Knotentheorie: Kurzeinführung für Schülerinnen und Schüler

Thomas Schick*
Fakultät für Mathematik
Universität Göttingen
Bunsenstrasse 3
37073 Göttingen
Germany

Zusammenfassung

Kurze Einführung in den Begriff des Knotens (mathematisch). Polynomiale Knoteninvarianten (Jonespolynom). Zugang über skein-Invarianz.

Literatur: [5], [1, 1.3 und Chapter 6], [2] [3, Kapitel 10] (letzte Quelle ist sehr knapp, aber deutsch).

1 Programm der Vorträge

1.1 Einführung

1.1 Definition. Eine (polygonale) Verschlingung ist eine Vereinigung von endlich vielen einfach geschlossenen Polygonzügen, die sich nicht schneiden. Ein Knoten ist eine Verschlingung die aus nur einem einzigen Polygonzug (einer Komponente) besteht.

Wir werden für Beweise im folgenden immer davon ausgehen, dass alle unsere Verschlingungen polygonal sind. Zum Zeichnen wird aus ästhetischen Gründen von diesem Grundsatz abgewichen.

Für Verschlingung benutzen wir oft das kürzere englische Wort Link.

1.2 Definition. Zwei Verschlingungen sind äquivalent, wenn die eine aus der anderen durch endlich viele der folgenden Operationen erhalten werden kann:

- Eine Kante wird durch zwei Kanten ersetzt, wobei die drei zusammen ein Dreieck aufspannen, welches (auch im Inneren) die gegebene Verschlingung nicht schneidet (außer in der vorhgegebenen Kante)

*e-mail: schick@uni-math.gwdg.de
www: http://www.ni-math.gwdg.de/schickt
Research partially carried out during a stay at Penn State university funded by the DAAD

- Die Umkehrung dieser Operation: zwei Kanten werden durch eine ersetzt.

Beachte, dass "Dreieck" darf auch degeneriert sein, was bedeutet, dass man zusätzliche Ecken auf einer Kante einführen kann.

1.3 Definition. Eine Linkrojektion/Linkdiagramm ist die Parallelprojektion eines Links auf eine in $\mathbb{R}^3$ eingebettete Ebene, so dass

- kein Eckpunkt auf den gleichen Punkt wie irgend ein anderer Punkt des Links abgebildet wird
- nie drei verschiedene Punkte auf denselben Punkt projeziert werden
- bei Kreuzungen die Über- und Unterkreuzung markiert ist.

1.4 Satz. *Zu jedem Link gibt es (unendlich viele) Ebenen, so dass die Parallelprojektion ein Linkdiagramm ergibt.*

1.5 Satz. *Zwei Links mit identischem Linkdiagramm sind äquivalent.*

1.6 Definition. Reidemeisterbewegungen für Linkdiagramme werden mit Hilfe von Bildern eingeführt.

1.7 Satz. *Zwei Links sind genau dann äquivalent, wenn jedes Linkdiagramm-Paar durch endlich viele Reidemeister Bewegungen auseinander hervorgeht, was genau dann der Fall ist, wenn es ein Linkdiagramm-Paar gibt, was durch endlich viele Reidemeisterbewegungen auseinander hervor geht.*

Beweis: Der Beweis dieses Satzes wird (zum Teil) vorgeführt, insbesondere soll diskutiert werden, was zu tun ist, um solch einen Satz zu beweisen. □

Im folgenden Arbeiten wir immer mit Knotenprojektionen, und benutzen die Reidemeisterbewegungen, um Beweise zu führen.

1.8 Definition. Eine Orientierung eines Links besteht aus der Wahl eines Umlaufsinns (markiert durch einen Pfeil) für jede Schlinge.

Dreht man jeden Pfeil um, erhält man den Link mit der umgekehrten Orientierung.

1.9 Definition. Zwei orientierte Links sind orientiert äquivalent, wenn es Operationen gibt, die den einen auf den anderen so überführen, dass auch die Orientierungen übereinstimmen.

1.10 Bemerkung. Wenn man bei einem orientierten Link (und sogar Knoten) einzelne Umlaufsinne umkehrt, kann es passieren, dass man einen neuen orientierten Link erhält, der nicht zum alten (orientiert) äquivalent ist.

1.11 Definition. Eine Knoten- oder Verschlingungsinvariante ordnet jedem Knoten/Link ein Objekt, z.B. eine Zahl, eine Funktion, ... zu, so dass äquivalenten Knoten die gleiche Invariante zugeordnet wird.

Achtung: die letzte Bedingung muss man im allgemeinen (mehr oder weniger mühsam) beweisen.

Wunsch: Die Invariante sollte möglichst leicht berechenbar sein, und möglichst viele Links voneinander unterscheiden können (diese zwei Wünsche sind allerdings etwas entgegengesetzt zueinander).

1.12 Beispiel. Eine ganz einfache Invariante ist die Anzahl der Komponenten (bei Knoten natürlich immer 1).

In den Übungen wird die Linkingzahl besprochen.

1.2 Jones Polynom

sec:jones-polynom

1.13 Beispiel. Am Anfang der Stunde wird gezeigt (entgegen der Berechnung der Windungszahl) dass man den Hopf-Link mit Geschick doch entlinken kann.

Wir wollen jeder Verschlingung eine Funktion, das sogenannte Jones-Polynom, zuordnen (obwohl es sich in Wirklichkeit gar nicht um ein Polynom, sondern ein sogenanntes Laurant-Polynom handelt, in dem auch Terme der Form x^{-k} vorkommen können).

Diese Funktion soll anhand einer Linkprojektion berechnet werden.

1.14 Definition. Sei V eine Linkprojektion. Wir ordnen dieser Projektion eine Funktion f_V auf folgende Weise zu:

$$f(x) = \sum_Z x^{a(Z)} x^{-b(Z)} (x^2 + x^{-2})^{|Z|-1}.$$

Jetzt müssen natürlich noch die ganzen Terme erläutert werden. $f(x)$ wird definiert als große Summe.

Ein *Zustand* des Linkdiagramms besteht darin, für jede Kreuzung eine Markierung anzubringen, wie diese Kreuzung aufgeschnitten werden soll (beachte: es gibt immer zwei Möglichkeiten, also insgesamt $2^{\text{Anzahl der Kreuzungen}}$ verschiedene Zustände). Jeder Zustand führt, indem man das Linkdiagramm entsprechend aufschneidet, zu einer Kollektion von Kreisen. Die Anzahl dieser Kreise wird mit $|Z|$ bezeichnet.

Bei den Markierungen gibt es zwei Typen: Typ A liegt vor, wenn man beim Drehen des überkreuzenden Strangs gegen den Uhrzeigersinn zuerst die Markierung trifft, bevor man den unterkreuzenden Strang erreicht, sonst Typ B. In einem Zustand Z bezeichnet $a(Z)$ die Anzahl der Markierungen vom Typ A, $b(Z)$ die vom Typ B.

1.15 Satz. *Das Polynom f_V ist invariant unter den ersten und dritten Reidemeister Bewegungen.*

Unter der zweiten Reidemeister Bewegung ändert sich f_V, es handelt sich also *nicht* um eine Link-Invariant.

Für orientierte Verschlingungen kann man dem mittels folgender Definition abhelfen:

1.16 Definition. Die *Verdrillung* $w(V)$ eines Linkdiagramms ist die Anzahl der positiven Kreuzungen minus der Anzahl der negativen Kreuzungen, wobei eine Kreuzung positiv ist, wenn man den überkreuzenden Strang gegen den Uhrzeigersinn um weniger als 180 Grad auf den unteren Strang dreht, und dann die Orientierungen in die gleiche Richtung zeigen. Sonst heißt die Kreuzung negativ.

1.17 Definition. Das Jones-Polynom einer orientierten Links L ist die Funktion

$$J_L(x) := (-x)^{3w(V)} f_V(x)$$

wobei V eine Linkprojektion von L ist.

1.18 Satz. *Das Jones-Polynom ist wirklich eine Linkinvariante, also invariant unter allen Reidemeister Bewegungen.*

Beweis: Der Beweis soll geführt werden. □

1.19 Beispiel. Hopf-Link, trivialer Knoten mit nicht trivialem Diagramm.

1.20 Definition. Das *Spiegelbild* einer Verschlingung erhält man, in dem man in einer Linkprojektion jede Überkreuzung umkehrt.

1.3 Entwirrungsrelationen

sec:entw

1.21 Definition. Ein *Entwirrungstripel* sind drei orientierte Links L_+, L_- und L_0, die Linkdiagramme haben, die sich nur an genau einer Kreuzung unterscheiden, welche bei L_+ positiv, bei L_- negativ und bei L_0 gar nicht vorhanden ist (um der Orientierung von L_0 Sinn zu geben, gibt es nur eine Möglichkeit, aufzuschneiden.

1.22 Satz. *Für das Jonespolynom eines Entwirrungstripels gilt*

$$x^4 J_{L_+}(x) - x^{-4} J_{L_-}(x) = (x^2 - x^{-2}) J_{L_0}(x).$$

Beweis: Wird gegeben. □

1.23 Beispiel. Das Jonespolynom des Alexanderknotens und des Unlinks mit zwei Komponenten wird mittels der skein-Relationen berechnet.

1.24 Satz. *Es gibt eine weitere Knoteninvariante, die jedem Link eine Funktion zuordnet, nämlich das Alexanderpolynom $A_L(x)$. Dieses erfüllt folgende Entwirrungs-Relation*

$$A_{L_+}(x) - A_{L_-}(x) = (x - x^{-1} A_{L_0}(x).$$

Außerdem ist das Alexanderpolynom des trivialen Knotens die konstante Funktion 1.

1.25 Bemerkung. Beachte, dass nur die Formulierung der Entwirrungsrelation noch nicht garantiert, dass diese Invariante wirklich existiert. Dazu muss sie erst konstruiert werden, was aber in diesem Fall recht mühsam ist und hier nicht durchgeführt werden soll. Für weitere Details kann man z.B. das durchaus anschauliche Buch von Colin Adams zu Rate ziehen.

1.26 Beispiel. Berechnung des Alexander Polynoms vom links-und rechtshändigen Kleeblatt.

sec:alternierende-knoten

1.4 Alternierende Knoten

1.27 Definition. Ein Knoten heißt *alternierend*, wenn es eine Knotenprojektion gibt, so dass beim Verfolgen der Schlinge Über- und Unterkreuzungen immer abwechselnd auftreten.

Eine solche Projektion heißt reduziert, wenn man nicht durch "Umklappen" an einer Kreuzung die Zahl der Kreuzungen verringern kann.

1.28 Satz. *Zwei reduzierte alternierende Projektionen ein- und desselben Knotens haben die selbe Anzahl Kreuzungen.*

1.29 Satz. *Hat ein Knoten eine reduzierte alternierende Knotenprojektion, so gibt es keine andere Knotenprojektion mit weniger Kreuzungen.*

Beweis: Wir beweisen den ersten dieser beiden Sätze wie im Buch von Adams (S. 161 und 162), wobei einige Arbeit in die Aufgaben verlegt wird. □

Folgende Begriffe werden gebraucht:

1.30 Definition. Jedes Jonespolynom hat die Form

$$J(x) = a_0 x^{n_0} + a_1 x^{n_1} + \cdots + a_k x^{n_k}$$

mit $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ geeigneten ganzen Zahlen, und Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_k$ alle von Null verschieden.

Wir nennen $n_k - n_0$ die *Spannweite* des Jonespolynoms, n_k die *höchste Potenz* und n_0 die *niedrigste Potenz*.

Zum Beweis des ersten Satzes benötigen wir insbesondere:

1.31 Satz. *Hat ein Knoten K eine reduzierte alternierende Projektion mit n Kreuzungen, so ist die Spannweite seines Jonespolynoms genau $4n$.*

2 Zusammenfassung des Stoffs und weitere Anregungen

(1) Definition von polygonalen Knoten und Verschlingungen [5, 1.1]

(2) Beispiel: wilde Knoten [5, 1.0]

(3) Beispiele (z.T. als Aufgaben) prominenter Verschlingungen: Hopf-Link, Achterknoten, Kleeblatt, Whitehead, square knot, granny knot, Borromesche Ringe, Perkos Paar [4, S. 40] [5, Figure 1.2.1, Exercises 1.4.1, 1.4.2, 1.5.2]

(4) polygonale moves [5, 1.2]

(5) reguläre Projektion [5, 2.1]

(6) Reidemeister Bewegungen [5, 4.1] [4, 1.8]

(7) Orientierung eines Knotens, Umkehrung der Orientierung [4, S. 45]

(8) Spiegelbilder eines Knotens [4, S. 45]

(9) zusammenhängede Summe von Knoten [5, 1.5]

(10) allgemeines Prinzip der (Knoten)Invarianten [5, 3]

(11) Kauffman Polynom eines Linkdiagramms [4, S. 42–44]

(12) Laurent Polynome

(13) writhe und Kauffman Polynom eines Links [4, S44–46], [5, 4.5,11.4]

item:Formeln (14) Eigenschaften: Formeln für zusammenhängende Summe, Spiegelbild, umgekehrte Orientierung (teilweise als Übung).

(15) Entwirrungseigenschaft des Kauffman Polynoms, Beispielrechnungen [5, Example 6.2.1 für Skein-Zerlegung]

(16) allgemeine Entwirrungsinvarianten [5, 11.3] [4, 5.3]

(17) Hierzu: Funktionen mehrerer Veränderlicher (über $\mathbb{R}$)

2.1 Alternierende Knoten und minimale Projektionen als mögliches Extra

(1) Tait's Vermutungen [1, S. 159]

(2) Spannweite eines Knotenpolynomes [1, S. 160]

(3) Berechnung der Spannweite für reduzierte alternierende Knotendiagramme [1, Lemma auf S. 160]

(4) Beweis der ersten Tait-Vermutung.

2.2 Knoten-Demonstrationen

(1) Zaubertrick zum Hopflink (physikalischer Beweis, dass dieser trivial ist)

(2) Webseiten und Bücher, Filme (?) zu Knoten vorstellen.

2.3 Zöpfe als mögliches Extra

(1) Zöpfe [4, 4.1] [5, 10.1]

(2) Die Zopfgruppe(n) [4, 4.2–4.4] [5, 10.2]

(3) Markovsätze: jeder Knoten ist abschluš eines Zopfs, die zugehörigen Knoten sind äquivalent genau wenn die Zöpfe Markov-Äquivalent sind. [5, 10.3]

Literatur

MR94m:57007 [1] Colin C. Adams. *The knot book.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.

MR94m:57021 [2] Charles Livingston. *Knot theory.* Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

ivingston93:_knoten_einst [3] Charles Livingston. *Knotentheorie für Einsteiger.* vieweg, 1993.

Lueck [4] Wolfgang Lück. Das Jones-Polynom und Entwirrungs-Invarianten in der Knotentheorie. *Math. Semesterber.*, 44(1):37–72, 1997.

MR97g:57011 [5] Kunio Murasugi. *Knot theory and its applications.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita.