Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
27, April 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (3 Punkte) *Seie $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Wir definieren die Spur von A als*

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

also als die Summe der Diagonaleinträge. Zeigen Sie:

a) Für beliebige $n \times n$-Matrizen A, B gilt

$$\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B).$$

b) Für beliebige $n \times n$-Matrizen ist

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

c) Ist B eine invertierbare Matrix, dann ist

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(BAB^{-1}).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ eine $n \times m$-Matrix. Wir definieren die zu A transponierte Matrix als die $m \times n$-Matrix, die durch*

$$A^t := (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \textit{mit } b_{ij} = a_{ji}$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Für eine $m \times n$-Matrix A gilt $(A^t)^t = A$.

b) Für $m \times n$-Matrizen A und B gilt $(A + B)^t = A^t + B^t$.

c) Für eine $m \times p$-Matrix A und eine $p \times n$-Matrix B gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

d) Für eine invertierbare $n \times n$-Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 4. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = b'$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Kann man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Elementarmatrizen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. (3 Punkte) *Sei $A = (a_{ij})$ eine untere $n \times n$-Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ii} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $a_{ij} = 0$ für $i < j$. A hat die Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ * & 1 & & & \\ * & * & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & * & \ldots & * & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass A ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ I ist.