GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Einführung in die Numerik
WS 2018/19
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 9

Abgabe bis Donnerstag, 17.01., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Euler–MacLaurin Darstellung]

Betrachten Sie das Integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

einer Funktion $f \in C^{2r}$ mit $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ für $0 \leq i \leq l$.

(a) Geben Sie den Fehler der Trapezsumme $T(h)$ in Abhängigkeit von r und l an.

(b) Wie groß ist hier jeweils die Konvergenzordnung (in h)?

(c) Angenommen, f sei beliebig oft differenzierbar ($r = \infty$) und periodisch ($l = \infty$). Kann man dann mit einer Trapezsumme das Integral $I(f)$ exakt berechnen?

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 2: [Romberg–Verfahren]

(a) Berechnen Sie

$$I(f) = \int_0^1 x^5\ dx$$

mit Hilfe des Romberg–Verfahrens

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{(h_{i-k}/h_i)^2 - 1}$$

für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 1/2$ und $h_2 = 1/4$.

(b) Wie groß ist in diesem Fällen der numerische Integrationsfehler?

(c) Geben Sie die Integrationsformeln T_{21} und T_{22} an. Zeigen Sie, dass T_{22} der Milne–Regel entspricht.

(d) Zeigen Sie, daß die Formel T_{11} für die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_1 = 1/3$ gerade die 3/8–Regel ergibt.

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 3: [Adaptive Quadratur]

Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

betrachte man die Simpsonregel

$$S = \frac{(b-a)}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

sowie die Simpsonsumme

$$T = \frac{(b-a)}{12} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right)$$

(a) Geben Sie den Fehler der extrapolierten Regel $U = T + \frac{T-S}{15}$ an.

(b) Ein adaptives Quadraturverfahren verfeinere das Integrationsgebiet $[a, b]$ falls der Integrationsfehler zu groß ist. Warum eignet sich der Wert $|T - S|$ als Fehlerschätzer?

(c) Wir wollen nun $[a, b]$ in zwei Hälften $[a, (a + b)/2]$, $[(a + b)/2, b]$ verfeinern, falls

$$|T - S| > \varepsilon \cdot (b - a)$$

und die beiden Teilintervalle separat integrieren. Dieser Vorgang wird rekursiv weitergeführt, falls der Fehler in dem jeweiligen Teilintervall immer noch zu groß ist. Integrieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $[-1, 1]$ auf diese Weise adaptiv für $\varepsilon = 0.01$. Verwenden Sie jeweils U als endgültige Näherung der Teilintegrale.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte