}{2},\\ &|f(z)| \le M + \frac{1}{2}|f(z)| \quad |z| \le \frac{R}{2},\\ &|f(z)| \le 2M \quad \text{für } |z| \le \frac{R}{2}\end{aligned}$$

■

Für einen Operator $K \in C_1(X)$ ist

$$\begin{aligned}\ln(I + zK) &:= zK - \frac{z^2}{2}K^2 + \frac{z^3}{3}K^3 - + \dots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(zK)^n}{n} \quad \text{für } |z| < \|K\|^{-1} \text{ bzw. } |z| < \|K\|_1^{-1}\end{aligned}$$

konvergent bezüglich $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|_1$. Tatsächlich gilt, wie man das vom Logarithmus erwartet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\ln(I + zK) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K (zK)^{n-1} = K \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (zK)^n\\ &= K(I + zK)^{-1} = \ln'(I - zK)\frac{d}{dz}(I + zK).\end{aligned}$$

Für einen n–dimensionalen Operator K mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (wenn K als n–dimensionaler Operator im unendlichdimensionalen Raum betrachtet wird, gibt es dann noch unendlich viele Eigenwerte 0; das stört im folgenden nicht, es kommen einfach unendlich viele Faktoren 1 dazu) ist

$$\begin{aligned}\det(I+zK) &= \prod_{j=1}^{n}(1+z\lambda_j) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{n}\ln(1+z\lambda_j)\Big)\\ &= \exp(\mathrm{sp}\ \ln(I+zK)).\end{aligned}$$

Deshalb definieren wir für $K \in C_1(X)$ mit $|z| < \|K_1\|^{-1}$

$$\det(I+zK) := \exp(\mathrm{sp}\ln(I+zK))$$

(beachte: für diese z ist die ln–Reihe bezüglich $\|\cdot\|_1$ konvergent). $\det(I+zK)$ ist also eine in $|z| < \|K\|_1^{-1}$ holomorphe Funktion; diese ist insbesondere stetig in z und K (letzteres bezüglich $\|\cdot\|_1$).

Satz 10.7 *Für $K \in C_1(X)$ gilt*

$$|\det(I+zK)| \leq \prod_{n=1}^{\infty}(1+|z|s_n(K)) \qquad \textit{für } |z| < \|K\|_1^{-1}.$$

Beweis. Sei K in der kanonischen Entwicklung gegeben durch

$$Kx = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K)\langle\varphi_j, x\rangle\psi_j.$$

Dann wird K durch die n–dimensionalen Operatoren

$$K_n x := \sum_{j=1}^{n} s_j(K)\langle\varphi_j, x\rangle\psi_j$$

im Sinne von $\|\cdot\|_1$ approximiert.

Für $K_n \to K$ sind beide Seiten der behaupteten Ungleichung konvergent, d. h. es genügt die Ungleichung für K_n zu beweisen: Offenbar gilt (Weylsche Ungleichung)

$$\begin{aligned}|\det(I+zK_n)| &= \prod_{j=1}^{n}|\mu_j(I+zK_n)| \leq \prod_{j=1}^{n}s_j(I+zK_n)\\ &\leq \prod_{j=1}^{n}(1+|z|s_j(K_n));\end{aligned}$$

dabei haben wir benutzt, daß für jeden kompakten Operator H und jedes j gilt

$$s_j(I+H) \leq s_1(I) + s_j(H) = 1 + s_j(H).$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung. ∎

Satz 10.8 *Ist $K \in C_1(X)$ quasinilpotent, so gilt*

$$sp\ (K) = 0.$$

Beweis. Wegen $\|K^n\|^{1/n} \to 0$ ist die Reihe für $\ln(I + zK)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent,

$$L(z) := \text{sp}\ \ln(I + zK) \quad \text{ist ganze Funktion mit} L(0) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, daß $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} s_n(K) < \varepsilon$ gilt. Dann folgt, wegen $1 + \alpha \le e^{\alpha}$,

$$|\exp(L(z))| \le \prod_{n=1}^{k} (1 + |z| s_n(K)) \exp\Big(|z| \sum_{n=k+1}^{\infty} s_n(K)\Big).$$

Da hier das erste Produkt ein Polynom in z ist, folgt daraus

$$\text{Re}\ L(z) \le 2\varepsilon|z| \quad \text{für} \quad |z| \ge C_\varepsilon, \quad \text{insbesondere für } |z| = C \ \text{ mit } C \ge C_\varepsilon.$$

Mit dem oben bewiesenen Lemma von Carathéodory folgt daraus

$$|L(z)| \le 4\varepsilon C \quad \text{für} \quad |z| \le \frac{C}{2},\ C \ge C_\varepsilon,$$

bzw.

$$|L(z)| \le 8\varepsilon|z| \quad \text{für} \quad |z| \ \text{hinreichend groß},$$

$$\left|\frac{L(z)}{z}\right| \le 8\varepsilon \quad \text{für} \quad |z| \ \text{hinreichend groß}.$$

Da $\frac{L(z)}{z}$ ganz ist und $\left|\frac{L(z)}{z}\right| \to 0$ für $|z| \to \infty$ gilt, folgt (Erster Satz von Liouville) $L(z) \equiv 0$. Aus

$$0 \equiv L(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}\ \text{sp}\ K^n$$

folgt aber $0 = \text{sp}\ K^n$, insbesondere $\text{sp}\ K = 0$. ■

Nun kann der allgemeine Fall bewiesen werden:

Satz 10.9 *Für jedes $k \in C_1(X)$ gilt die Spurformel*

$$spK = \sum \lambda_j,$$

wobei λ_j die mit algebraischer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von K sind.

Beweis. Sei $\{e_j\}$ das in Satz ?? konstruierte ONS, eine ONB von

$$L := L\Big\{N(K-\lambda_l)^{n(\lambda_l)}) : \lambda_l \neq 0 \ \text{ Eigenwerte von } K\Big\}.$$

Weiter sei $\{f_j\}$ eine ONB von $L^\perp$.

Offenbar gilt

$$\sum \lambda_j = \sum \mu_j = \sum \langle e_j, Ke_j\rangle.$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\sum \langle f_j, Kf_j\rangle = 0$$

gilt.

Da L unter K invariant ist, ist $L^\perp$ unter K^* invariant, denn für $x \in L$ und $y \in L^\perp$ gilt

$$\langle K^* y, x\rangle = \langle y, Kx\rangle = 0.$$

Da mit K auch K^* quasinilpotent ist, ist dann auch $K^*\Big|_{L^\perp}$ quasinilpotent, d. h. nach obigem Satz gilt

$$\sum \langle f_j, Kf_j\rangle = \sum \langle K^* f_j, f_j\rangle = \mathrm{sp}(K^*\Big|_{L^\perp}) = 0.$$

Damit folgt

$$\mathrm{sp}K = \sum \langle e_j, Ke_j\rangle + \sum \langle f_j, Kf_j\rangle = \sum \langle e_j, Ke_j\rangle = \sum \mu_j = \sum \lambda_j.$$

■

Literatur

[1] Dunford, N. – Schwartz, J. T.: Linear Operators, Part II: Spectral Theory. Interscience Publishers, New York – London 1963

[2] Kato, T.: Perturbation Theory for LInear Operators, Springer–Verlag 1976

[3] Lidskii, V. B.: Non–selfadjoint Operators with a trace, Dokl. Akad. Nauk SSSR **125** (1959) 485–487

[4] Retherford, J. R.: Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem. London Mathematical Society 1993

[5] Simon, B.: Trace ideals and their applications. London Mathematical Society 1979

[6] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teubner–Verlag Stuttgart 1976

[7] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I: Grundlagen, Teubner–Verlag Stuttgart–Leipzig–Wiesbaden 2000

[8] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil II: Anwendungen, Teubner–Verlag Stuttgart–Leipzig–Wiesbaden 2003