Übungen zur Vorlesung Höhere Numerik

Übungsblatt 6, Abgabe: Freitag, 27.11.09, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Konstruieren Sie ein 2-Schritt-Verfahren 4-ter Ordnung und überprüfen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Konstruieren Sie ein 3-Schritt-Verfahren 5-ter Ordnung und überprüfen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem $x' = -ax$ mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$. Für die Lösung gilt offensichtlich $x(t) > 0$.
Bestimmen Sie ein $a \geq 0,\ x(0) > 0$ und $x_\Delta(\tau) > 0$ geeignet, so dass für $x_\Delta(t_k)$ aus dem Mittelpunktverfahren

$$x_\Delta(t_{k+1}) = x_\Delta(t_{k-1}) + 2\tau f(t_k, x_\Delta(t_k))$$

$x_\Delta(2\tau) < 0$ für eine äquidistante Schrittweite τ gilt.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 04.12.09, 10.00 Uhr)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\lambda y, \quad y(0) = 1$$

für $\lambda = 20$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$.
Benutzen Sie zur Lösung dieses Anfangswertproblems Ihre Programme für

i) das explizite Euler-Verfahren,

ii) das Mittelpunktverfahren.

Geben Sie jeweils für die Schrittweiten $h = 2^{-i}$ mit $i = 4, 5, 6, 7, 8$ den maximalen Gitterfehler $\epsilon_\Delta^h = \max_i |y_\Delta(t_i) - y(t_i)|$ und die experimentelle Konvergenzordnung (EOC) tabellarisch an.
Für zwei Schrittweiten $h_1 \neq h_2$ ist die experimentelle Konvergenzordnung des Fehlers ϵ_Δ^h definiert durch

$$EOC = \frac{\ln(\epsilon_\Delta^{h_1}) - \ln(\epsilon_\Delta^{h_2})}{\ln(h_1) - \ln(h_2)}.$$