Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Tobias Schedlmeier
WS 18/19

Algebra

3. Übungsblatt
Abgabe am 8.11.2018

Bemerkung: Auch auf den Übungsblättern sind von nun an, soweit nicht anders angegeben, alle Ringe *kommutativ*.

1. Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit komponentenweiser Addition und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als neutralem Element als abelsche Gruppe.

   i) Bestimmen Sie die von den Elementen

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   erzeugte Untergruppe in $\mathbb{R}^3$.

   ii) Zeigen Sie, dass für $U = \{r \cdot v_1 + s \cdot v_2 \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ die Faktorgruppe $\mathbb{R}^3/U$ isomorph zur Untergruppe $\{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist. Hierbei bezeichnet $c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ wie in der linearen Algebra das Element $\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$.

   Welche geometrische Bedeutung haben die Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{R}^3/U$? (4P)

2. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}[X]$ jeweils Polynome q und r mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$ und $f = qg + r$.

   i) $f = 3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7$, $g = X^2 - 2X + 1$

   ii) $f = X^5 + X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 2X - 1$, $g = X^2 - 1$. (4 P.)

3. Ein Element a eines Ringes R heißt *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$ (siehe Aufgabe 4 vom 2. Übungsblatt).

   i) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\mathrm{Nil}(R)$ der nilpotenten Elemente von R ein Ideal in R (das sogenannte Nilradikal) ist.

   ii) Zeigen Sie, dass der Faktorring $R/\mathrm{Nil}(R)$ keine nilpotenten Elemente ungleich 0 enthält. (4 P.)

4. Es sei R ein Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   i) R ist ein Körper.

   ii) $R[X]$ ist ein Hauptidealring. (4 P.)