Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 6 18.05.2016

Aufgabe 21. (Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus, 4 Punkte)

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f_A"] & B^\bullet \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_B"] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'^\bullet \arrow[r, "\iota'"] & B'^\bullet \arrow[r, "\pi'"] & C'^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

von Kokomplexen von Moduln über einem Ring R. Dabei seien die beiden Zeilen exakt und induzieren somit die Verbindungshomomorphismen $(\delta^n)_n$ bzw. $(\delta'^n)_n$. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^n(C^\bullet) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "f_C^n"] & H^{n+1}(A^\bullet) \arrow[d, "f_A^{n+1}"] \\ H^n(C'^\bullet) \arrow[r, "\delta'^n"] & H^{n+1}(A'^\bullet) \end{tikzcd}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

Aufgabe 22. (Induzierte Moduln, 4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Ferner sei A ein G-Modul und B ein H-Modul. Wie in der Vorlesung definieren wir den **induzierten Moduln** $\mathrm{ind}_H^G(B)$ durch

$$\mathrm{ind}_H^G(B) := \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], A).$$

Dabei wird die G-Modulstruktur darauf erklärt durch $g\varphi : \mathbb{Z}[G] \to B$, $x \mapsto \varphi(xg)$, für $g \in G$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], B)$. Zeigen Sie, dass ein natürlicher Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\mathrm{Hom}_H(A, B) \cong \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{ind}_H^G(B))$$

besteht. Geben Sie dabei die beiden zueinander inversen Abbildungen explizit an.

— bitte wenden —

Aufgabe 23. (Beispiele, 4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Ist $\#G = n$ endlich, so wird für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gruppe $H^k(G, A)$ von n annulliert.

Hinweis: Betrachten Sie die Restriktion und die Korestriktion auf die triviale Untergruppe

(b) Wird A von einer natürlichen Zahl n annulliert, so annulliert n auch die Gruppe $H^k(G, A)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) Sind G und A endlich von teilerfremden Ordnungen, so ist $H^k(G, A) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 24. (Stetige Kohomologie, 4 Punkte)

(a) Seien G, G' proendliche Gruppen und sei A bzw. A' ein diskreter G- bzw. G'-Modul. Ferner seien zwei stetige Homomorphismen $\varphi : G' \to G$ und $f : A \to A'$ gegeben, die **kompatibel** sind, d.h.

$$f(\varphi(\sigma') \cdot a) = \sigma' \cdot f(a) \quad \text{für alle } \sigma' \in G' \text{ und } a \in A.$$

Zeigen Sie, dass das Paar (φ, f) für jede nichtnegative ganze Zahl n einen Homomorphismus $H^n_{\mathrm{cts}}(G, A) \to H^n_{\mathrm{cts}}(G', A')$ induziert.

(b) Sei I eine gerichtete Indexmenge. Ferner sei $(\{G_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ ein projektives System proendlicher Gruppen und $(\{A_i\}, \{f_{ij}\})$ ein injektives System abelscher Gruppen, so dass gilt:

(i) Für jedes $i \in I$ ist A_i ein diskreter G_i-Modul.

(ii) Für $i \leq j$ sind die Homomorphismen φ_{ij} und f_{ij} im Sinne von Teil (a) kompatibel.

Dadurch wird $A := \varinjlim_i A_i$ gemäß Aufgabe 17 ein Modul über $G := \varprojlim_i G_i$. Darüber hinaus ist A sogar ein diskreter G-Modul. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgender Isomorphismus besteht:

$$\varinjlim_{i \in I} H^n_{\mathrm{cts}}(G_i, A_i) \cong H^n_{\mathrm{cts}}(G, A)$$

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **25.05.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Gruppen`