Numerik partieller Differentialgleichungen I

Einführung
- Übersicht pDgln. 2. Ordnung
  (Klassifikation, klassische Modellprobleme)
- Übersicht wichtigste Diskretisierungskonzepte
  (Finite Differenzen, Finite Elemente, Finite Volumen)

Finite Differenzen
- Bsp. Wärmeleitung
  (Stabilitätskonzepte, Konvergenz)
- Bsp. Transportgleichung
  (Stabilität, Konvergenz, Dissipation)

Finite Elemente
- Bsp. Poissongleichung
  (Assemblierung, a priori Fehlerabschätzung)
- Adaptivität
  (Gitterverfeinerung, a posteriori Fehlerabschätzung)

Partielle Differentialgleichung

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $d \geq 2$. Eine partielle Differentialgleichung (pDgl) ist eine Gleichung, die eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und ihre partiellen Ableitungen verknüpft,

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

$F : \mathbb{R}^{d^k} \times \mathbb{R}^{d^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. k ist die Ordnung der pDgl, u die gesuchte Fkt.

Bsp: Laplace-Gleichung $\partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 = 0$

Def: Ein pDgl-Problem ist eine pDgl. mit Randbedingungen auf $\Gamma \subset \partial\Omega$

- Dirichlet-RB : $u = g$ auf Γ (g gegeben)
- Neumann-RB : $n^T A \nabla u = g$ auf Γ ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär, n = Normale an Γ)
- Robin-RB : $u + n^T A \nabla u = g$ auf Γ

Es ist zu lösen für $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Bsp: Laplace-Gleichung mit $u(x) = x_1$ auf $\partial\Omega$ hat Lsg. $u(x) = x_1$.

Klassifikation pDgln. 2. Ordnung

Notation:
- $u_{x_1} = \partial u / \partial x_1$, $u_{x_1 x_2} = \partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2$, ...
- $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d})$, $\nabla u = Du^T$
- $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_d x_d}$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ heißt Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

  $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}$
- Mit Ω & $x_1, \dots, x_d$ bezeichnen wir üblicherweise nur räumliche Variablen; ist eine Variable die Zeit, nennen wir sie t und nehmen $[0,T] \times \Omega$ als das Gebiet der Dgl.; außerdem $\dot{u} = u_t$

Wir betrachten hier nur semilineare pDgln: $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + c(\nabla u(x), u(x), x) = 0$

Def: Die pDgl. heißt
- elliptisch, falls $A = (a_{ij})_{ij}$ positiv definit ist
- parabolisch, falls A pos. semidefinit ist mit einem 0-Eigenwert
- hyperbolisch, falls A einen positiven & $d-1$ negative Eigenwerte hat

Energieminimierung: Elliptische Dgl.

Elliptische pDgl. entspringen dem physikalischen Prinzip der Energieminimierung:

Ein physikalisches System nimmt den Zustand minimaler Energie an.

Sei u der Zustand, $E(u)$ die Energie $\Rightarrow$ $E(u+\varphi) \geq E(u)$ $\forall \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

<u>Bsp:</u> Die potentielle Energie einer elektrischen Ladungsverteilung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (oder einer elastischen Membran mit transversaler Auslenkung u oder einer Temperaturverteilung u) in einem elektrischen Feld f ist

$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega f u \, dx$. Auf $\partial\Omega$ ist $u = g$ festgelegt.

$$E(u+\varphi) - E(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 \, dx + \int_\Omega f \varphi \, dx$$

partielle Integration

$$= \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot n \, dx + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \varphi \operatorname{div}\nabla u \, dx + \int_\Omega f \varphi \, dx \overset{!}{\geq} 0 \quad \forall \varphi \text{ mit } \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$\Rightarrow$ <u>Poissongleichung</u> $\operatorname{div}\nabla u = \Delta u = f$ mit Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$

Gradientenfluss: Parabolische Dgl.

Ein physikalisches System muss erst zum Energieminimum gelangen.

Parabolische pDgl. entspringen dem physikalischen Prinzip des Gradientenflusses:

Zu jedem Zeitpunkt bewegt sich der Zustand in die Richtung, die die schnellste Energieabnahme (bei gleichem Aufwand) erlaubt.

Sei $\tau D(\frac{\varphi}{\tau})$ der Aufwand der Änderung $u \to u+\varphi$ in Zeit τ

$$\Longrightarrow \quad \dot{u} = \lim_{\tau \to 0} \Big(\operatorname*{argmin}_{\varphi} \; \tau D(\tfrac{\varphi}{\tau}) + E(u+\varphi) \Big) / \tau$$

Bsp: Eine Ladungs- (Auslenkungs-/Temperatur-) Änderung kostet $D(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2 dx$.

$$\tau D(\tfrac{\varphi+\tilde\varphi}{\tau}) + E(u+\varphi+\tilde\varphi) - \big[\tau D(\tfrac{\varphi}{\tau}) + E(u+\varphi)\big] = \int_\Omega \frac{\varphi\tilde\varphi}{\tau} + \frac{\tilde\varphi^2}{2\tau} + \frac{|\nabla\tilde\varphi|^2}{2} + \nabla(u+\varphi)\cdot\nabla\tilde\varphi + f\tilde\varphi \, dx$$

$$= \int_\Omega \tilde\varphi \Big(\frac{\varphi}{\tau} - \Delta(u+\varphi) + f \Big) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde\varphi \, \nabla(u+\varphi)\cdot n \, dx + O(\tilde\varphi^2) \geq 0 \quad \forall \tilde\varphi \text{ mit } \tilde\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi}{\tau} = \Delta(u+\varphi) - f \quad \Longrightarrow \varphi \to 0 \text{ für } \tau \to 0$$

$\Longrightarrow$ **Wärmeleitungsgleichung** $\dot{u} - \Delta u = -f$ mit Dirichlet RB $u = g$ auf $\partial\Omega$, $u = u_0$ für $t = 0$

Erhaltungsgleichung: Hyperbolische Dgl.

Hyperbolische pDgl. entspringen oft dem physikalischen Erhaltungsprinzip:

Die Änderung einer extensiven Zustandsgröße (z.B. Masse, Impuls, Energie) in einem Volumen V ist nur durch Transport über ∂V möglich.

Sei: $q(x,t)$ die Flussdichte der Zustandsgrößen-Dichte ρ $\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int_V \rho(x,t)\,dx = -\int_{\partial V} q(x,t)\cdot n\,dx$

$\Longrightarrow 0 = \int_V \dot\rho + \operatorname{div} q \,dx \quad \forall\, V \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \dot\rho + \operatorname{div} q = 0$

Satz von Gauß

Bsp: Ein Material mit Masse-Verteilung ρ bewege sich mit Geschwindigkeit $v(x,t)$ (z.B. durch Wind bewegtes Wasser in den Wolken). $\Rightarrow q = v\rho$

$\Rightarrow$ Transportgleichung $\quad \dot\rho + \operatorname{div}(v\rho) = 0 \quad$ mit RB $\rho = \rho_0$ für $t = 0$.

Bsp: Die kinetische + potentielle Energiedichte einer gespannten Membran mit Auslenkung u ist $\rho(x,t) = \frac{m}{2}|\dot u|^2 + E\frac{|\nabla u|^2}{2}$ (m = Membran-Massendichte, E = Elastizitätsmodul), der Energiefluss ist $q = -E\dot u\nabla u \Rightarrow \dot\rho = m\dot u\ddot u + E\nabla u\cdot\nabla\dot u = E\operatorname{div}(\dot u\nabla u)$

$\Rightarrow$ Wellengleichung $\quad \ddot u = \frac{E}{m}\Delta u \quad$ mit RB $u = g$ auf $\partial\Omega$, $u = u_0$ für $t = 0$

Reduktion hyperbolischer pDgl. 2. zu 1. Ordnung in 2D

$$\ddot{u} - \partial^2 u/\partial x^2 = f(u, \dot{u}, \partial u/\partial x, x, t)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{v} + \partial v/\partial x = f(u, \dot{u}, \partial u/\partial x, x, t) \\ \dot{u} - \partial u/\partial x = v \end{cases}$$

= System gekoppelter Transportgleichungen 1. Ordnung

„ $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$ "

Hängt f nur von x & t ab, kann man erst

$$\dot{v} + \partial v/\partial x = f(x, t)$$

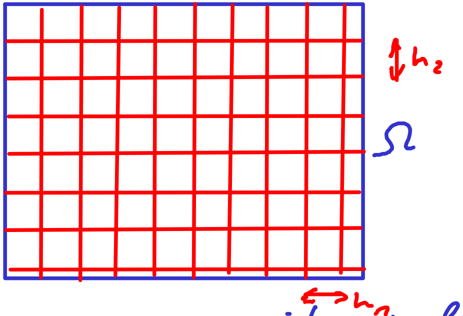
lösen und danach

$$\dot{u} - \partial u/\partial x = v$$

$\Rightarrow$ wir werden nur hyperbolische pDgl. 1. Ordnung betrachten.

Finite Differenzen

Hat man auf Ω ein regelmäßiges Gitter mit Gitterweite $h_1, \dots, h_d$ in x_1- ... x_d- Richtung,



Können die Ableitungen einer ausreichend oft differenzierbaren Funktion u als Differenzenquotienten approximiert werden.

Bsp.: $\partial u/\partial x_1 \approx \dfrac{u(x_1+h_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{h_1}$, $\quad \partial^2 u/\partial x_2^2 \approx \dfrac{u(x_1, x_2+h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2-h_2)}{h_2^2}$

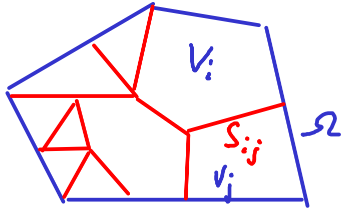
Wir suchen eine Approximation $u_{i_1 \dots i_d}$ an $u(\underbrace{(i_1 h_1, \dots, i_d h_d)}_{\text{Gitterpunkte}})$

$\Rightarrow$ Wir ersetzen in der pDgl. alle Ableitungen durch Diff.-quotienten und erhalten einen Satz an Gleichungen in den $u_{i_1 \dots i_d}$

Bsp: $\dot{u} - \partial^2 u/\partial x^2 = 0$, $\quad u(t=0, x) = e^{-x^2} \rightsquigarrow \dfrac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1} - \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$, $u_{0j} = e^{-j^2 h_2^2}$ $\forall i \geq 0, j$

Finite Volumen

Auf einem Gitter aus Volumenelementen V_i und deren Seiten S_{ij}



kann das Erhaltungsprinzip auf jedes Element angewandt werden.

Ist ρ_{ik} der Mittelwert von ρ auf V_i zur Zeit $t_k = k\Delta t$ und $\tilde{q}(\rho_{ik}, \rho_{jk}, x, t)$ eine Approximation an den Fluss durch S_{ij}, so folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{V_i} \rho(x,t)\,dx = -\int_{\partial V_i} q(x,t)\cdot n\,dx$$

Normale von V_i zu V_j

$$\rightsquigarrow \rho_{ik+1} - \rho_{ik} = \frac{-\Delta t}{|V_i|}\sum_j |S_{ij}|\,\tilde{q}(\rho_{ik}, \rho_{jk}, x, t)\cdot n_{ij} \qquad \forall k, i$$

ein Satz Gleichungen für die ρ_{ik}.

Bsp: $\dot{\rho} + \operatorname{div}(v\rho) = 0,\ \rho(t=0,x) = e^{-x^2}$

$$\rightsquigarrow \rho_{i,k+1} - \rho_{ik} = \frac{-\Delta t}{|V_i|}\sum_j |S_{ij}|\, v(x_{ij}, k\Delta t)\cdot n_{ij}\,\frac{\rho_{ik}+\rho_{jk}}{2}, \quad \rho_{i0} = \int_{V_i} e^{-x^2}dx \qquad \forall k > 0, i$$

Galerkin-Verfahren/Finite Elemente

Sei V ein endlichdimensionaler Teilraum des Raums F der Funktionen $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mit Basis $\phi_1,\dots,\phi_K$. Statt auf F kann das Energieminimierungsprinzip auch auf V angewandt werden:

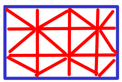
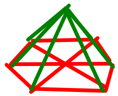
$$u = \operatorname*{argmin}_{v\in F} E(v) = \text{Lsg. der zugehörigen elliptischen pDgl.}$$

$$\rightsquigarrow \hat{u} = \sum_{i=1}^{K} u_i \phi_i = \operatorname*{argmin}_{v\in V} E(v) = \text{Approximation der pDgl-Lsg.}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial u_i} E\Big(\sum_{i=1}^{K} u_i \phi_i\Big) \quad \forall\, i = 1,\dots,K$$

$\hat{u}$ heißt <u>Galerkin-Approximation</u>. Sind die ϕ_i lokal (d.h. $\operatorname{supp}\phi_i \cap \operatorname{supp}\phi_j = \emptyset$ für die meisten i,j) ergibt sich der Spezialfall der <u>Finiten Elemente</u>.

<u>Bsp:</u> $\Delta u = 0$ auf Ω, $u(x) = g(x)$ auf $\partial\Omega$ $\qquad E(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}\,dx$

Dreiecksgitter , V aufgespannt durch  $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$

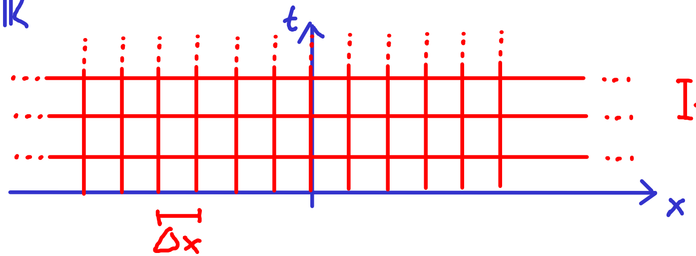
$$\rightsquigarrow \sum_{j=1}^{K} \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \,dx\; u_j = 0 \quad \forall\, i \text{ mit } x_i \notin \partial\Omega, \quad u_i = g(x_i) \text{ sonst}$$

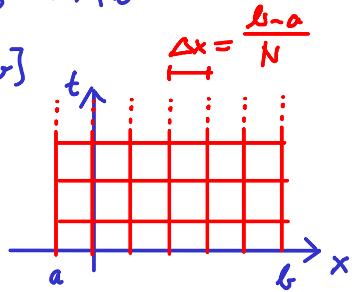
Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

theta-Methode

$u_t = u_{xx}$ auf $[0,T]\times\Omega$ + RB + AB

Gitter: $\cdot\ \Omega = \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $\cdot\ \Omega = [a,b]$





Explizites Euler-Verfahren:
$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = \frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2}$$
$$\Longleftrightarrow\quad U_j^{m+1} = U_j^m + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m\right)$$

Implizites Euler-Verfahren:
$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = \frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$
$$\Longleftrightarrow\quad U_j^{m+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}\right) = U_j^m$$

Θ - Verfahren:
$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = (1-\Theta)\,\frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \Theta\,\frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

$\Theta = 0$: expl. Euler ; $\Theta = 1$: impl. Euler ; $\Theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson

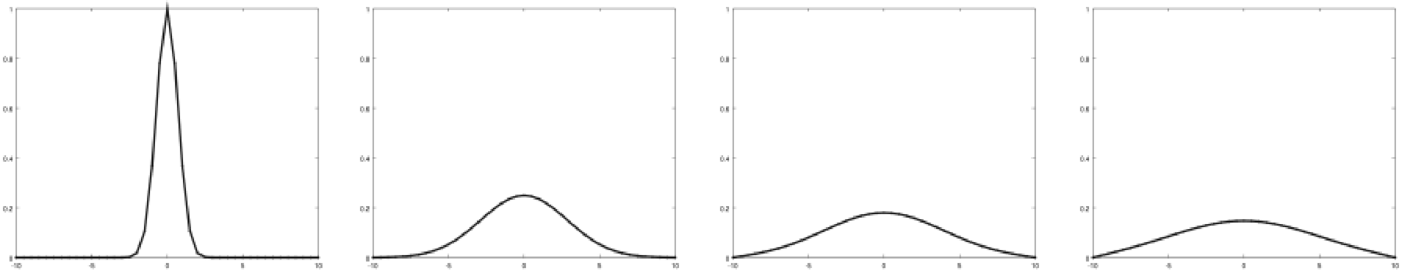
Anfangsbedingung (AB): $U_j^0 = u(t=0, x_j)$; Dirichlet-RB: $U_0^m = u(t^m, a)$, $U_N^m = u(t^m, b)$

Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

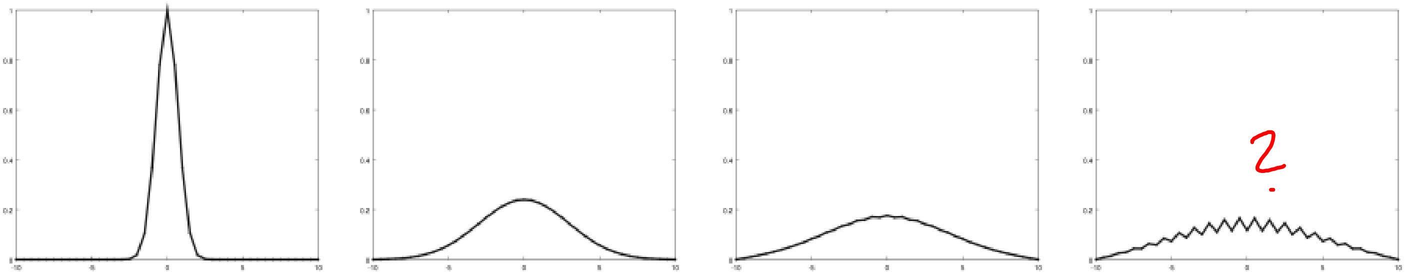
Beispielrechnung

$u_t = u_{xx}$ auf $\Omega = [-10,10]$, $u(t=0,x) = e^{-x^2}$, $u(t,\partial\Omega) = u(0,\partial\Omega)$

expl. Euler, $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 0{,}12$



expl. Euler, $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 0{,}13$



Fourier-Transformation & Satz von Plancherel/Parseval

Def: <u>Fouriertransformation</u> (FT) von $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $\hat{u}(\xi) = F[u](\underset{\in\mathbb{R}}{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$

Def: <u>L^2-Norm</u> von $u : \Omega \to \mathbb{C}$: $\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$

$L^2(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ messbar}, \|u\|_{L^2} < \infty \}$

zugehöriges <u>L^2-Skalarprodukt</u> $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} \overline{u(x)}\, v(x)\, dx$

Thm: Inverse FT (IFT) von $\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $u(x) = F^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$

Bew: $\overset{!!}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(\tilde{x})\, e^{-i\tilde{x}\xi}\, d\tilde{x}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-\tilde{x})\xi}\, d\xi\, u(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} u(\tilde{x})\, \delta(\tilde{x}-x)\, d\tilde{x}$!

$\Rightarrow$ mache rigoros mittels Glättungs- & Approximationsargumenten $\square$

Thm: (Satz von Plancherel/Parseval) $\|\hat{u}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L^2}$

$\Rightarrow \frac{F}{\sqrt{2\pi}}$ ist Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$

Bew:
- $\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\, v(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\, v(\xi)\, d\xi$

  $= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi\, u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \hat{v}(x)\, dx$

- wähle $v(\xi) = \overline{\hat{u}(\xi)} = 2\pi\, F^{-1}[\bar{u}](\xi)$ $\square$

L2-Stabilität

Stabilität $\hat{=}$ geringe Perturbation in Daten (z.B. RB oder rechte Seite der pDgl.) erzeugt geringe Änderung der Lösung

Messung der Perturbationsstärke in verschiedenen Normen

$\Longrightarrow$ Stabilität bzgl. versch. Normen

$$\left.\begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f, & u(t=0) = u_0 \\ \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}, & \tilde{u}(t=0) = \tilde{u}_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad v = \tilde{u} - u \text{ löst } v_t - v_{xx} = \tilde{f} - f, \quad v(t=0) = \tilde{u}_0 - u_0$$

<u>Thm:</u> u löse $u_t - u_{xx} = f$ auf $[0,\infty) \times \Omega$ ($\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = [a,b]$ mit 0-Dirichlet-RB).

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u(t=0)\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}\, ds$$

Bew: · für $\Omega = [a,b]$, $2\|u\|_{L^2} \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2} = 2\int_\Omega \dot{u} u\, dx = 2\int_\Omega u(\Delta u + f)\, dx = 2\int_\Omega -|\nabla u|^2 + uf\, dx \leq 2\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$

· für $\Omega = \mathbb{R}$, $F[u_t - u_{xx} - f](\xi) = \hat{u}_t(\xi,t) - (i\xi)^2 \hat{u}(\xi,t) - \hat{f}(\xi,t)$

$\Rightarrow \forall \xi: \quad \frac{d}{dt}\hat{u} = -\xi^2 \hat{u} + \hat{f} \quad \Longrightarrow 2\|\hat{u}\|_{L^2} \frac{d}{dt}\|\hat{u}\|_{L^2} = 2\int_\mathbb{R} \mathrm{Re}\left(-\xi^2|\hat{u}|^2 + \bar{\hat{u}}\hat{f}\right) d\xi \leq 2\|\hat{u}\|_{L^2}\|\hat{f}\|_{L^2}$

· in beiden Fällen $\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ $\square$

Semidiskrete Fourier-Transformation

<u>Def</u>: Die <u>semidiskrete FT</u> einer auf dem unendlichen Gitter $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, definierten Funktion U ist

$$\hat{U}: \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right] \to \mathbb{C}, \qquad \hat{U}(k) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j e^{-ikx_j} .$$

<u>Def</u>: <u>ℓ_2-Norm</u> von $U : Z \subset \Delta x \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\|U\|_{\ell^2} = \left(\Delta x \sum_{x_j \in Z} |U_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Thm</u>: <u>Inverse semidiskrete FT</u> ist $U_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{U}(k) e^{ikj\Delta x}\, dk$

<u>Thm</u>: (Parseval)

$$\|\hat{U}\|_{\ell^2} = \sqrt{2\pi}\, \|U\|_{\ell^2}$$

l2-Stabilität

θ-Methode für $\dot{u} - \Delta u = f$: (*)

$$\boxed{\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\,\frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}, \quad U_j^0 = O_j}$$

$$\frac{\tilde{U}_j^{m+1} - \tilde{U}_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{\tilde{U}_{j-1}^m - 2\tilde{U}_j^m + \tilde{U}_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\,\frac{\tilde{U}_{j-1}^{m+1} - 2\tilde{U}_j^{m+1} + \tilde{U}_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\tilde{F}_j^m + \theta \tilde{F}_j^{m+1}, \quad \tilde{U}_j^0 = \tilde{O}_j$$

$\Rightarrow$ $\tilde{u} - u$ löst selbe Gleichungen für Daten $\tilde{F} - F$ & AB $\tilde{O} - O$.

$\Rightarrow$ für Stabilität betrachte (wie zuvor) Norm der Lsg. als Fkt. der Daten & AB.

<u>Thm:</u> $U = (U_j^m)_{j\in \mathbb{Z}}^{m\geq 0}$ löse (*) (auf $Z = \mathbb{Z}$ oder $Z = \mathbb{Z} \cap [a,b]$ mit 0-Dirichlet-RB).

Falls $(1-2\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, $\|U^m\|_{\ell^2} \leq \|O\|_{\ell^2} + \Delta t\left(\sum_{k=1}^{m-1}\|F^k\|_{\ell^2} + \theta\|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta)\|F^0\|_{\ell^2}\right)$.

„Verfahren ist <u>ℓ^2-stabil</u>".

Quadratur für $\int_0^{m\Delta t} dt$

<u>Kor:</u> Impl. Euler- & Crank-Nicolson-Verfahren sind uneingeschränkt ℓ^2-stabil, expl. Euler-Verfahren ist bedingt stabil (für $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$).

Bew.: · Abkürzung $\mu = \Delta t / \Delta x^2$

· $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$: Setze $U_j^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \hat{u}^m(k)\, dk$ ein

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \frac{\hat{u}^{m+1} - \hat{u}^m}{\Delta t}\, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} (1-\theta) \frac{e^{ik(j-1)\Delta x} - 2e^{ikj\Delta x} + e^{ik(j+1)\Delta x}}{\Delta x^2} \hat{u}^m$$

$$+ \theta \frac{e^{ik(j-1)\Delta x} - 2e^{ikj\Delta x} + e^{ik(j+1)\Delta x}}{\Delta x^2} \hat{u}^{m+1} + e^{ikj\Delta x}\left[(1-\theta)\hat{F}^m + \theta \hat{F}^{m+1}\right] dk$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \Big[\hat{u}^{m+1}\left(1 - \theta\mu\left(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}\right)\right) - \hat{u}^m\left(1 + (1-\theta)\mu\left(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}\right)\right)$$

$$+ \Delta t \left[(1-\theta)\hat{F}^m + \theta \hat{F}^{m+1}\right]\Big] dk$$

$$\Rightarrow \hat{u}^{m+1}(k) = \frac{1 + (1-\theta)\mu\left(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}\right)}{1 - \theta\mu \underbrace{\left(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}\right)}_{-4\sin^2(k\Delta x/2)}} \hat{u}^m(k) - \frac{\Delta t\left[(1-\theta)\hat{F}^m(k) + \theta\hat{F}^{m+1}(k)\right]}{1 - \theta\mu\left(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}\right)}, \quad k \in \left[\frac{-\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$$

$$\Rightarrow \|\hat{u}^{m+1}\|_{L^2} \leq \underbrace{\max_k \left| \frac{1 - (1-\theta)4\mu\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1 + \theta 4\mu \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} \right|}_{\leq 1 \iff (1-2\theta)\mu \leq \frac{1}{2}} \|\hat{u}^m\|_{L^2} + \Delta t\left[\theta\|\hat{F}^{m+1}\|_{L^2} + (1-\theta)\|\hat{F}^m\|_{L^2}\right]$$

$\cdot\ z = \mathbb{Z} \cap [a,b]$: $u^{m+1} = (I + \theta\mu L)^{-1}\left[(I - (1-\theta)\mu L)u^m + \theta \Delta t F^{m+1} + (1-\theta)\Delta t F^m\right]$

$$u^m = \begin{pmatrix} u_1^m \\ \vdots \\ u_{N-1}^m \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

Nach Satz von Gerschgorin ist L pos. semidefinit mit Eigenwerten $\in [0,4]$.

$$\Rightarrow \|u^{m+1}\|_{\ell^2} \le \underbrace{\|(I + \theta\mu L)^{-1}(I - (1-\theta)\mu L)\|}\,\|u^m\|_{\ell^2}$$

$$+ \underbrace{\|(I + \theta\mu L)^{-1}\|}_{\le 1}\Delta t\left[\theta\|F^{m+1}\|_{\ell^2} + (1-\theta)\|F^m\|_{\ell^2}\right]$$

$$\le \max_{\text{Eigenwert } \lambda}\left|\frac{1-(1-\theta)\mu\lambda}{1+\theta\mu\lambda}\right|$$

≤ 1 falls $(1-2\theta)\mu \le \frac{1}{2}$

$\cdot$ per Induktion folgt in beiden Fällen

$$\|u^m\|_{\ell^2} \le \|u^0\|_{\ell^2} + \Delta t\left(\sum_{k=1}^{m-1}\|F^k\|_{\ell^2} + \theta\|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta)\|F^0\|_{\ell^2}\right) \qquad \square$$

l2-von Neumann-Stabilität

Stabilitätsanforderungen sind typischerweise am stärksten auf $Z = \mathbb{Z}$, da dort alle Frequenzen k auftreten, während ein endliches Gitter nur endlich viele Frequenzen/Eigenmoden besitzt. Formal können wir die ℓ^2-Stabilität prüfen, indem wir $u_j^m = [\lambda(k)]^m e^{ijk\Delta x}$ ins Verfahren mit $F_j^m = 0$ einsetzen und $|\lambda(k)| \leq 1$ fordern.

<u>Def</u>: Das Verfahren heißt <u>ℓ^2-von Neumann-stabil</u>, wenn ein $C>0$ existiert sodass

$$\|u^m\|_{\ell^2} \leq C\left[\|u^0\|_{\ell^2} + \Delta t \sum_{k=0}^{m} \|F^k\|_{\ell^2}\right], \quad m = 1, \dots, M = T/\Delta t.$$

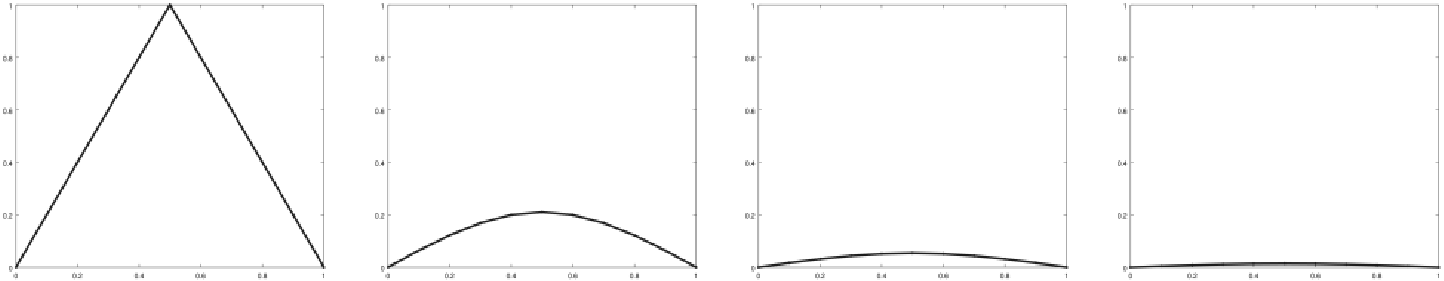
<u>Thm</u>: Das θ-Verfahren ist ℓ^2-von Neumann-stabil falls $(1-2\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} + c\Delta t$.

Bew: HA (nutze $(1+c\Delta t)^m \leq (1+\frac{cT}{M})^M \leq e^{cT}$) $\square$

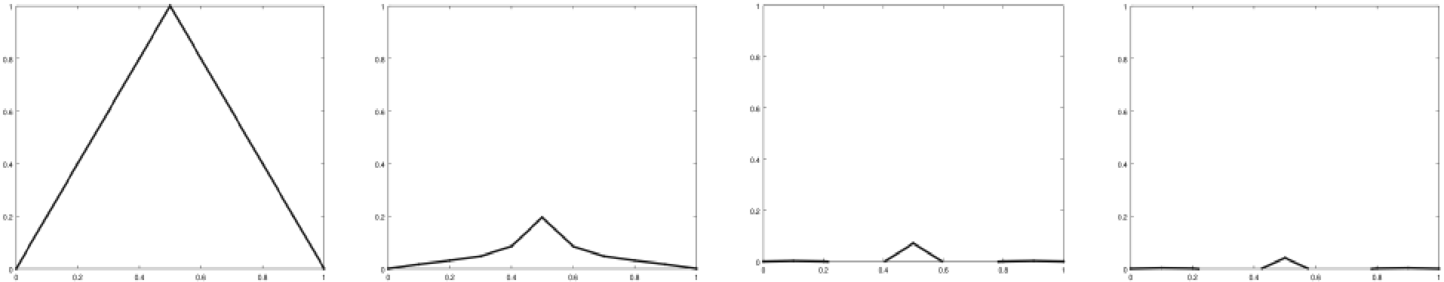
Beispielrechnung

$\dot{u} = u_{xx}$ on $[0,T] \times [0,1]$, $u(0,x) = 1 - 2\,|x - \frac{1}{2}|$, $u(t,\{0,1\}) = 0$

impl. Euler $\quad \Delta t = \Delta x = \frac{1}{10}$



Crank-Nicolson $\quad \Delta t = \Delta x = \frac{1}{10}$



Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

L^∞-Stabilität: Maximumprinzip

$\Omega = (a,b)$; $\left.\begin{array}{l} \dot u - u_{xx} = f\,,\ u|_{t=0} = u_0\,,\ u(\cdot,a) = u_a\,,\ u(\cdot,b) = u_b \\ \dot{\tilde u} - \tilde u_{xx} = f\,,\ \tilde u|_{t=0} = \tilde u_0\,,\ \tilde u(\cdot,a) = \tilde u_a\,,\ \tilde u(\cdot,b) = \tilde u_b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v = \tilde u - u \text{ löst } \dot v - v_{xx} = 0\,, \\ v|_{t=0} = \tilde u_0 - u_0,\ v(\cdot,a) = \tilde u_a - u_a,\ v(\cdot,b) = \tilde u_b - u_b \end{array}\right.$

<u>Thm:</u> (Maximumsprinzip) Sei $\dot u - \Delta u = f \overset{\geq}{\leq} 0$, dann $\underset{(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}}{\overset{\min}{\max}} u(t,x) = \underset{t=0 \vee x\in\partial\Omega}{\overset{\min}{\max}} u(t,x)$.

Bew: · Sei $u(t,x)$, $t\in(0,T]$, $x\in\Omega$ ein lok. Maximum $\Rightarrow$ $u_x = 0$, $u_t \geq 0$, $u_{xx} \leq 0$

· ist $f(t,x) < 0$, folgt $0 > f = u_t - u_{xx} \geq 0$ $\lightning$

· ist $f(t,x) \leq 0$, setze $v(t,x) = u(t,x) + \frac{\varepsilon}{2}x^2$ $\Rightarrow$ $\dot v - v_{xx} = f - \varepsilon < 0$

$\Rightarrow$ v nimmt mit vorigem Argument Maximum auf $\underbrace{\{0\}\times\Omega \cup (0,T]\times\partial\Omega}_{=:R}$ an

$\Rightarrow u(t,x) \leq v(t,x) \leq \max\limits_{(t,x)\in R} v(t,x) \leq \max\limits_{(t,x)\in R} u(t,x) + \varepsilon \max(|a|,|b|)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \max\limits_{(t,x)\in R} u(t,x)$

· analog für Minima $\square$

<u>Kor:</u> (L^∞-Stabilität) $\|\tilde u - u\|_{L^\infty} = \sup\limits_{x,t} |\tilde u(t,x) - u(t,x)| \leq \max\left(\|\tilde u_0 - u_0\|_{L^\infty}, \|\tilde u_a - u_a\|_{L^\infty}, \|\tilde u_b - u_b\|_{L^\infty}\right)$

$\sup\limits_{x\in\Omega} |\tilde u_0(x) - u_0(x)|$ $\qquad$ $\sup\limits_{t\in(0,T)} |\tilde u_a(t) - u_a(t)|$

Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

l^∞-Stabilität: diskretes Maximumprinzip

θ-Methode für $\dot u - \Delta u = f$: $\left(\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)$ $(*)$

$$\boxed{\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\,\frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}, \quad \begin{cases} U_0^m = A^m, \\ U_N^m = B^m, \\ U_j^0 = O_j \end{cases}}$$

Ist $\tilde U_j^m$ die Lsg. für Daten F & AB $\tilde O$ & RB $\tilde A, \tilde B$,

so löst $\tilde U - U$ die Gl. für Daten 0, AB $\tilde O - O$ & RB $\tilde A - A$, $\tilde B - B$

$\Rightarrow$ für Stabilität bzgl. AB & RB untersuchen, wie $\|\tilde U - U\|$ von $\|\tilde A - A\|, \|\tilde B - B\|, \|\tilde O - O\|$ abhängt

<u>Thm:</u> (Diskretes Maximumprinzip) U löse $(*)$ mit $F=0$ für $\theta \in [0,1]$ & $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$. Dann

$$\min\{U_j^m \mid m=0 \vee j=0 \vee j=N\} \leq U_j^m \leq \max\{U_j^m \mid m=0 \vee j=0 \vee j=N\} \quad \forall j,m$$

Bew:
$$(1+2\theta\mu)U_j^{m+1} = \overbrace{\theta\mu}^{\geq 0}(U_{j+1}^{m+1} + U_{j-1}^{m+1}) + \overbrace{(1-\theta)\mu}^{\geq 0}(U_{j+1}^m + U_{j-1}^m) + \overbrace{(1-2(1-\theta)\mu)}^{\geq 0}U_j^m$$
$$\leq 2\theta\mu \underbrace{U^*}_{=\max(U_{j+1}^{m+1}, U_{j-1}^{m+1}, U_{j+1}^m, U_{j-1}^m, U_j^m)} + 2(1-\theta)\mu U^* + (1-2(1-\theta)\mu)U^* \leq (1+2\theta\mu)U^*$$

$\Rightarrow$ Es kann kein striktes Maximum geben für $m \neq 0$ & $j \notin \{0, N\}$ (analog für Minima) $\square$

<u>Kor:</u> (ℓ^∞-Stabilität) $\theta \in [0,1]$, $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$. $\|U - \tilde U\|_{\ell^\infty} = \max_{j,m}|U_j^m - \tilde U_j^m| \leq \max\left(\|\tilde A - A\|_{\ell^\infty}, \|\tilde B - B\|_{\ell^\infty}, \|\tilde O - O\|_{\ell^\infty}\right)$

l^∞-Stabilität bzgl. Datenterm

Beachte: ℓ^∞-Stabilität hat stärkere Bedingungen an μ als ℓ^2-Stabilität.

Crank-Nicolson-Verfahren: ℓ^2-stabil $\forall \mu$, ℓ^∞-stabil für $\mu \leq 1$.

Thm: U löse $(\ast)$ mit $A = B = 0 = 0$ für $\theta \in [0,1]$, $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$, dann $\|U\|_{\ell^\infty} \leq T \, \|F\|_{\ell^\infty}$

Bew: $$(1+2\theta\mu)U_j^{m+1} = \theta\mu\left(U_{j+1}^{m+1} + U_{j-1}^{m+1}\right) + (1-\theta)\mu\left(U_{j+1}^{m} + U_{j-1}^{m}\right) + \left(1-2(1-\theta)\mu\right)U_j^m + \Delta t\left[(1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}\right]$$

$$\leq 2\theta\mu\|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} + 2(1-\theta)\mu\|U^m\|_{\ell^\infty} + \left(1-2(1-\theta)\mu\right)\|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t\,\|F\|_{\ell^\infty}$$

Bilde Maximum über j $\Rightarrow$ $\|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \leq \|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t\,\|F\|_{\ell^\infty}$

$$\Rightarrow \|U^m\|_{\ell^\infty} \leq \|U^0\|_{\ell^\infty} + m\,\Delta t\,\|F\|_{\ell^\infty} \leq T\,\|F\|_{\ell^\infty}, \quad m = 1, \ldots, M$$

$\square$

Konsistenz: Abschneidefehler

Def: Sei $u_j^m = u(t_m, x_j)$ für glatte Lsg. u. Der Abschneidefehler für das θ-Verfahren ist

$$T_j^m = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} - (1-\theta)\frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} - \theta\frac{u_{j-1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta) f_j^m - \theta f_j^{m+1}$$

Wie groß ist der Abschneidefehler? Wir nehmen an, u löst $\dot{u} - u_{xx} = f$ und ist ausreichend oft differenzierbar, und wir führen Taylorentwicklung durch.

$$u_j^{m+1} = u_j^m + u_t(t_m, x_j)\Delta t + O(\Delta t^2) \qquad \text{(analog für } f\text{)}$$

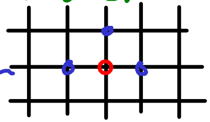
$$u_{j\pm 1}^m = u_j^m \pm u_x(t_m, x_j)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(t_m, x_j)\Delta x^2 \pm \frac{1}{6}u_{xxx}(t_m, x_j)\Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

$\Rightarrow$ Expl. Euler-Verf.: $\quad T_j^m = u_t + O(\Delta t) - u_{xx} + O(\Delta x^2) - f_j^m = O(\Delta t + \Delta x^2)$

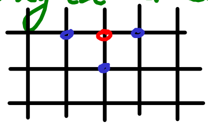
Thm: (Konsistenzordnung) Das θ-Verfahren erfüllt $T_j^m = \begin{cases} O(\Delta t + \Delta x^2), & \theta \neq \frac{1}{2} \\ O(\Delta t^2 + \Delta x^2), & \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$,

d.h. es ist konsistent 2. Ordnung im Ort & 1. bzw. 2. Ordnung in der Zeit.

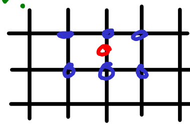
Bew: HA; beachte: Taylorentw. am leichtesten um



expl. Euler



imp. Euler



CN $\square$

$\Rightarrow$ Nur C-N-Verf. ist 2. Ordn. konsistent in Zeit!

Konvergenz (Konsistenz + Stabilität = Konvergenz!)

$$\frac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{U_{j-1}^m-2U_j^m+U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\frac{U_{j-1}^{m+1}-2U_j^{m+1}+U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}$$

$$\frac{u_j^{m+1}-u_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{u_{j-1}^m-2u_j^m+u_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\frac{u_{j-1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+u_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)f_j^m + \theta f_j^{m+1} + T_j^m$$

Setze $e_j^m = U_j^m - u_j^m \Rightarrow \frac{e_j^{m+1}-e_j^m}{\Delta t} = (1-\theta)\frac{e_{j-1}^m-2e_j^m+e_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta\frac{e_{j-1}^{m+1}-2e_j^{m+1}+e_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} - T_j^m$

$\Rightarrow$ e löst θ-Verfahren mit 0-AB & 0-RB & Daten F_j^m so dass $F_j^m = -\frac{T_j^{m-1}-(1-\theta)F_j^{m-1}}{\theta}$

wenn $1-\theta<\theta$ wähle $F^0=0 \Rightarrow \|F^m\| \le \frac{1}{\theta}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^k\|T^k\| \le C\|T\|_{\ell^\infty}$; wenn $\theta<1-\theta$ wähle $F^{M+1}=0 \Rightarrow \|F^m\| \le \frac{1}{1-\theta}\sum_{k=m}^{M}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{M-k}\|T^k\| \le C\|T\|_{\ell^\infty}$

<u>Thm:</u> u (glatt) löse $\dot u - u_{xx} = f$ mit AB & RB; U_j^m löse zugehöriges θ-Verfahren mit $\theta\in[0,1]$

- $\|U^m-u^m\|_{\ell^2} = \begin{cases} O(\Delta t+\Delta x^2), & \theta\neq\frac12 \\ O(\Delta t^2+\Delta x^2), & \theta=\frac12 \end{cases}$ falls $(1-2\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\le\frac12$, $m=1,\dots,M$

- $\|U^m-u^m\|_{\ell^\infty} = \begin{cases} O(\Delta t+\Delta x^2), & \theta\neq\frac12 \\ O(\Delta t^2+\Delta x^2), & \theta=\frac12 \end{cases}$ falls $(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\le\frac12$, $m=1,\dots,M$

Bew: $\overset{\text{Stabilität}}{\Longrightarrow}$ $\|e^m\|_{\ell^2} \le \Delta t\left(\sum_{k=2}^{m-1}\|F^k\|_{\ell^2} + \theta\|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta)\|F^0\|_{\ell^2}\right) \le T_{max} \max_{k=1,\dots,M}\|F^k\|_{\ell^2}$

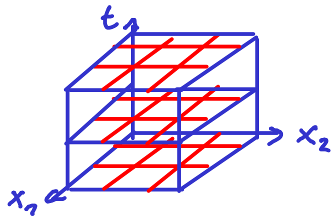
$\|e^m\|_{\ell^\infty} \le T\,\|F\|_{\ell^\infty}$

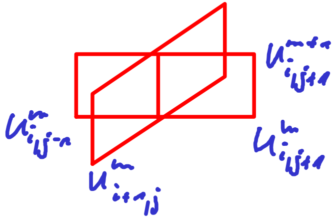
$\overset{\text{Konsistenz}}{\Longrightarrow}$ $\|e^m\|_{\ell^2}, \|e^m\|_{\ell^\infty} \le O(\Delta t^{1 \text{ bzw. } 2}+\Delta x^2)$ $\square$

Zusammenfassung 2D-Gebiet

$\dot{u} - \Delta u = f$ auf $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

mit AB & RB





<u>Thm</u>: 1) Das θ-Verfahren für $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ mit Gitterweiten $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$ und $\mu_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x_1^2}$, $\mu_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x_2^2}$, $\theta \in [0, 1]$, ist

- ℓ^2-stabil für $(1-2\theta)(\mu_1 + \mu_2) \leq \frac{1}{2}$,
- ℓ^∞-stabil für $(1-\theta)(\mu_1 + \mu_2) \leq \frac{1}{2}$,

2) es ist konsistent mit Abschneidefehler

- $T_j^m = O(\Delta t + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ für $\theta \neq \frac{1}{2}$
- $T_j^m = O(\Delta t^2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ für $\theta = \frac{1}{2}$

3) es ist konvergent gleicher Ordnung in der ℓ^2/ℓ^∞-Norm, wenn es in dieser stabil ist.

Bew: HA $\square$

Alternating Direction Implicit (ADI) method

$\dot{u} - \Delta u = 0$

Schreibe $\delta_1^2 U_{ij}^m = U_{i-1,j}^m - 2U_{ij}^m + U_{i+1,j}^m$; analog δ_2^2

Crank-Nicolson: $\left(1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^m$

Def: ADI-Verf.: $\left(1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^m$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right) U_{ij}^{m+1/2} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^m & \Big|\ \left(1 + \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right)\cdot \ldots \\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right) U_{ij}^{m+\frac{1}{2}} & \Big|\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right)\cdot \ldots \end{cases}\right\} (*)$$

ADI unterscheidet sich von CN nur durch die Terme $\frac{1}{4}\mu_1\mu_2\delta_1^2\delta_2^2$.

Es hat den Vorteil, dass die zu lösenden Gleichungssysteme (mit Matrizen $1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2$ und $1 - \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2$) tridiagonal sind und somit durch den Thomas-Algorithmus leicht gelöst werden können (bei CN sind die Matrizen viel komplizierter)!

Thm: Das ADI-Verfahren ist ℓ^2-stabil und für $\mu_1, \mu_2 \leq 1$ auch ℓ^∞ stabil. Es ist konsistent und konvergent 2. Ordnung in Ort und Zeit.

Bew: HA; nutze $(*)$ zur Herleitung der Stabilität. $\square$

Ausblick: Nichtlineare pDgl.

Für nichtlineare pDgl. ist Stabilität des Verfahrens oft kompliziert zu zeigen.

Bsp: $\dot{u} = \Delta u + 2u(1-u^2)+f$ kann diskretisiert werden durch

$$U_{ij}^{m+1} - U_{ij}^{m} = \mu_1 \delta_1^2 U_{ij}^{m+1} + \mu_2 \delta_2^2 U_{ij}^{m+1} - 2\Delta t \left(U_{ij}^{m+1}\right)^3 + 2\Delta t\, U_{ij}^{m} + \Delta t\, F_{ij}^{m}$$

Für U gilt nicht das Maximumprinzip (auch nicht für u), allerdings gilt:

Thm: $\|U^m\|_{\ell^\infty} \le \max\left(1, \|U^0\|_{\ell^\infty}, \max_{x_{ij}\in\partial\Omega, n\le m} |U_{ij}^n|\right) + T\|F\|_{\ell^\infty}$

Bew: Sei $|U_{ij}^{m+1}| > 1$ für ein $x_{ij} \in \operatorname{int}\Omega$, dann ist

$$\begin{aligned}
|U_{ij}^{m+1}|(1+2\mu_1+2\mu_2+2\Delta t) &\le \left|U_{ij}^{m+1}(1+2\mu_1+2\mu_2) + 2\Delta t\left(U_{ij}^{m+1}\right)^3\right| \\
&= \left|U_{ij}^{m} + \mu_1\left(U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i+1,j}^{m+1}\right) + \mu_2\left(U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1}\right) + 2\Delta t\, U_{ij}^{m} + \Delta t F_{ij}^{m}\right| \\
&\le (1+2\Delta t)\|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t\|F\|_{\ell^\infty} + 2(\mu_1+\mu_2)\|U^{m+1}\|_{\ell^\infty}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \le \max\left(1, \max_{x_{ij}\in\partial\Omega} |U_{ij}^{m+1}|\right)$ oder $\|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \le \|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t\|F\|_{\ell^\infty}$

$\Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \le \max\left(1, \max_{x_{ij}\in\partial\Omega} |U_{ij}^{m+1}|, \|U^m\|_{\ell^\infty}\right) + \Delta t\|F\|_{\ell^\infty}$

$\Rightarrow$ Ergebnis folgt per Induktion. $\square$

Ausblick: Nichtlineare pDgl.

Mit solchen Beschränktheitsresultaten lässt sich alles auf den linearen Fall zurückführen.

<u>Thm:</u> (Stabilität) $\tilde{u}$ sei die Lsg. für $\tilde{F}$ und gleiche AB & RB. Dann gilt für ein $C>0$ und Δt klein genug (beides abhängig von $\|F\|_{\ell^\infty}, \|\tilde{F}\|_{\ell^\infty}$, AB, RB): $\|\tilde{u} - u\|_{\ell^\infty} \le C \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty}$

Bew: $V_{ij}^{m+1} - V_{ij}^{m} = \mu_1 \delta_1^2 V_{ij}^{m+1} + \mu_2 \delta_2^2 V_{ij}^{m+1} - 2\Delta t \underbrace{\left[\left(\tilde{u}_{ij}^{m+1}\right)^3 - \left(u_{ij}^{m+1}\right)^3 \right]} + 2\Delta t V_{ij}^m + \Delta t \left(\tilde{F}_{ij}^m - F_{ij}^m\right)$

$V = \tilde{u} - u$

$$= V_{ij}^{m+1} \left(\left(\tilde{u}_{ij}^{m+1}\right)^2 + \tilde{u}_{ij}^{m+1} u_{ij}^{m+1} + \left(u_{ij}^{m+1}\right)^2 \right) =: V_{ij}^{m+1} B_{ij}^{m+1}$$

Nun Standard-Argument für linearen Fall:

$$V_{ij}^{m+1}\left(1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\Delta t B_{ij}^{m+1}\right) = V_{ij}^m + \mu_1\left(V_{i-1,j}^{m+1} + V_{i+1,j}^{m+1}\right) + \mu_2\left(V_{i,j-1}^{m+1} + V_{i,j+1}^{m+1}\right) + 2\Delta t V_{ij}^m + \Delta t\left(\tilde{F}_{ij}^m - F_{ij}^m\right)$$

$$\Rightarrow \|V^{m+1}\|_{\ell^\infty}\left(1 - 2\Delta t \|B\|_{\ell^\infty}\right) \le \|V^m\|_{\ell^\infty}(1 + 2\Delta t) + \Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty}$$

$\|B\|_{\ell^\infty} \le \left(\|\tilde{u}\|_{\ell^\infty} + \|u\|_{\ell^\infty}\right)^2$ hängt nur von $F, \tilde{F}$, AB & RB ab. Ist $\Delta t \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8\|B\|_{\ell^\infty}}\right\}$, folgt

$\frac{1+2\Delta t}{1 - 2\|B\|_{\ell^\infty}\Delta t} \le 1 + 2\Delta t + 4\|B\|_{\ell^\infty}\Delta t$, $\frac{1}{1 - 2\|B\|_{\ell^\infty}\Delta t} \le \frac{4}{3}$ und somit

$$\|V^{m+1}\|_{\ell^\infty} \le \|V^m\|_{\ell^\infty} \overbrace{\left(1 + 2\Delta t + 4\|B\|_{\ell^\infty}\Delta t\right)}^{=:q} + 2\Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty}$$

$$\le \|V^0\|_{\ell^\infty} q^{m+1} + 2\Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty} \sum_{i=0}^{m-1} q^i$$

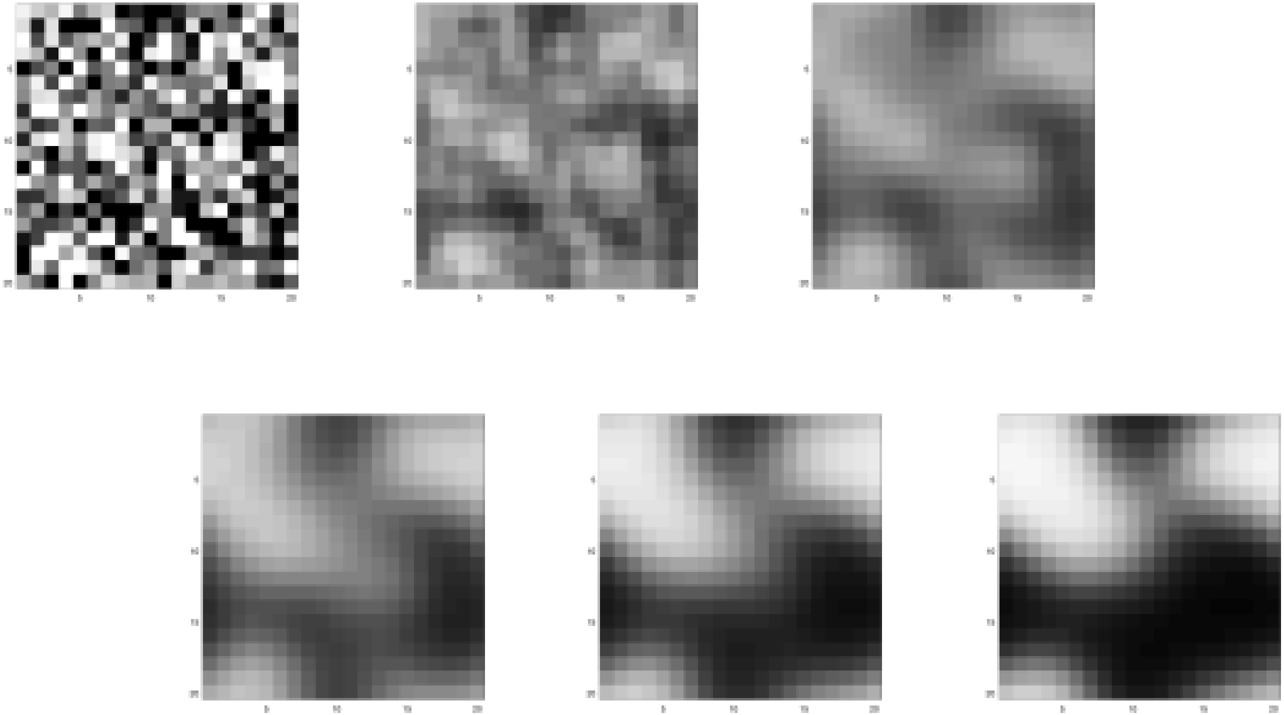
$$\sum_{i=0}^{m-1} q^i = \frac{q^m - 1}{q - 1} \le \frac{q^M}{\Delta t} \le \frac{\left(1 + (2 + 4\|B\|_{\ell^\infty})\frac{T}{M}\right)^M}{\Delta t} \le \frac{e^{(2+4\|B\|_{\ell^\infty})T}}{\Delta t} \quad \square$$

Konvergenz folgt nun aus Konsistenz und Stabilität wie zuvor.

Beispiel nichtlineare pDgl.

$\dot{u} = \Delta u + 2u(1-u^2)$ ist Gradientenfluss zu $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + (u^2-1)^2 \, dx$

$\Rightarrow$ $u = 1$ (weiß) oder -1 (schwarz) werden auf lange Sicht angenommen



Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

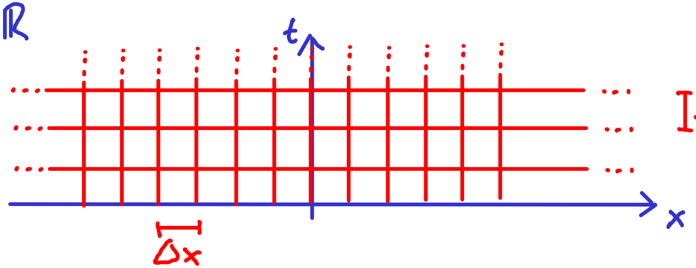
Upwind-Methode

was ist Interpretation?

$u_t + a(t,x)u_x + c(t,x)u = f(t,x)$ auf $[0,T]\times\Omega$, $a \geq 0$

AB: $u(t=0,x) = u_0(x)$, RB : $u(t,l) = u_l(t)$

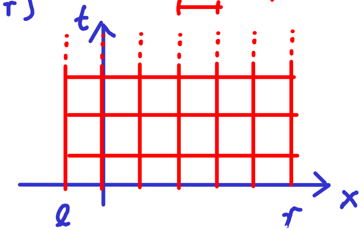
Gitter: $\cdot\ \Omega = \mathbb{R}$



$\Delta t = \frac{T}{M}$

$\cdot\ \Omega = [l, r]$

$\Delta x = \frac{r-l}{N}$



Upwind-Verfahren: $\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{U_j^m - U_{j-1}^m}{\Delta x} + C_j^m U_j^m = F_j^m$

$\Leftrightarrow U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_j^m (U_j^m - U_{j-1}^m) - \Delta t\, C_j^m U_j^m + \Delta t\, F_j^m$

AB: $U_j^0 = u(t=0, x_j)$; RB: $U_0^m = u(t^m, l)$

Falls $a \leq 0$ wähle: $\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{U_{j+1}^m - U_j^m}{\Delta x} + C_j^m U_j^m = F_j^m$

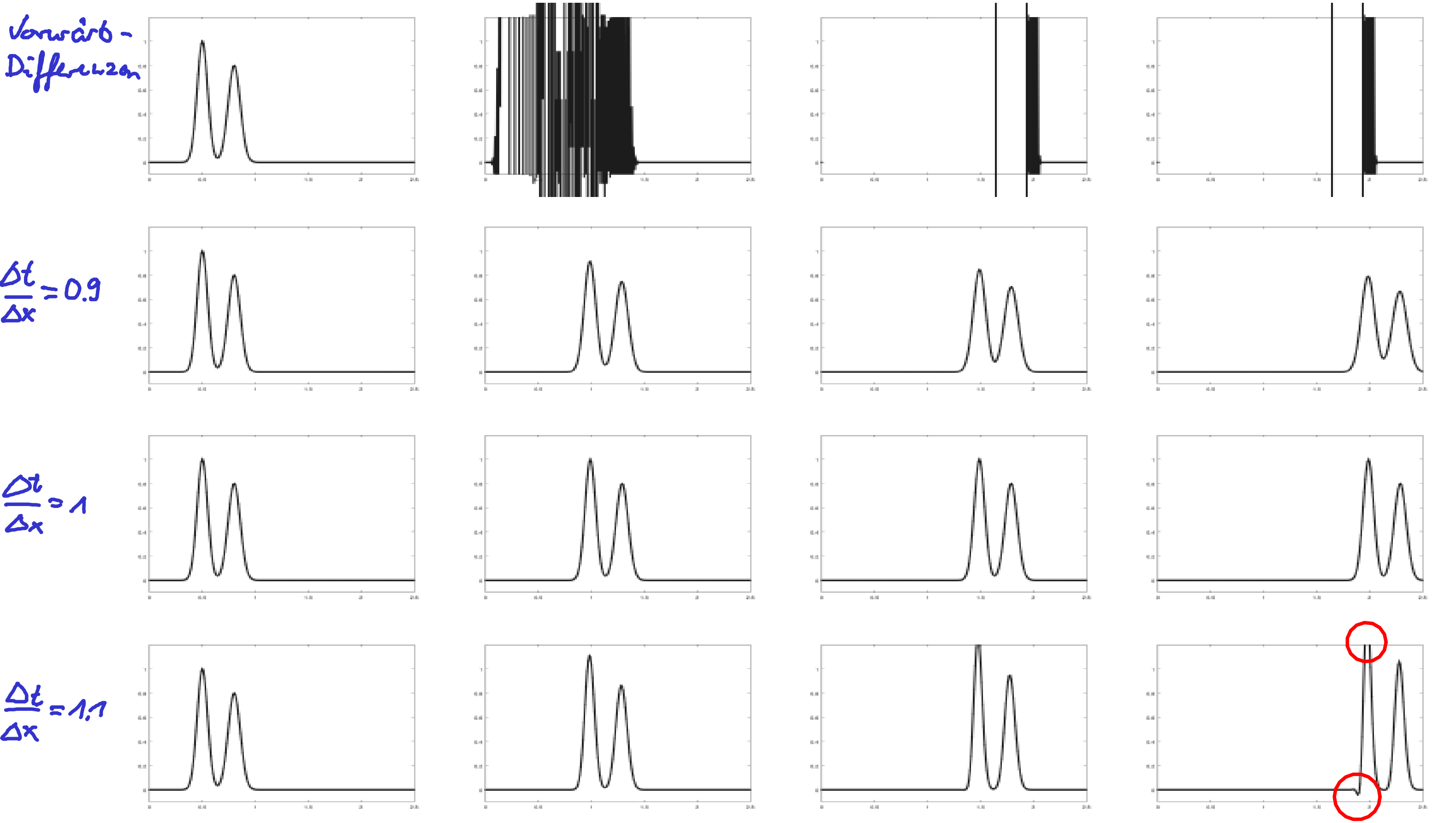
AB: $U_j^0 = u(t=0, x_j)$; RB: $U_N^m = u(t^m, r)$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Beispielrechnung

$$\dot{u} + u_x = 0, \quad u(0,x) = e^{-200(x-\frac{1}{2})^2} + 0.8\, e^{-150(x-0.8)^2} =: u_0(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = u_0(x-t)$$



Lebesgue-Räume

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1,\infty]$. $\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & , p \neq \infty \\ \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf_{\tilde{f}=f \text{ f.ü.}} \sup_{x\in\Omega} |\tilde{f}(x)| & , p = \infty \end{cases}$

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p} < \infty \}$$

Thm: (Hölder-Ungleichung) Für $p,q \in [1,\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega |f g| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Bew: • Für $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$a^\lambda b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$ (geometrischer ≤ arithmetischer Durchschnitt),

denn $f(t) = t^\lambda - \lambda t + \lambda - 1$ erfüllt $f(t) \leq f(1) = 0 \implies t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda$; nun wähle $t = \frac{a}{b}$

• wähle $a = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}\right)^p$, $b = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}\right)^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $1 - \lambda = \frac{1}{q}$

$$\implies \frac{|f(x) g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}\right)^q;$$ nun integriere über Ω. $\square$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Lp-Stabilität

$u_t + a(t,x)u_x + c(t,x)u = f(t,x)$ auf $[0,T]\times\Omega$, $\quad p \in [1,\infty)$

<u>Thm:</u> Sei $u_0(x), f(x) = 0$ für $|x|$ groß genug, $\Omega = \mathbb{R}$, Lsg. $u \geq 0$ glatt, dann ist

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p} \exp\left(\int_0^t \|c(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|a_x(s,\cdot)\|_{L^\infty} ds\right)$$
$$+ \int_0^t \|f(r,\cdot)\|_{L^p} \exp\left(\int_r^t \|c(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|a_x(s,\cdot)\|_{L^\infty} ds\right) dr$$

Bew: $p\|u\|_{L^p}^{p-1} \frac{d}{dt}\|u\|_{L^p} = \frac{d}{dt}\|u\|_{L^p}^p = p\int_\Omega u^{p-1}(f - au_x - cu)\,dx$

$$\leq p\left[\|u\|_{L^p}^p \|c\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p}\right] - \underbrace{\int_\Omega a\,(u^p)_x\,dx}_{= -\int_\Omega a_x u^p dx} \leq p\left[\|u\|_{L^p}^p \|c\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|a_x\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}^p\right]$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_{L^p} \leq \left(\|c\|_{L^\infty} + \|a_x\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}$; nun nutze Gronwall $\square$

<u>Thm:</u> Für a, c konstant, $\Omega = \mathbb{R}$, ist $u(t,x) = e^{-ct}u_0(x-at) + \int_0^t e^{-c(t-s)} f(s, x-a(t-s))\,ds$

$\Rightarrow \|u(t,\cdot)\|_{L^p} \leq e^{-ct}\|u_0\|_{L^p} + \int_0^t e^{-c(t-s)}\|f(s,\cdot)\|_{L^p}\,ds \qquad \forall p \in [1,\infty]$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

l2-Stabilität

$\dot{u} + a u_x + c u = f$, a, c konstant, $a \geq 0$, $\Omega = \mathbb{R}$

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + a\,\frac{U_j^m - U_{j-1}^m}{\Delta x} + c\,U_j^m = F_j^m$$

<u>Thm:</u> (ℓ^2-Stabilität) Sei U_j^m die Lsg. des Upwind-Verfahrens, $\mu = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Es ist

$$\|U^m\|_{\ell^2} \leq \begin{cases} e^{-ct^m}\|U^0\|_{\ell^2} + \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} \|F^n\|_{\ell^2}\, e^{-c(t^m - t^n)} & \text{falls } \mu \leq 1 - c\Delta t \text{ „}\ell^2\text{-stabil"} \\ e^{(c+2k)t^m}\|U^0\|_{\ell^2} + \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} \|F^n\|_{\ell^2}\, e^{(c+2k)(t^m - t^n)} & \text{falls } \mu \leq 1 + \underset{\geq 0}{k}\Delta t \text{ „}\ell^2\text{-von Neumann-stabil"} \end{cases}$$

Bew.: Setze $U_j^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{U}^m(k)\, e^{ikj\Delta x}\, dk$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}^{m+1}(k) - \hat{U}^m(k)}{\Delta t} + a\,\frac{\hat{U}^m(k) - e^{-ik\Delta x}\hat{U}^m(k)}{\Delta x} + c\,\hat{U}^m(k) = \hat{F}^m(k) \quad \forall k \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$$

$$\Rightarrow \hat{U}^{m+1}(k) = \left(1 - \mu(1 - e^{-ik\Delta x}) - c\Delta t\right)\hat{U}^m(k) + \Delta t\,\hat{F}^m(k) =: \lambda(k)\,\hat{U}^m(k) + \Delta t\,\hat{F}^m(k)$$

- Sei $\Lambda = \max_k |\lambda(k)| \Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{U}^{m+1}\|_{L^2} \leq \Lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{U}^m\|_{L^2} + \Delta t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{F}^m\|_{L^2}$

für $a<0$ wäre dies $\approx 1 + \tilde{c}|\mu|$!! $\quad = \Lambda\|U^m\|_{\ell^2} + \Delta t\|F^m\|_{\ell^2} \leq \Lambda^{m+1}\|U^0\|_{\ell^2} + \sum_{n=0}^{m}\Delta t\,\Lambda^{m-n}\|F^n\|_{\ell^2}$

- $|\lambda(k)|^2 = (1 - c\Delta t)^2 + 4\mu\left(\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)(\mu - (1 - c\Delta t)) \Rightarrow \Lambda \leq \begin{cases} 1 - c\Delta t \leq e^{-c\Delta t} & \text{falls } \mu \leq 1 - c\Delta t \\ 1 + (c+2k)\Delta t \leq e^{(c+2k)\Delta t} & \text{falls } \mu \leq 1 + k\Delta t \end{cases}$ $\square$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

l^∞-Stabilität

$\dot{u} + a u_x + c u = f$, $\quad a \geq 0$, $\Omega = \mathbb{R}$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + A_j^n \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} + C_j^n U_j^n = F_j^n$$

<u>Thm</u>: (ℓ^∞-Stabilität) Sei U_j^n Lsg. des Upwind-Verfahrens, $n \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, $\mu = \|A\|_{\ell^\infty} \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Falls $\mu \leq 1$, $\quad \|U^n\|_{\ell^\infty} \leq e^{t^n \|C\|_{\ell^\infty}} \|U^0\|_{\ell^\infty} + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} e^{(t^{n-1} - t^k)\|C\|_{\ell^\infty}} \|F^k\|_{\ell^\infty}$.

Bew: $U_j^{n+1} = U_j^n \left(1 - A_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + A_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{j-1}^n - \Delta t\, C_j^n U_j^n + \Delta t\, F_j^n$

$\Rightarrow |U_j^{n+1}| \leq \|U^n\|_{\ell^\infty} \left(1 - A_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + A_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \|U^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|C\|_{\ell^\infty} \|U^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|F^n\|_{\ell^\infty}$

$\Rightarrow \|U^{n+1}\|_{\ell^\infty} \leq (1 + \|C\|_{\ell^\infty} \Delta t) \|U^n\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|F^n\|_{\ell^\infty}$

$\Rightarrow$ nun Induktion in n $\square$

<u>Thm</u>: Für c = konstant & $\mu + c\Delta t \leq 1$ gilt sogar $\|U^n\|_{\ell^\infty} \leq e^{-c t^n} \|U^0\|_{\ell^\infty} + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} e^{-c(t^{n-1} - t^k)} \|F^k\|_{\ell^\infty}$

Bew: HA $\square$

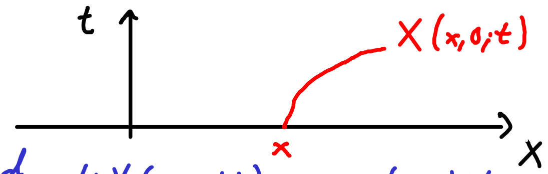
Wie sieht es mit $\Omega = [\ell, r]$ und Dirichlet-RB in ℓ aus?

Domain of Dependence

$$u_t(t,x) + a(t,x)\,u_x(t,x) + c(t,x)\,u(t,x) = f(t,x)$$

<u>Def</u>: Die durch $\frac{d}{dt}X(x,s;t) = a(t,X(x,s;t))$, $X(x,s;s) = x$ definierte Kurve heißt <u>charakteristische Kurve</u> zur pDgl.

<u>Bsp</u>: $\dot u + t\,u_x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}X(x,s;t) = t \Rightarrow X(x,s;t) = x + \frac{t^2-s^2}{2}$



Es ist $\frac{d}{dt}u(t,X(x,s;t)) = u_t(t,X(x,s;t)) + u_x(t,X(x,s;t))\,\overbrace{\frac{d}{dt}X(x,s;t)}^{=a(t,X)}$

$$= -c(t,X(x,s;t))\,u(t,X(x,s;t)) + f(t,X(x,s;t))$$

Mit $\tilde g(t) := g(t,X(x,s;t))$ ergibt sich $\dot{\tilde u} = -\tilde c\,\tilde u + \tilde f$ $\Rightarrow$ entlang char. Kurven gilt gDgl.

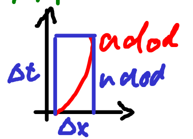
$\Rightarrow$ $\tilde u(t) = \tilde u(s)\,e^{-\int_s^t \tilde c(r)\,dr} + \int_s^t \tilde f(\tau)\,e^{-\int_\tau^t \tilde c(r)\,dr}\,d\tau$ hängt nur von c, f, u entlang $(t, X(x,s;t))$ ab!

<u>Bsp</u>: $\dot u + t\,u_x = 0 \Rightarrow u\left(t, x + \frac{t^2-s^2}{2}\right) = u(s,x) \Rightarrow u(t,x) = u\left(0, x - \frac{t^2}{2}\right)$

<u>Def</u>: Die analytische <u>domain of dependence</u> (dod) von (s,x) ist $\{(X(x,s;t),t) \mid 0 \le t \le s\}$.

<u>Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung</u>: analytische $\subset$ numerische dod

$\Rightarrow a\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$



Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Konvergenz (Konsistenz + Stabilität)

Def: u löse $\dot{u} + a u_x + cu = f$. Der Abschneidefehler für das Upwind-Verfahren ist

$$T_j^m = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + a_j^m \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} + c_j^m u_j^m - f_j^m \qquad (\text{mit } g_j^m = g(t^m, x_j))$$

Thm: (Konsistenz) Das Upwind-Verfahren ist konsistent erster Ordnung, d.h. für eine glatte Lösung u gilt $T_j^m = O(\Delta t + \Delta x)$.

Bew: HA (mittels Taylorentwicklung) □

Wie bei der Wärmeleitung löst der Fehler $e_j^m = U_j^m - u_j^m$: $\frac{e_j^{m+1} - e_j^m}{\Delta t} + a_j^m \frac{e_j^m - e_{j-1}^m}{\Delta x} + c_j^m e_j^m = -T_j^m$

Thm: (Konvergenz) U_j^m, $j \in \mathbb{Z}$, $m = 0, \dots, M = \frac{T}{\Delta t}$ löse das Upwind-Verfahren für $\dot{u} + a u_x + cu = f$ auf $[0,T] \times \Omega$, $\Omega = \mathbb{R}$, $a \geq 0$ + AB, u glatt, $\mu \leq 1$. Dann gilt $\|e^m\|_{\ell^2}, \|e^m\|_{\ell^\infty} = O(\Delta t + \Delta x)\ \forall m$

Bew: Stabilität $\Longrightarrow$ $\|e^m\| \leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} e^{\text{konst.} T} \|T^m\| \leq T e^{\text{konst} T} O(\Delta t + \Delta x)$. □

nur an dem Rand, wo char. Kurven reinlaufen!

Thm: Nun sei $\Omega = [\ell, r]$ & es gelten RB $u(t, \ell) \overset{!}{=} g(t)$. $\|e^m\|_{\ell^\infty} = O(\Delta t + \Delta x)$, $m = 1, \dots, M$.

Bew: HA (leite erst ℓ^∞-Stabilität für 0-RB her) □

Verfahren höherer Konsistenzordnung

Vorzeichen von a spielt keine Rolle mehr!

$u_t + a u_x = 0$

Def: · Verfahren mit zentralen Differenzen $\dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\Delta t} + A_j^m \dfrac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = 0$

· Lax-Friedrichs-Verfahren $\dfrac{U_j^{m+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m)}{\Delta t} + A_j^m \dfrac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = 0$

· Lax-Wendroff-Verfahren $\dfrac{U_j^{m+1}-U_j^m}{\Delta t} + a \dfrac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = \dfrac{1}{2}\Delta t a^2 \dfrac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{\Delta x^2}$

für $a =$ konst.

Wie kommt das Lax-Wendroff-Verf. zustande?

$$u_t = -a u_x \quad \Rightarrow \quad u_{tt} = -a_t u_x - a u_{xt} = -a_t u_x - a(-a u_x)_x$$

Taylorentwicklung $\Rightarrow$ $u_j^{m+1} = u_j^m + \Delta t \underbrace{[u_t]_j^m}_{=-[a u_x]_j^m} + \dfrac{\Delta t^2}{2} \underbrace{[u_{tt}]_j^m}_{=-[a_t u_x - a(a u_x)_x]_j^m} + O(\Delta t^3)$

$$\Rightarrow \frac{u_j^{m+1}-u_j^m}{\Delta t} + \left[\left(a + \tfrac{1}{2}\Delta t a_t\right) u_x\right]_j^m = \frac{1}{2}\Delta t \left[a(a u_x)_x\right]_j^m + O(\Delta t^2)$$

Thm: (Konsistenz) Für eine glatte Lsg. u ist der Abschneidefehler der drei Verfahren $O(\Delta t + \Delta x^2)$ bzw. $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ für LW.

Bew: HA □

l2-Stabilität

$u_t + a u_x = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $a =$ konst.

Setzen wir $U_j^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat U^m(k)\, e^{ikx_j}\, dk$ in die Verfahren ein, erhalten wir

zentr. Diff: $$\frac{\hat U^{m+1}(k) - \hat U^m(k)}{\Delta t} + a\,\frac{e^{ik\Delta x}\hat U^m(k) - e^{-ik\Delta x}\hat U^m(k)}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Friedrichs: $$\frac{\hat U^{m+1}(k) - \frac12\left(e^{ik\Delta x}\hat U^m(k) + e^{-ik\Delta x}\hat U^m(k)\right)}{\Delta t} + a\,\frac{e^{ik\Delta x}\hat U^m(k) - e^{-ik\Delta x}\hat U^m(k)}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Wendroff: $$\frac{\hat U^{m+1}(k) - \hat U^m(k)}{\Delta t} + a\,\frac{e^{ik\Delta x}\hat U^m(k) - e^{-ik\Delta x}\hat U^m(k)}{2\Delta x} = \frac12 \Delta t\, a^2\, \hat U^m(k)\,\frac{e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$\Longrightarrow \hat U^{m+1}(k) = \lambda(k)\,\hat U^m(k)$ für alle $k \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$ mit

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\mu}{2}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right) = 1 - \mu i \sin k\Delta x, & \text{ZD} \\ \frac12\left[e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - \mu\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)\right] = \cos k\Delta x - \mu i \sin k\Delta x, & \text{LF} \\ 1 - \frac{\mu}{2}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right) + \frac{\mu^2}{2}\left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}\right) = 1 - \mu i \sin k\Delta x - 2\mu^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2}, & \text{LW} \end{cases}$$

Thm: (ℓ^2-Stabilität) LF & LW sind ℓ^2-stabil für $|\mu| \le 1$, ZD ist für kein μ ℓ^2-stabil.

Bew: LF: $|\lambda(k)|^2 = \cos^2 k\Delta x + \mu^2 \sin^2 k\Delta x \le 1$; LW: $|\lambda(k)|^2 = \left(1 - 2\mu^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)^2 + \mu^2 \sin^2 k\Delta x = 1 - 4\mu^2(1-\mu^2)\sin^4\frac{k\Delta x}{2} \le 1$

ZD: $|\lambda(k)|^2 = 1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta x > 1 \Longrightarrow \left|\hat U^m(k)\right| \ge (1+c)^{\frac{m}{2}}\left|\hat U^0(k)\right|$ für $\forall\, c \le \mu^2 \sin^2(k\Delta x)$

$\Longrightarrow$ aus $\Delta t \xrightarrow[\mu \text{ konst.}]{} 0$ folgt $\sqrt{2\pi}\,\|U^M\|_{\ell^2} = \|\hat U^M\|_{L^2} \ge \left\|\hat U^M|_{[\frac{\pi}{4\Delta x}, \frac{3\pi}{4\Delta x}]}\right\|_{L^2} \ge \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)^{\frac{M}{2}} \left\|\hat U^0|_{[\frac{\pi}{4\Delta x}, \frac{3\pi}{4\Delta x}]}\right\|_{L^2} \to \infty$ □

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

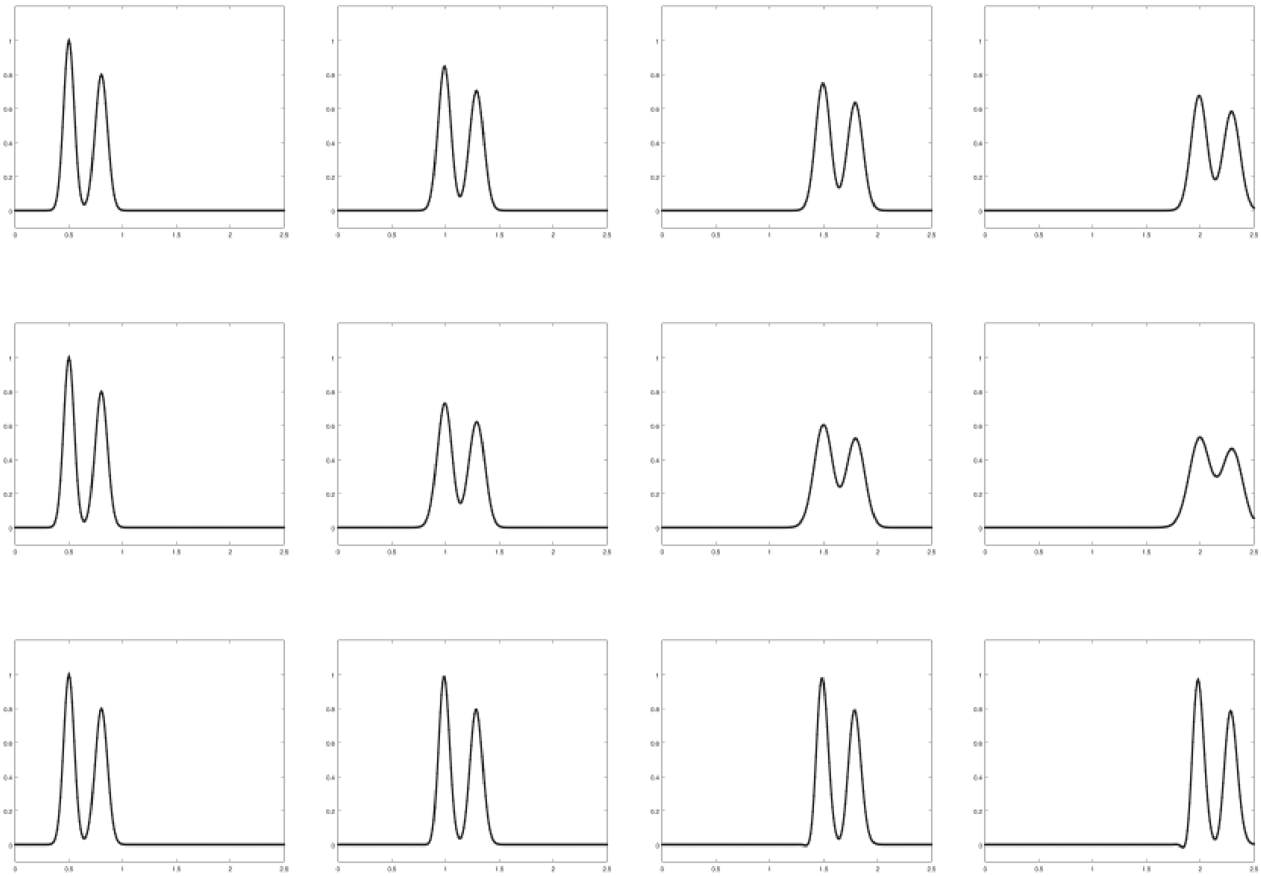
Beispielrechnung

$u_t + u_x = 0, \quad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.7$

upwind

LF

LW



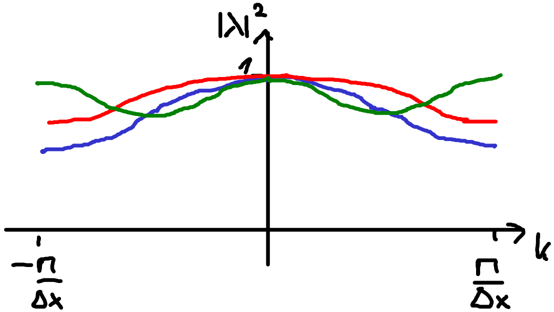
alle Verfahren sind konvergent in ℓ^2 (folgt aus Stabilität + Konsistenz), aber...

Numerische Dissipation

$u_t + u_x = 0$ hat Lsg. $u(t,x) = u(0, x-t)$ $\Rightarrow$ $\|u\|_{L^2} = $ konst.

$\sqrt{2\pi}\,\|U^m\|_{\ell^2} = \|\hat{U}^m\|_{L^2}$ mit $|\hat{U}^m(k)| \leq |\lambda(k)|^m |\hat{U}^0(k)|$

für $$|\lambda(k)|^2 = \begin{cases} 1 - 4\mu(1-\mu)\sin^2\frac{k\Delta x}{2} & \text{upwind} \\ 1 - (1-\mu^2)\sin^2 k\Delta x & \text{LF} \\ 1 - 4\mu^2(1-\mu^2)\sin^4\frac{k\Delta x}{2} & \text{LW} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Frequenzanteile zu $k=0$ bleiben erhalten wegen $|\lambda(0)| = 1$, aber Frequenzanteile weiter weg von $k=0$ werden gedämpft $\Rightarrow$ „numerische Dissipation"

<u>Def</u>: Gilt für ein Verfahren $|\lambda(k)|^2 \leq 1 - \delta\left|\sin\frac{k\Delta x}{2}\right|^{2r}$ nahe bei $k=0$ für ein $\delta > 0$, $r \in \mathbb{N}$, heißt das Verfahren <u>dissipativ von Ordnung r</u>. (upwind & LF: $r=1$, LW: $r=2$)

Ausblick: 2D und Nichtlinearität

Erhaltungsprinzip: $u_t + \operatorname{div}[q(x,u)] = 0 \quad \Rightarrow \quad u_t + q_u \cdot u_x + q_x \cdot 1 = 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ generelle Form: $u_t(t,x) + a(t,x,u(t,x)) \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$

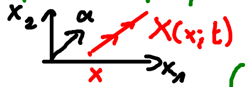
Lsg. erfüllt $u(t, X(x;t)) = U(x;t)$ für charakteristische Gleichungen

g Dgl., d.h. Konzept der dod gilt auch hier

$$\begin{cases} \dot{X}(x;t) = a(t, X(x;t), U(x;t)), & X(x;0) = x \\ \dot{U}(x;t) = f(t, X(x;t), U(x;t)), & U(x;0) = u(0,x) \end{cases}$$

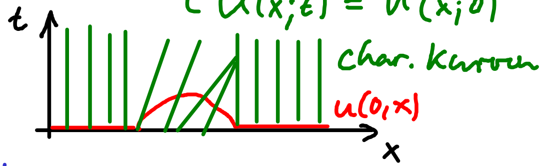
Bsp: $u_t + a \cdot \nabla u = 0$, $a \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X(x;t) = at + x$, $u(t, X(x;t)) = U(x;t) = U(x;0)$, d.h. $u(t,y) = u(0, y-at)$

char. Kurve



Bsp: (Burgers-Gleichung) $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$, d.h. $a(t,x,u) = u$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} X(x;t) = U(x;0)\,t + x \\ U(x;t) = U(x;0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ u ist konstant entlang char. Kurven



Das Upwind-Verfahren lautet nun

neg. Anteil

$$\frac{U_{ij}^{m+1} - U_{ij}^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[a(t^m, x_{ij}, U_{ij}^m)^+ \cdot \begin{pmatrix} U_{ij}^m - U_{i-1,j}^m \\ U_{ij}^m - U_{i,j-1}^m \end{pmatrix} + a(t^m, x_{ij}, U_{ij}^m)^- \cdot \begin{pmatrix} U_{i+1,j}^m - U_{ij}^m \\ U_{i,j+1}^m - U_{ij}^m \end{pmatrix} \right] = f(t^m, x_{ij}, U_{ij}^m)$$

+ AB + RB an dem Teil von $\partial\Omega$, von dem die char. Kurven starten.

Ist $\left| a(t,x,u) \cdot \begin{pmatrix} \Delta t / \Delta x_1 \\ \Delta t / \Delta x_2 \end{pmatrix} \right| \leq 1 \ \forall t,x,u$, folgt ℓ^2-/ℓ^∞-Stabilität wie zuvor.

PDgl.-Theorie: Einführung

Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen: $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

Dies hatten wir interpretiert als notwendige Bedingung dafür, dass u

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)\,u(x)\,dx \qquad (*)$$

unter allen Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ mit 0-Randwerten minimiert. Im Detail:

Def: (Gâteaux-Ableitung) Sei X ein Vektorraum, $E: X \to \mathbb{R}$. Die Gâteaux-Ableitung von E in $u \in X$ in Richtung $v \in X$ ist $\partial_u E(u)(v) = \frac{d}{dt} E(u+tv)\big|_{t=0}$.

Thm: (Notwendige Optimalitätsbedingung) Minimiert u das Funktional E und existiert $\partial_u E(u)(v)$, so ist $\partial_u E(u)(v) = 0$. warum?

Bsp: Für $(*)$ ist $\partial_u E(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - f v\,dx$. Ist u ausreichend differenzierbar, folgt mit partieller Integration $\partial_u E(u)(v) = \int_\Omega v\,(-\Delta u - f)\,dx$.

Ist u ein Minimum, gilt $\partial_u E(u)(v) = 0$ für „alle" v $\Rightarrow -\Delta u - f = 0$.

Eigentlich gilt jedoch nur die sog. schwache Formulierung der pDgl.,

$$0 = \partial_u E(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - f v\,dx \qquad \forall v: \Omega \to \mathbb{R},\ v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Wie sehr muss u differenzierbar sein, um $\Delta u = f$ auf diese Weise interpretieren zu können?

PDgl.-Theorie: Schwache Ableitung

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Def: · $C^m(\bar\Omega)$ ist der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f:\bar\Omega\to\mathbb{R}$

mit $\|f\|_{C^m} := \sup_{x\in\Omega,\ |\alpha|\le m} |D^\alpha f(x)| < \infty$

· $C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ mit Träger $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x\in\Omega \mid f(x)\neq 0\}} \subset \Omega$ und kompakt.

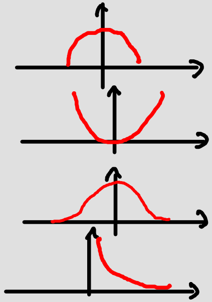
· $L^1_{loc}(\Omega) = \{f:\Omega\to\mathbb{R} \mid f\in L^1(\omega)\ \forall\, \bar\omega\subset\Omega \text{ kompakt}\}$ = lokal integrierbare Funktionen

Bsp: $x\mapsto\sqrt{1-x^2} \in C^0([-1,1])\setminus C^1([-1,1])$

$x\mapsto |x|^3 \in C^2([-1,1])\setminus C^3([-1,1])$

$x\mapsto \begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{sonst}\end{cases} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$x\mapsto \frac{1}{x} \in L^1_{loc}((0,\infty))$



Def: Sei $u\in L^1_{loc}(\Omega)$, α ein Multiindex. $w\in L^1_{loc}$ heißt schwache α-Ableitung von u, wenn

$$\int_\Omega w(x)v(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)\,dx \quad \forall\, v\in C_0^\infty(\Omega).$$

Bsp: · $u\in C^m(\bar\Omega),\ v\in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega v\,\partial_{x_i}u\,dx \overset{\text{part. Int.}}{\overset{?}{=}} -\int_\Omega u\,\partial_{x_i}v\,dx \Rightarrow \partial_{x_i}u$ ist schwache Ableitung nach x_i

analog ist $D^\alpha u$ schwache α-Ableitung für $|\alpha|\le m$

· $x\mapsto|x|$ hat schwache Ableitung $x\mapsto \begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & \text{sonst}\end{cases}$ ← prüfen!

PDgl.-Theorie: Sobolev-Räume

Def: · Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert

· Ein vollständiger normierter Raum X mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ heißt Hilbertraum, wenn $\|x\|_X = \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \forall x\in X$

· Sei $m\in\mathbb{N}$, $p\in[1,\infty]$. Der (m,p)-Sobolev-Raum ist

$$W^{m,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega)\mid f \text{ hat schwache } \alpha\text{-Ableitung } D^\alpha f\in L^p(\Omega)\ \forall|\alpha|\le m\}$$

mit Norm $\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$

· Sei $m\in\mathbb{N}$. Der m-Hilbertraum ist $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$

mit Skalarprodukt $(f,g)_{H^m}=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega D^\alpha f\, D^\alpha g\, dx$.

Thm: $W^{m,p}(\Omega)$ ist vollständig.

Bsp: · $x\mapsto \frac{1}{x^2}\quad \in W^{m,p}((1,\infty))\ \forall p\in[1,\infty],\ m\ge 0$

· $x\mapsto\sqrt{|x|}\quad\in\left(W^{1,p}((-1,1))\cap L^q((-1,1))\right)\setminus W^{2,r}((-1,1))\quad\forall p\in[1,2),\ q,r\in[1,\infty]$

· $x\mapsto\begin{cases}-1 & ,x\le 0\\ 1 & ,\text{sonst}\end{cases}\quad\notin W^{1,p}((-1,1))\ \forall p$

Thm: (Spursatz) Ω habe Lipschitz-Rand. $T: W^{1,p}(\Omega)\to L^p(\partial\Omega)$, $u\mapsto u|_{\partial\Omega}$, ist linear & beschränkt.

PDgl.-Theorie: Allgemeinere elliptische Probleme & Randbed.

Offenbar macht die Minimierung von $E(u)=\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} - fu\,dx$ bereits auf $H^1(\Omega)\supset C^2(\bar\Omega)$ Sinn.

<u>Def</u>: $u\in H_0^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega)\,|\,v=0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ heißt <u>schwache Lösung</u> von $-\Delta u=f$ in Ω, $u=0$ auf $\partial\Omega$, wenn gilt $\quad 0=\partial_u E(u)(v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v - fv\,dx \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega)$.

Um etwas allgemeinere elliptische pDgl. & RB zu erhalten, betrachten wir nun

$$E(u)=\int_\Omega \tfrac{1}{2}\nabla u(x)^T A(x)\nabla u(x) + \tfrac{q(x)}{2}u(x)^2 - f(x)u(x)\,dx + \int_{\Gamma_1}\tfrac{p(x)}{2}u(x)^2 - g(x)u(x)\,dx$$

für $A(x)\in\mathbb{R}^{d\times d}$ stetig differenzierbar & symmetrisch positiv definit, $q\in L^\infty(\Omega)$, $q\geq 0$, $\Gamma_1\subset\partial\Omega$ mit positivem Maß, $p\in L^\infty(\Gamma_1)$, $p\geq 0$, $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_1)$, zu minimieren für $u\in H^1(\Omega)$ (warum macht dies Sinn?) mit $u=h\in L^2(\Gamma_2)$ auf $\Gamma_2=\partial\Omega\setminus\Gamma_1$.

$\Rightarrow$ Für alle $v\in H^1(\Omega)$ mit $v|_{\Gamma_2}=0$ gilt

$$0=\partial_u E(u)(v)=\int_\Omega \nabla v^T A\nabla u + quv - fv\,dx + \int_{\Gamma_1} puv - gv\,dx$$

„schwache Formulierung"

wenn u glatt

$$=\int_\Omega v\left[-\operatorname{div}(A\nabla u)+qu-f\right]dx + \int_{\Gamma_1}(n^TA\nabla u + pu - g)v\,dx$$

$\Rightarrow$ $-\operatorname{div}(A\nabla u)+qu=f$ in Ω mit
$$\begin{cases} u=h & \text{auf } \Gamma_2 \quad \text{Dirichlet-RB}\\ n^TA\nabla u = g & \text{auf } \Gamma_1\cap\{p=0\} \quad \text{Neumann-RB}\\ n^TA\nabla u + pu = g & \text{auf } \Gamma_1 \quad \text{Robin-RB}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ überall auf $\partial\Omega$ genau eine RB

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung

Die schwache Formulierung der pDgl. erhält man aus der Energie E durch $0 = \partial_u E(u)(v)$ für alle erlaubten v; aus der pDgl. selbst erhält man sie durch Multiplikation der pDgl. mit v & partielle Integration.

Bsp: $\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ erlaubte v sind $v \in H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow -\int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Omega v f \, dx \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega v f \, dx \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega)$ ist schwache Formulierung

Def: Die schwache Formulierung zu
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b(x)\cdot\nabla u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = h(x) & \text{auf } \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \\ (A(x)\nabla u(x))\cdot n + p(x)u(x) = g(x) & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

ist $0 = \int_\Omega \nabla v^T A \nabla u + v b \cdot \nabla u + q u v - f v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v - g v \, dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_2} = 0\}$
& $u = h$ auf Γ_2

- $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung der pDgl., wenn es die schwache Formulierung erfüllt.

PDgl.-Theorie: zugehörige Bilinearform

Durch Setzen von $u(x) = \tilde{u}(x) + h(x)$ $\forall x \in \Omega$ kann man die RB $u|_{\Gamma_2} = h$ zurückführen auf $\tilde{u}|_{\Gamma_2} = 0$

Bsp: $-\Delta u = 0$ in Ω, $u = h$ auf $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0$ $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ & $u|_{\partial\Omega} = h$

$\Rightarrow$ Finde $\tilde{u} \in H^1_0(\Omega)$ mit $\int_\Omega \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v + \nabla h \cdot \nabla v \, dx = 0$ $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

Daher betrachten wir nur Nullrandwerte. Sei daher u schwache Lösung, d.h.

$u \in H^1_{\Gamma_2}$ mit $0 = \int_\Omega \nabla v^T A \nabla u + v\, b \cdot \nabla u + q u v - f v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v - g v \, dx$ $\forall v \in H^1_{\Gamma_2}(\Omega)$.

Setze $a(u,v) = \int_\Omega \nabla v^T A \nabla u + v\, b \cdot \nabla u + q u v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v \, dx$ „zugehörige Bilinearform"

$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, dx$

a ist eine Bilinearform, d.h. linear in u & v $(a(u+\lambda\tilde{u}, v) = a(u,v) + \lambda a(\tilde{u}, v)$, analog in $v)$

ℓ ist eine Linearform $(\ell(v+\lambda\tilde{v}) = \ell(v) + \lambda \ell(\tilde{v}))$

u ist schwache Lsg. der pDgl. $\Leftrightarrow$ $\boxed{u \in H^1_{\Gamma_2} \ \& \ a(u,v) = \ell(v) \ \forall v \in H^1_{\Gamma_2}}$

PDgl.-Theorie: Existenz, Eindeutigkeit, Äquivalenz zu Minimierung

Def: Sei X ein Hilbertraum, $a: X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $\ell: X \to \mathbb{R}$ linear.

Wir benötigen folgende Bedingungen: $\exists\, c, C > 0$, sodass für alle $u, v \in X$ gilt

Koerzivität/Elliptizität: $\quad a(v,v) \geq c\|v\|_X^2$

Beschränktheit: $\quad |a(u,v)| \leq C\|u\|_X \|v\|_X$

Beschränktheit: $\quad |\ell(v)| \leq C\|v\|_X$

Thm: (Lax-Milgram-Lemma) Sei X ein Hilbertraum, a eine koerzive, beschränkte Bilinearform, ℓ linear und beschränkt. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in X$ zu

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in X$$

Thm: Sei zusätzlich a symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u, v \in X$. Dann ist

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in X \quad \Longleftrightarrow \quad u = \operatorname*{argmin}_{\tilde{u} \in X} \tfrac{1}{2} a(\tilde{u},\tilde{u}) - \ell(\tilde{u})$$

Bew: „$\Rightarrow$“ Sei $v \in X \Rightarrow \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) - \left(\frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)\right) = \frac{1}{2}a(v-u, v-u) + a(v-u, u) - \ell(v-u)$

$$= \tfrac{1}{2}a(v-u, v-u) \geq \tfrac{c}{2}\|v-u\|_X^2$$

„$\Leftarrow$“ Setze $E(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$, dann ist $0 = \partial_u E(u)(v) = a(u,v) - \ell(v)\ \forall v \in X$ $\square$

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung Poisson-Problem

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, Lipschitz

<u>Thm:</u> $a(v,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ ist eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$,
$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx$ mit $f \in L^2(\Omega)$ ist eine beschränkte Linearform auf $H_0^1(\Omega)$.

<u>Kor:</u> Es existiert eine eindeutige schwache Lösung u von $-\Delta u = f$ in Ω, $u=0$ auf $\partial\Omega$.

Bew (Thm):

- $|\ell(v)| \leq \int_\Omega |f v| \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2} = \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$
- $|a(u,v)| \leq \sum_{i=1}^d \int_\Omega |\partial_{x_i} u \, \partial_{x_i} v| \, dx \leq \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} u\|_{L^2} \|\partial_{x_i} v\|_{L^2}$

  $\leq \left(\|u\|_{L^2}, \|\partial_{x_1} u\|_{L^2}, \dots, \|\partial_{x_d} u\|_{L^2} \right)^T \cdot \left(\|v\|_{L^2}, \|\partial_{x_1} v\|_{L^2}, \dots, \|\partial_{x_d} v\|_{L^2} \right)^T$

  $\leq \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_{x_1} u\|_{L^2}^2 + \dots + \|\partial_{x_d} u\|_{L^2}^2} \cdot \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|\partial_{x_1} v\|_{L^2}^2 + \dots + \|\partial_{x_d} v\|_{L^2}^2} = \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$
- $a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + C \|v\|_{L^2}^2 \geq \min(\tfrac{1}{2}, C) \|v\|_{H^1}^2$

  $= \|\partial_{x_1} v\|^2 + \dots + \|\partial_{x_d} v\|^2$ Poincaré-Friedrichs-Ungleichung!
- Bilinearität & Linearität klar (prüfe!) $\square$

PDgl.-Theorie: Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Thm: (Poincaré-(Friedrichs-)Ungleichung) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt & zsmhgd habe Lipschitz-Rand. $\Gamma \subset \partial\Omega$ sei einfach zsmhgd mit $|\Gamma| > 0$. Es existiert ein $C > 0$, sodass für alle $v \in H^1_\Gamma = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma \}$ gilt $\|v\|_{L^2} \le C \|\nabla v\|_{L^2}$.

Bew: · in 1D, OBdA $\Omega = [a,b]$, $v(a) = 0$:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_a^b v(x)^2\,dx = \int_a^b \left(\int_a^x v'(y)\,dy\right)^2 dx \le \int_a^b \left(\int_a^b |v'(y)|\,dy\right)^2 dx = (b-a)\left(\int_a^b |v'(x)|\,dx\right)^2$$

$$\le (b-a)\left(\|1\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}\right)^2 = (b-a)^2 \|v'\|_{L^2}^2$$

· in 2D mit $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, $v(a,x_2) = 0$:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_c^d \int_a^b v^2\,dx = \int_c^d \|v(\cdot,x_2)\|_{L^2}^2\,dx_2 \le (b-a)^2 \int_c^d \|\partial_{x_1} v(\cdot,x_2)\|_{L^2}^2\,dx_2$$

$$\le (b-a)^2 \int_c^d \int_a^b (\partial_{x_1} v)^2 + (\partial_{x_2} v)^2\,dx = (b-a)^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

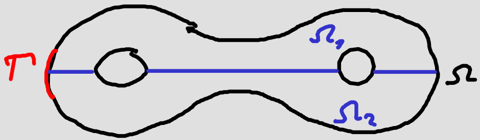
· in 2D, Ω einfach zusammenhängend: $\exists\, \phi : [a,b] \times [c,d] \to \Omega$ Lipschitz mit ϕ^{-1} Lipschitz, $\phi^{-1}(\Gamma) = \{a\} \times [c,d]$; L sei die Lipschitz-konstante von ϕ, ϕ^{-1}.

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega v^2\,dx = \int_a^b \int_c^d (v \circ \phi)^2 |\det D\phi|\,dx \le 2L^2 \|v \circ \phi\|_{L^2}^2 \le 2L^2 (b-a)^2 \|\nabla (v \circ \phi)\|_{L^2}^2 = C \|\nabla \phi\, (\nabla v) \circ \phi\|_{L^2}^2$$

$$\le C L^2 \|(\nabla v) \circ \phi\|_{L^2}^2 = C L^2 \int_a^b \int_c^d (\nabla v)^2 \circ \phi\,dx = C L^2 \int_\Omega \nabla v^2 |\det D\phi^{-1}|\,dx \le 2 C L^4 \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

PDgl.-Theorie: Poincaré-Friedrichs-Ungleichung II

- analoger Beweis in d Dimensionen für einfach zsmhgd. Gebiet Ω mit Lipschitz-Rand, $v=0$ auf $\Gamma \subset \partial\Omega$ einfach zsmhgd mit $|\Gamma|>0$.
- Für beliebiges Ω zsmhgd. mit Lipschitz-Rand, $v=0$ auf $\Gamma \subset \partial\Omega$ zsmhgd mit $|\Gamma|>0$ zerteile Ω in Lipschitzgebiete $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ mit $v=0$ auf Teil des Randes



und nutze $\|v\|_{L^2}^2 = \|v|_{\Omega_1}\|_{L^2}^2 + \dots + \|v|_{\Omega_N}\|_{L^2}^2$,

$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla v|_{\Omega_1}\|_{L^2}^2 + \dots + \|\nabla v|_{\Omega_N}\|_{L^2}^2$ $\square$

<u>Thm</u>: Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gelten die nicht verbesserbaren Ungleichungen

1) $\|v\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2$ falls $\Omega = [a,b]$
2) $\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \|\nabla v\|_{L^2}^2$ falls $\Omega = [0,1]^2$

Bew: 1) HA: Finde v mit Gleichheit und beweise „$\leq$" durch genauere Rechnung als oben

(prüfe für diesen v, welche Ungleichungen verbessert werden müssen!)

2) HA: mit semidiskreter Fourier-Transformation $\square$

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung allgemeine elliptische pDgl.

Thm: Sei Ω Lipschitz, Γ_1, $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ mit $|\Gamma_1|, |\Gamma_2| > 0$, $\cdot\ A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $\xi^T A \xi \geq c|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$\cdot\ b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $|b(x)|^2 \leq 4\tilde{c}\, q(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\tilde{c} < c$

auch andere Bedingungen möglich, siehe HA

$\cdot\ q \in L^\infty(\Omega)$ mit $q \geq 0$

$p \in L^\infty(\Gamma_1)$ mit $p \geq 0$

$\cdot\ f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$

Dann ist $a(u,v) = \int_\Omega \nabla v^T A \nabla u + v\, b\cdot\nabla u + q u v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v \, dx$ eine koerzive beschränkte Bilinearform auf $H^1_{\Gamma_2}(\Omega)$ und $l(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, dx$ beschränkt & linear.

Kor: $\exists!$ schwache Lösung von
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b(x)\cdot\nabla u(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{auf } \Gamma_2 \\ (A(x)\nabla u(x))\cdot n + p(x)u(x) = g(x) & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Spursatz

Bew (Thm): $\cdot\ |l(v)| \leq \int_\Omega |fv|\, dx + \int_{\Gamma_1} |gv|\, dx \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \left(\|f\|_{L^2} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_1)}\right)\|v\|_{H^1}$

$\cdot\ |a(u,v)| \leq \|A\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$

$\leq \text{konst.} \cdot \|v\|_{H^1}\|u\|_{H^1}$

$\cdot\ a(v,v) \geq \int_\Omega c|\nabla v|^2 - |b||v\nabla v| + q v^2 \geq \int_\Omega (c-\tilde{c})|\nabla v|^2 + \tilde{c}\left(|\nabla v| - \frac{|b|}{2\tilde{c}}|v|\right)^2 dx \geq (c-\tilde{c})\|\nabla v\|^2_{L^2} \geq \text{konst}\, \|v\|^2_{H^1} \ \square$

Ritz-Galerkin-Verfahren: Existenz, Eindeutigkeit, Minimierung

Thm: Sei $a: X \times X \to \mathbb{R}$ eine koerzive beschränkte Bilinearform auf dem Hilbertraum X, $\ell: X \to \mathbb{R}$ linear und beschränkt. Sei $X_h \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in X_h$ von $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$.

Def: u_h heißt Ritz-Galerkin-Approximation an die Lösung $u \in X$ von $a(u,v) = \ell(v) \, \forall v \in X$.

Bew: a ist koerziv & beschränkte Bilinearform auf X_h, ℓ ist beschränkte Linearform auf X_h (prüfen!)

$\Rightarrow$ Lax-Milgram liefert eindeutiges u_h. $\square$

Thm: Ist a zusätzlich symmetrisch, so ist $u_h = \underset{u \in X_h}{\arg\min} \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u)$.

Bew: analog zu Beweis in X. $\square$

Die Ritz-Galerkin-Approximation u_h besitzt also die gleichen Eigenschaften wie u!

Ist $\dim X_h < \infty$, existiert eine Basis $\phi_1, \ldots, \phi_N \in X_h$. Jedes $u_h \in X_h$ lässt sich schreiben als $u_h = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i$.

$$\Rightarrow \quad a(u_h, v_h) = (U_1, \ldots, U_N) \, A \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \quad , \quad \ell(v_h) = (B_1, \ldots, B_N) \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}$$

mit $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $B_i = \ell(\phi_i)$

$\Rightarrow$ Ritz-Galerkin-Approximation löst $A^T \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}$

Ritz-Galerkin-Verfahren: Fehlerschätzung

$a: X \times X \to \mathbb{R}$ mit $a(v,v) \geq c\|v\|_X^2$ & $|a(u,v)| \leq C\|u\|_X \|v\|_X$, $\quad \ell: X \to \mathbb{R}$ mit $|\ell(v)| \leq \tilde{C}\|v\|_X$

$X_h \subset X$, $\quad a(u,v) = \ell(v) \ \forall v \in X$, $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$

Thm: (Galerkin-Orthogonalität) $\quad a(u_h - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$

Bew: Subtrahiere $a(u, v_h) = \ell(v_h) \ \forall v_h \in X_h$ von $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \ \forall v_h \in X_h$ $\square$

Def: Ist a symmetrisch, so ist $\langle u, v \rangle_a = a(u,v)$ ein Skalarprodukt auf X, das Energieskalarprodukt. $\|u\|_a = \sqrt{\langle u, u \rangle_a}$ heißt Energienorm.

Galerkin-Orthogonalität besagt, dass der Approximationsfehler $u_h - u$ orthogonal zu X_h bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ ist.

Kor:
- (Céa-Lemma) $\|u_h - u\|_X \leq \frac{C}{c} \min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_X$ „Fast-Bestapproximation"
- (Bestapproximation) Ist a symmetrisch, gilt $\|u_h - u\|_a \leq \min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_a$

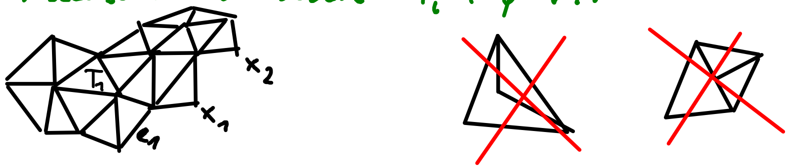
Bew:
- $c\|u_h - u\|_X^2 \leq a(u_h - u, u_h - u) \underset{\text{Galerkin-Orth.}}{=} a(u_h - u, v_h - u) \leq C\|u_h - u\|_X \|v_h - u\|_X \quad \forall v_h \in X_h$
- a symmetrisch $\Rightarrow \|u_h - u\|_a^2 = a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, v_h - u) \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u_h - u\|_a \|v_h - u\|_a \quad \forall v_h \in X_h$ $\square$

u_h ist (fast) die bestmögliche Approximation an u. Man muss nur noch $\min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_{X_h}$ abschätzen.

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Lineare FE: Ansatz

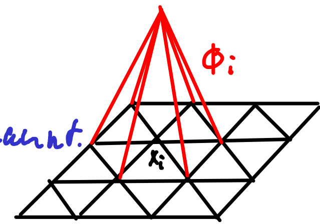
<u>Def</u>: · Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Eine <u>Triangulierung</u> von Ω ist ein Tripel $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ mit <u>Knotenmenge</u> $\mathcal{V} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^2)^N$, <u>Kantenmenge</u> $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_L)$, <u>Dreiecksmenge</u> $\mathcal{T} = (T_1, \dots, T_M)$, wobei jede Kante bzw. jedes Dreieck die konvexe Hülle zweier bzw. dreier Knoten ist, jeder Schnitt zweier Dreiecke entweder eine gemeinsame Seite oder leer ist, $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} T_i$, jede Kante eine Dreiecksseite ist und $\mathring{T}_i \neq \emptyset \;\forall i$.



· $h_T = \operatorname{diam} T$, $\quad h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ = Gitterweite

Wählt man $X_h \subset H^1(\Omega)$ als die Menge stückweise affiner Funktionen, $X_h = \{v : C(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \;\forall T \in \mathcal{T}\}$ ($\mathcal{P}_n = \{$Polynome vom Grad $\leq n\}$), ist eine Basis gegeben durch die „FE-Hütchenfunktionen"

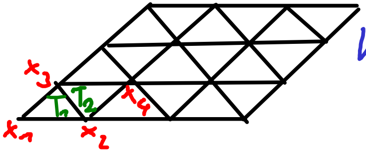
$\phi_1, \dots, \phi_N \in X_h$, die definiert sind durch $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.



Die Elemente der gewählten Basis werden auch <u>FE-Formfunktionen</u> genannt.

Da bei FE meistens $\operatorname{supp} \phi_i \cap \operatorname{supp} \phi_j = \emptyset$, ist $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ dünn besetzt.

Lineare FE: Matrixassemblierung



$$\text{Knotenarray} = \begin{bmatrix} -x_1- \\ -x_2- \\ \vdots \\ -x_N- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.5 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Konnektivitäts-array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & 8 & 9 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow T_1 \\ \\ \\ \\ \leftarrow T_i \\ \\ \\ \end{array}$$

Die Berechnung der Matrix $A = (a(\phi_i, \phi_j))_{ij}$ nennt sich <u>Assemblierung</u>.

Da a von der Form $a(u,v) = \int_\Omega Q(u,v)\,dx = \sum_{\ell=1}^{M} \int_{T_\ell} Q(u,v)\,dx$ für einen bilinearen Operator Q ist, wird hierzu über die Dreiecke iteriert.

hier ohne $\partial\Omega$-Anteil; dieser geht analog...

Sei $T_\ell = co(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ dann sind auf T_ℓ nur $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \phi_{i_3}$ ungleich 0

$\Rightarrow \int_{T_\ell} Q(\phi_m, \phi_n)\,dx = 0$ für $m \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ oder $n \notin \{i_1, i_2, i_3\}$.

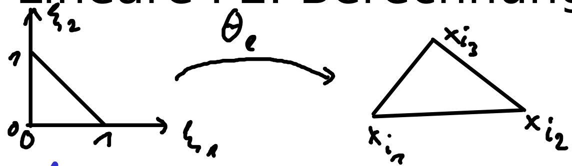
$\Rightarrow$ man berechnet die <u>lokale Systemmatrix</u> $A^\ell = \left(\int_{T_\ell} Q(\phi_{i_m}, \phi_{i_n})\,dx \right)_{m,n=1,2,3}$ und addiert sie in A in Position (i_m, i_n), $m,n = 1,2,3$, d.h. man rechnet

$$A = \sum_{\ell=1}^{M} L_\ell^T A^\ell L_\ell \quad \text{für } L_\ell = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & & i_1 & & & i_2 & & i_3 & & & \end{array} \end{array}$$

<u>Bsp:</u>

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdots + x & \cdots + x & \cdots + x & \\ & \cdots + x & \cdots + x & \cdots + x & \\ & \cdots + x & \cdots + x & \cdots + x & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

Lineare FE: Berechnung lokale Systemmatrix



Referenzdreieck T Dreieck T_e

$\Theta_e(\xi) = x_{i_1} + \overbrace{\left(x_{i_2}-x_{i_1} \,\middle|\, x_{i_3}-x_{i_1}\right)}^{D\Theta_e}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ bildet T auf T_e ab.

Dreiecksfläche $= |T_e| = |(x_{i_2}-x_{i_1}) \times (x_{i_3}-x_{i_1})|/2 = \det D\Theta_e/2$

Setze $\psi_1(\xi) = 1-\xi_1-\xi_2$, $\psi_2(\xi) = \xi_1$, $\psi_3 = \xi_2$ $\Rightarrow$ auf T_e ist $\phi_{i_m}\circ\Theta_e = \psi_m$, $\nabla\phi_{i_m}\circ\Theta_e = D\Theta_e^{-T}\nabla\psi_m$

Nun kann A^e mit Hilfe der ψ_i und Θ_e berechnet werden!

<u>Bsp:</u> · $a(u,v) = \int_\Omega uv\,dx \Rightarrow A^e_{mn} = \int_{T_e}\phi_{i_m}\phi_{i_n}\,dx = \int_T \psi_m\psi_n\,|\det D\Theta_e|\,d\xi = 2\,|T_e|\int_T \psi_m\psi_n\,d\xi$

$$\Rightarrow A^e = \frac{|T_e|}{12}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

· $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \Rightarrow A^e_{mn} = \int_{T_e}\nabla\phi_{i_m}\cdot\nabla\phi_{i_n}\,dx = \int_T \nabla\psi_m^T D\Theta_e^{-1}D\Theta_e^{-T}\nabla\psi_n\,|\det D\Theta_e|\,d\xi$

$$= |T_e|\,\nabla\psi_m^T D\Theta_e^{-1}D\Theta_e^{-T}\nabla\psi_n$$

$$D\Theta_e^{-1} = \frac{1}{2|T_e|}\begin{pmatrix}(x_{i_3}-x_{i_1})_2 & -(x_{i_3}-x_{i_1})_1\\ -(x_{i_2}-x_{i_1})_2 & (x_{i_2}-x_{i_1})_1\end{pmatrix} \Rightarrow D\Theta_e^{-1}D\Theta_e^{-T} = \frac{1}{4|T_e|^2}\underbrace{\begin{pmatrix}|x_{i_3}-x_{i_1}|^2 & -(x_{i_3}-x_{i_1})\cdot(x_{i_2}-x_{i_1})\\ -(x_{i_3}-x_{i_1})\cdot(x_{i_2}-x_{i_1}) & |x_{i_2}-x_{i_1}|^2\end{pmatrix}}_{R}$$

$$\Rightarrow A^e = \frac{1}{4|T_e|}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix} R \begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{4|T_e|}\begin{pmatrix}\text{—}\; x_{i_2}-x_{i_3}\;\text{—}\\ \text{—}\; x_{i_3}-x_{i_1}\;\text{—}\\ \text{—}\; x_{i_1}-x_{i_2}\;\text{—}\end{pmatrix}\left(x_{i_2}-x_{i_3} \,\middle|\, x_{i_3}-x_{i_1} \,\middle|\, x_{i_1}-x_{i_2}\right)$$

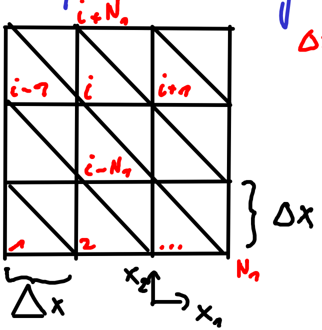
Lineare FE: Masse- & Steifigkeitsmatrix für reguläres Gitter

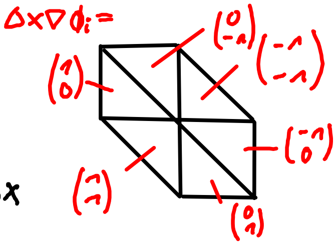
Def: Sei $\phi_1, \dots, \phi_N$ eine Basis des FE-Raums X_h.

Massematrix $M_h = \left(\int_\Omega \phi_i \, \phi_j \, dx \right)_{ij}$, Steifigkeitsmatrix $L_h = \left(\int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \right)_{ij}$

Assemblierung von $B_i = \ell(\phi_i)$ funktioniert ebenfalls mittels Iteration über die Dreiecke (HA); ist $\ell(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$ für $f \in X_h$ kann man auch $B = M_h \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$ rechnen

Auf einem regelmäßigen Gitter können wir die Systemmatrix auch direkt ausrechnen:





Bsp: $\int_\Omega |\nabla \phi_i|^2 dx = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}^2 \right] = 4$

$\int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_{i+1} dx = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -1$

$\int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_{i-1} dx = \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_{i+N_1} dx = \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_{i-N_1} dx = -1$

$\Rightarrow L_h = \begin{pmatrix} \dots -1 \dots -1 \; 4 \; -1 \dots -1 \dots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L_h \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = -u_{i-N_1} - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - u_{i+N_1}$

Finite Differenzen für $-\Delta$: $\dfrac{-u_{i-N_1} - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - u_{i+N_1}}{\Delta x^2}$

Bsp: $\int_\Omega \phi_i^2 dx = \frac{\Delta x^2}{4}$, $\int_\Omega \phi_i \phi_{i\pm 1} dx = \int_\Omega \phi_i \phi_{i \pm N_1} dx = \int_\Omega \phi_i \phi_{i \pm (N_1 - 1)} dx = \frac{\Delta x^2}{8}$ (HA) $\Rightarrow M_h = \frac{\Delta x^2}{8} \begin{pmatrix} \dots 1 \; 1 \dots 1 \; 2 \; 1 \dots 1 \; 1 \dots \end{pmatrix}$

Lineare FE: Interpolationsfehler (auf Referenzdreieck)

Def: $I_h u = \sum_{i=1}^{N} u(x_i)\,\phi_i \in X_h$ heißt FE-Interpolante von u

Thm: Es gibt $C>0$ sodass für alle $u \in H^2(T)$ gilt $\|u - I_h u\|_{L^2} \le C|u|_{H^2} = C\,\|D^2 u\|_{L^2}$,

Referenzdreieck

$\|A\|_{L^2}^2 = \int \sum_{i,j} |A_{ij}|^2 dx$

$\|\nabla u - \nabla I_h u\|_{L^2} \le C\,|u|_{H^2}$.

Bew.: Sei $v \in H^1([0,1]^2)$ mit $\int_0^1 v(s,0)\,ds = 0$.

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^1\int_0^1 \Big(v(x_1,x_2) - \int_0^1 v(s,0)\,ds\Big)^2 dx_1\,dx_2 = \int_0^1\int_0^1 \Big| \int_0^1 v(x_1,x_2) - v(s,x_2)\,ds + \int_0^1 v(s,x_2) - v(s,0)\,ds \Big|^2 dx_1\,dx_2$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \Big| \int_0^1\int_s^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t,x_2)\,dt\,ds + \int_0^1\int_0^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2}(s,t)\,dt\,ds \Big|^2 dx_1\,dx_2$$

$$\le \int_0^1\int_0^1 \Big(\int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}(t,x_2)\Big|\,dt\,ds + \int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}(s,t)\Big|\,dt\,ds \Big)^2 dx_1\,dx_2$$

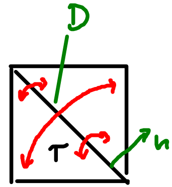
$$\le 2\int_0^1\int_0^1 \Big(\int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}(t,x_2)\Big|\,dt\,ds \Big)^2 + \Big(\int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}(s,t)\Big|\,dt\,ds \Big)^2 dx_1\,dx_2$$

$$\le 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_1}(t,x_2)\Big|^2 dt\,ds\,dx_1\,dx_2 + 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big|\frac{\partial v}{\partial x_2}(s,t)\Big|^2 ds\,dt\,dx_1\,dx_2$$

$$= 2\Big\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big\|_{L^2}^2 + 2\Big\|\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big\|_{L^2}^2 = 2\,\|\nabla v\|_{L^2}^2$$

Analog für v mit $\int_0^1 v(0,s)\,ds = 0$.

Lineare FE: Interpolationsfehler - Forts.



· Sei $v\in H^1(T)$, $\hat v:[0,1]^2\to\mathbb{R}$, $\hat v = v$ auf T, $\hat v(x_1,x_2)=v(1-x_2,1-x_1)$ auf $[0,1]^2\setminus T$

dann ist $\hat v\in H^1([0,1]^2)$ mit $\|\hat v\|_{L^2}^2 = 2\|v\|_{L^2}^2$ (klar), $\|\nabla\hat v\|_{L^2}^2 = 2\|\nabla v\|_{L^2}^2$ (denn $\nabla\hat v=\nabla v$ auf T

und $\nabla\hat v(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\nabla v(1-x_2,1-x_1)$ auf $[0,1]^2\setminus T$: Sei $\varphi\in C_0^\infty([0,1]^2;\mathbb{R}^2)$, dann ist

$$\int_0^1\int_0^1 \hat v \operatorname{div}\varphi\,dx = \int_T v\operatorname{div}\varphi\,dx + \int_{T^c}\hat v\operatorname{div}\varphi\,dx = \int_D v\varphi\cdot n\,dx - \int_T\nabla v\cdot\varphi\,dx + \int_D \hat v\varphi\cdot(-n)\,dx - \int_{T^c}\nabla\hat v\cdot\varphi\,dx = -\int_0^1\int_0^1\nabla\hat v\cdot\varphi\,dx)$$

· Sei $v\in H^1(T)$ mit $\int_0^1 v(s,0)\,ds=0$ oder $\int_0^1 v(0,s)\,ds=0$, dann ist $\|v\|_{L^2}^2=\frac12\|\hat v\|_{L^2}^2\le\|\nabla\hat v\|_{L^2}^2=2\|\nabla v\|_{L^2}^2$

$\Longrightarrow$ mit $v=\nabla u-\nabla I_h u$ folgt $\|\nabla u-\nabla I_hu\|_{L^2}^2\le 2\|D^2u-D^2I_hu\|_{L^2}^2 = 2\|D^2u\|_{L^2}^2$

· Sei $v\in H^2(T)$ mit $v(0,0)=v(1,0)=0$.

Poincaré

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^1\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2}^2\,dx_1 \le 2\int_0^1 v(x_1,0)^2+\|v(x_1,\cdot)-v(x_1,0)\|_{L^2}^2\,dx_1 \le 2\|v(\cdot,0)\|_{L^2}^2+2\int_0^1\left\|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,\cdot)\right\|_{L^2}^2dx_1$$

$$\le 2\left\|\frac{\partial v}{\partial x_1}(\cdot,0)\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|\frac{\partial v}{\partial x_2}\right\|_{L^2}^2 \le 2C\left\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\|_{H^1}^2+2\|\nabla v\|_{L^2}^2 \le 2(C+1)\|\nabla v\|_{L^2}^2+2C\|D^2v\|_{L^2}^2$$

Poincaré   Spursatz

Poincaré von vorher $\le (6C+4)\|D^2v\|_{L^2}^2$

$\Longrightarrow$ mit $v=u-I_hu$ folgt $\|u-I_hu\|_{L^2}^2\le(6C+4)\|D^2u-D^2I_hu\|_{L^2}^2=(6C+4)\|D^2u\|_{L^2}^2$ □

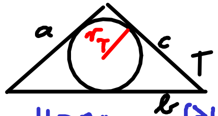
Lineare FE: Quasiuniforme Triangulierung

Def: Eine Triangulierung $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ nennen wir $\frac{1}{\rho}$-quasiuniform, wenn für alle $T_\ell \in \mathcal{T}$ die affine Transformation $\theta_\ell : \hat{T} \to T_\ell$ des Referenzdreiecks $\hat{T}$ auf T_ℓ erfüllt $\operatorname{cond} D\theta_\ell \le \rho$.

Konditionszahl z.B. bzgl. 2-Norm

Eine geometrische Interpretation ist folgende:

Thm: $r_T \ge 2h_T/\rho \;\; \forall T \in \mathcal{T} \overset{1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\rho}$-quasiuniform $\overset{2)}{\Longrightarrow} r_T \ge h_T/8\rho \;\; \forall T \in \mathcal{T}$



Bew: Sei θ die Referenztransformation. Inkreis $r_T = \frac{2|T|}{a+b+c}$, $2|T| = |\det D\theta| = \sigma_1 \sigma_2$, $\|D\theta\|_2 = \sigma_1 \begin{cases} \ge h_T/2 \\ \le 2h_T \end{cases}$

$\sigma_1 \le a+b+c \le \sigma_1 + \sigma_1 + \sqrt{2}\,\sigma_1 \le 4\sigma_1$ $\quad$ 1) $\frac{\|D\theta\|_2}{\rho} \le \frac{2h_T}{\rho} \le r_T \le \sigma_2 = \|D\theta^{-1}\|_2^{-1}$ $\quad$ 2) $r_T \ge \frac{\sigma_2}{4} \ge \frac{\sigma_1}{4\rho} \ge \frac{h_T}{8\rho}$ $\square$

Thm: Sei T_ℓ ein Dreieck einer $\frac{1}{\rho}$-quasiuniformen Triangulierung, $e \subset \hat{T}_\ell$ eine Kante. Es gibt $C \equiv C(\rho)$ sodass

- Spursatz: $\quad \|v\|_{L^2(e)} \le C\left(h_{T_\ell}^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(T_\ell)} + h_{T_\ell}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(T)}\right) \quad \forall v \in H^1(T_\ell)$
- Poincaré-Ungleichung: $\quad \|v\|_{L^2(T_\ell)} \le C h_{T_\ell} \|\nabla v\|_{L^2(T_\ell)} \quad \forall v \in H_0^1(T_\ell)$
- Poincaré-Ungleichung II: $\|v - \bar{v}\|_{L^2(T_\ell)} \le C h_{T_\ell} \|\nabla v\|_{L^2(T_\ell)}$, $\bar{v} = \frac{1}{|T_\ell|} \int_{T_\ell} v\,dx \quad \forall v \in H^1(T_\ell)$
- Intrp.-Fehler: $\|v - I_h v\|_{L^2(T_\ell)} \le C h_{T_\ell}^2 |v|_{H^2(T)}$, $\|\nabla v - \nabla I_h v\|_{L^2(T_\ell)} \le C h_{T_\ell} |v|_{H^2(T_\ell)} \;\; \forall v \in H^2(T_\ell)$

Bew: HA (zeige & nutze $h_{T_\ell}/\sqrt{2} \le \|D\theta_\ell\|_2 \le \sqrt{2}\, h_{T_\ell}$, $\|D\theta_\ell^{-1}\|_2 \le \rho / \|D\theta_\ell\|_2 \le \sqrt{2}\,\rho / h_{T_\ell}$, $|T_\ell| = \frac{|\det D\theta_\ell|}{2} = \frac{\|D\theta_\ell\|_2}{2\|D\theta_\ell^{-1}\|_2}$)

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Lineare FE: A priori Fehlerabschätzung

$a : X \times X \to \mathbb{R}$ mit $a(v,v) \geq c\|v\|_X^2$ & $|a(u,v)| \leq C\|u\|_X\|v\|_X$, $\quad \ell : X \to \mathbb{R}$ mit $|\ell(v)| \leq \tilde{C}\|v\|_X$

$X_h \subset X = H_\Gamma^1(\Omega)$, $\quad a(u,v) = \ell(v) \; \forall v \in X$, $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$

Wir wissen bereits $\|u-u_h\|_{H^1}^2 \leq C' \min_{v_h \in X_h} \|u-v_h\|_{H^1}^2$ wie groß ist dies?

<u>Thm:</u> Auf einer $\frac{1}{\rho}$-quasiuniformen Triangulierung mit Gitterweite h existiert $\hat{C} > 0$, nur abhängig von ρ, mit $\|u - I_h u\|_{L^2} \leq \hat{C} h^2 |u|_{H^2}$, $\|\nabla u - \nabla I_h u\|_{L^2} \leq \hat{C} h |u|_{H^2}$.

Bew.: $\|u - I_h u\|_{L^2}^2 = \sum_{\ell=1}^{M} \|u - I_h u\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \sum_{\ell=1}^{M} \hat{C} h^4 |u|_{H^2(T_\ell)}^2 = \hat{C} h^4 \; |u|_{H^2}^2$

- analog für $\|\nabla u - \nabla I_h u\|_{L^2}^2$ $\square$

<u>Kor:</u> $\|u-u_h\|_{H^1}^2 \leq C\|u - I_h u\|_{H^1}^2 \leq C\hat{C}^2 h^2(1+h^2)|u|_{H^2}^2 \leq \tilde{C} h^2 |u|_{H^2}^2$

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Lineare FE: Aubin-Nitsche Dualitätstrick

$a: X \times X \to \mathbb{R}$ koerziv, beschränkt, bilinear, $\ell: X \to \mathbb{R}$ beschränkt, linear, $X_h \subset X$ Unterraum (H^1_Γ)

$u \in X: \ a(u,v) = \ell(v) \ \forall v \in X$, $\quad u_h \in X_h: \ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \ \forall v_h \in X_h$

Wir wissen $\|u_h - u\|_{H^1} \le Ch|u|_{H^2} \Longrightarrow \|u_h - u\|_{L^2} \le Ch|u|_{H^2}$; tatsächlich gilt jedoch oft $\|u_h - u\|_{L^2} \le Ch^2|u|_{H^2}$

Thm: (Aubin-Nitsche-Lemma) Sei H (L^2) Hilbertraum mit stetiger Einbettung $X \hookrightarrow H$, $w \in X$

mit $a(v,w) = (u_h - u, v)_H \ \forall v \in X$. Es gibt $C > 0$ abhängig von a mit

adjungierte Bil.-form

$$\|u_h - u\|_H^2 \le C \|u_h - u\|_X \inf_{w_h \in X_h} \|w - w_h\|_X$$

Bew: $\|u_h - u\|_H^2 = (u_h - u, u_h - u)_H = a(u_h - u, w) = a(u_h - u, w - w_h) \le C\|u_h - u\|_X \|w - w_h\|_X \ \forall w_h \in X_h$ □

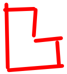
ist dies wohldefiniert?

Kor: Sei $X = H^1_\Gamma(\Omega)$, und für a gelte, dass die Lösung w_r von $a(v, w_r) = (r,v)_{L^2} \ \forall v \in L^2$

erfüllt: $|w_r|_{H^2} \le c\|r\|_{L^2} \ \forall r \in L^2(\Omega)$. Dann ist $\|u_h - u\|_{L^2} \le \tilde{C} h^2 |u|_{H^2}$

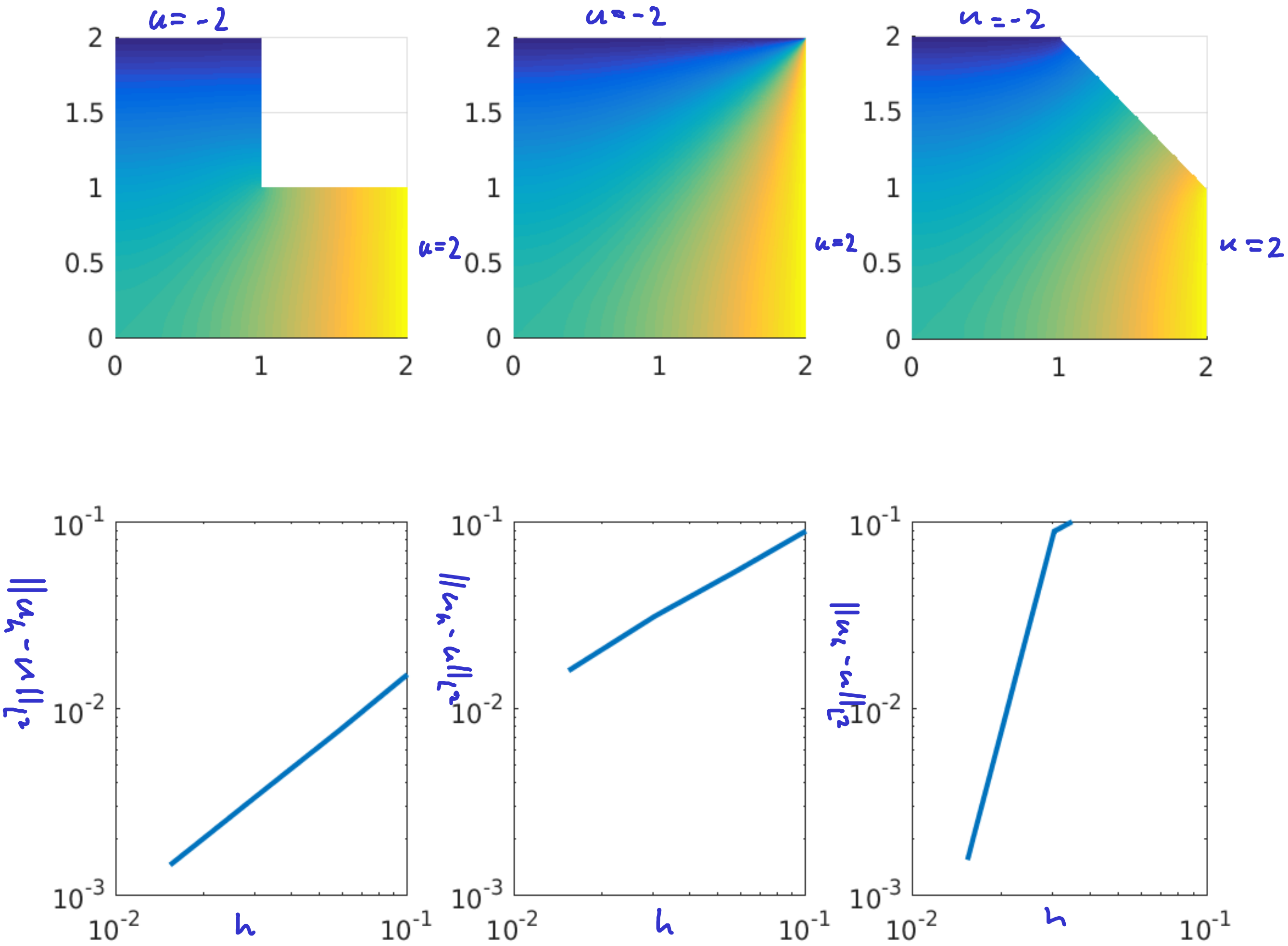
Bew: Mit $H = L^2(\Omega)$ ist $\|u_h - u\|_{L^2}^2 \le C\|u_h - u\|_{H^1} \inf_{w_h \in X_h} \|w - w_h\|_{H^1} \le \hat{C} h |u|_{H^2} \, h |w|_{H^2} \le \hat{C} c h^2 |u|_{H^2} \|u_h - u\|_{L^2}$ □

Beachte: Die Abschätzungen setzen voraus, dass $u \in H^2$ & $w_r \in H^2$ mit $|w_r|_{H^2} \le C\|r\|_{L^2}$;

Oft gilt jedoch nicht $u, w_r \in H^2$, z.B. für $\Omega =$  $\Rightarrow \|u_h - u\| = O(h^2)$ kleiner

Lineare FE: Beispielrechnung

$-\Delta u = 0$ auf Ω



Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Lineare FE: Regularität (Friedrichs-Theorem)

Wir haben gezeigt $\boxed{\|u_h-u\|_{H^1}\le Ch|u|_{H^2} \quad \& \quad \|u_h-u\|_{L^2}\le Ch^2|u|_{H^2}}$ falls $|w_r|_{H^2}\le C\|r\|_{L^2}$

Sind $u, w_r \in H^2$, gilt $|w_r|_{H^2}\le C\|r\|_{L^2}$, und wie groß ist $|u|_{H^2}$?

Bsp: $\Omega=[0,1]^2$, $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + uv\,dx$, $\ell(v)=\int_\Omega fv\,dx$,

$$\left\{\begin{array}{ll} u\in X=H^1_0(\Omega), & a(u,v)=\ell(v)\ \forall v\in X \\ w_r\in X, & a(v,w_r)=(r,v)_{L^2}\ \forall v\in X \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |u|_{H^2}\le C\|f\|_{L^2} \\ |w_r|_{H^2}\le C\|r\|_{L^2} \end{array}\right.$$

Bew: (Beweis für u; für w_r analog) $\|u\|_{L^2}^2 \le \|u\|_{H^1}^2 \le a(u,u)=\ell(u)\le\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$

$$|u|_{H^2}^2 = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 - 2\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 dx$$

$$= \|\Delta u\|_{L^2}^2 = \|f-u\|_{L^2}^2 \le 2\|f\|_{L^2}^2 + 2\|u\|_{L^2}^2 \le 2(1+1)\|f\|_{L^2}^2 \qquad \square$$

Thm: (z.B. Gilbarg & Trudinger Thm. 8.12) Sei Ω beschränkt, $\partial\Omega$ C^2-regulär,

$a(u,v)=\int_\Omega \nabla v^T A\nabla u + u\,b\cdot\nabla v - c\cdot\nabla u\,v - d\,uv\,dx$, $\ell(v)=\int_\Omega fv\,dx$,

A, b Lipschitzstetig, $c, d\in L^\infty(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega)$, a koerziv, $h\in H^2(\Omega)$.

Die schwache Lösung $u\in H^1(\Omega)$ von $a(u,v)=\ell(v)\ \forall v\in H^1(\Omega)$, $u=h$ auf $\partial\Omega$,

erfüllt $\|u\|_{H^2}\le C(\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+\|h\|_{H^2})$ (C abhängig von Ω, A, b, c, d)

Ähnliches gilt für stückweise glatten Rand sodass auf keinen zwei benachbarten Stücken Neumann-Randbedingungen gelten
(siehe z.B. Bacuta, Mazzucato, Nistor, Zikatanov: Interface and mixed boundary value problems on n-dimensional polyhedral domai

FEM: Allgemeine FE-Räume

Def: Ein *finites Element* ist ein Tripel $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) =$

(*Elementgebiet*, *Raum der Formfunktionen*, *Menge nodaler Variablen*) mit

- $K \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand
- $\mathcal{P}$ einem k-dimensionalen Raum an Funktionen $f: K \to \mathbb{R}$
- $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}$ einer Menge linear unabhängiger linearer Funktionale auf $\mathcal{P}$

Def: Sei $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ein finites Element, und sei $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ eine Basis von $\mathcal{P}$ dual zu $\mathcal{N}$, d.h. $N_i(\psi_j) = \delta_{ij}$. Eine solche Basis heißt *nodale Basis* für $\mathcal{P}$.

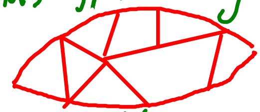
Thm: $\psi, \tilde{\psi} \in \mathcal{P}$ mit $N(\psi) = N(\tilde{\psi})\ \forall N \in \mathcal{N} \Rightarrow \psi = \tilde{\psi}$

Bew: $N(\psi - \tilde{\psi}) = N(\psi) - N(\tilde{\psi}) = 0\ \forall N \Rightarrow$ es reicht zu zeigen, dass $N(\phi) = 0\ \forall N \Rightarrow \phi = 0$.

Sei $\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \psi_i$, dann $0 = N_j(\phi) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i N_j(\psi_i) = \alpha_j \quad \forall j$. $\square$

Def: Eine *Unterteilung* eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge $\{K_1, \dots, K_m\}$ offener Mengen

mit (1) $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (2) $\overline{K_1} \cup \dots \cup \overline{K_m} = \overline{\Omega}$



Def: Sei $\{K_1, \dots, K_m\}$ Unterteilung von Ω und $(K_i, \mathcal{P}^i, \mathcal{N}^i)$ ein finites Element $\forall i = 1, \dots, m$.

$X_h = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \mid v|_{K_i} \in \mathcal{P}^i, N(v|_{K_i}) = N(v)\ \forall N \in \mathcal{N}^i\ \forall i = 1, \dots, m\}$ heißt *finite-Elemente-Raum*

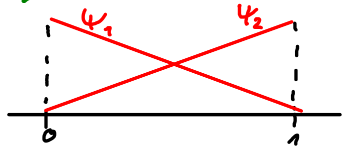
FEM: FE-Beispiele

<u>Bsp:</u> (1D-Lagrange-Element) $K=(0,1)$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1=\{\text{Polynome vom Grad } 1\}$, $\mathcal{N}=\{N_1,N_2\}$

dim $\mathcal{P}$ = ?

$N_1(v)=v(0)$, $N_2(v)=v(1)$

nodale Basis: $\psi_1(x)=1-x$, $\psi_2(x)=x$

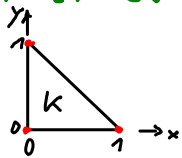


dim $\mathcal{P}$ = ?

<u>Bsp:</u> (2D-Lagrange-Element) $K=T:=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y\leq 1-x\}$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}=\{N_1,N_2,N_3\}$

$N_1(v)=v(0,0)$, $N_2(v)=v(1,0)$, $N_3(v)=v(0,1)$

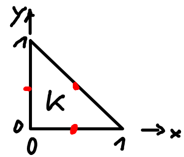
nodale Basis: $\psi_1(x,y)=1-x-y$, $\psi_2(x,y)=x$, $\psi_3(x,y)=y$



<u>Bsp:</u> (2D-Crouzeix-Raviart-Element) $K=T$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}=\{N_1,\dots,N_3\}$

$N_1(v)=v(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $N_2(v)=v(0,\frac{1}{2})$, $N_2(v)=v(\frac{1}{2},0)$

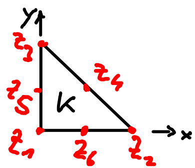
nodale Basis: $\psi_1(x,y)=2(x+y)-1$, $\psi_2(x,y)=1-2x$, $\psi_3(x,y)=1-2y$



<u>Bsp:</u> (2D-Lagrange-Element) $K=T$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_2$, $\mathcal{N}=\{N_1,\dots,N_6\}$; $N_i(v)=v(z_i)$;

$\psi_1(x,y)=(1-2x-2y)(1-x-y)$, $\psi_2(x,y)=-x(1-2x)$, $\psi_3(x,y)=-y(1-2y)$,

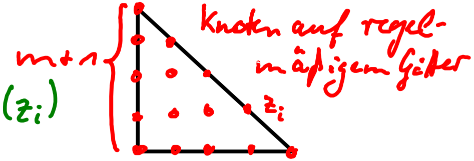
$\psi_4(x,y)=4xy$, $\psi_5(x,y)=4y(1-x-y)$, $\psi_6(x,y)=4x(1-x-y)$



FEM: FE-Beispiele

Bsp: (2D-Lagrange-Element m-ter Ordnung)

$K = T,\ \mathcal{P} = \mathcal{P}_m,\ \mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\},\ k = 1+2+\dots+(m+1),\ N_i(v) = v(z_i)$



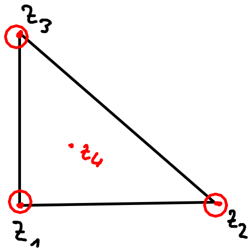
Bsp: (2D Hermite-Element) $K = T,\ \mathcal{P} = \mathcal{P}_3$ $\quad \dim \mathcal{P} = ?$

$N_1(v) = v(z_1),\quad N_2(v) = v(z_2),\quad N_3(v) = v(z_3),\quad N_4(v) = v(z_4)$

$N_5(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_1),\quad N_6(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2),\quad N_7 = \frac{\partial v}{\partial x}(z_3)$

$N_8(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1),\quad N_9(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_2),\quad N_{10} = \frac{\partial v}{\partial y}(z_3)$

nodale Basis: ermittle mittels Polynom-Interpolation



Bsp: (2D Hermite-Element m-ter Ordnung)

$K = T,\ \mathcal{P} = \mathcal{P}_m,\ \mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\},\quad k = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
k	3	6	10	15	21	28	36	45

$N_i(v) =$ Funktionswerte bzw. Richtungsableitungen bis Ordnung ℓ in z_1, z_2, bzw. z_3

Es gibt $\ell+1$ unabhängige Richtungsableitungen der Ordnung ℓ

$\Longrightarrow 3(1+2+\dots+(\ell+1)) = 3\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} =: L$ Formfunktionen $\Rightarrow$ wähle $\ell = \left\lfloor \frac{-3+\sqrt{1+8k/3}}{2} \right\rfloor$

& ergänze um $k-L$ Formfunktionen an z_4

FEM: Interpolante

Def: · Sei $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ein finites Element mit nodaler Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$. Die lokale Interpolante einer Funktion $v: K \to \mathbb{R}$ ist $I_K v = \sum_{i=1}^{k} N_i(v)\, \psi_i$.

· Sei $\{K_1, \dots, K_M\}$ Unterteilung von Ω und $(K_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{N}^i)$ ein finites Element $\forall i = 1, \dots, M$.

Die globale Interpolante $I_h v$ von $v: \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $I_h v|_{K_i} = I_{K_i} v \quad \forall i$.

Der zugehörige finite-Elemente-Raum lässt sich darstellen als $X_h = \{ I_h v \mid v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \}$.

Def: Ist $I_h v \in C^r(\overline{\Omega}) \ \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so heißt X_h ein C^r finite-Elemente-Raum.

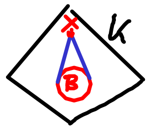
Thm: Für eine Triangulierung mit Lagrange- oder Hermite-Elementen ist der zugehörige FE-Raum ein C^0-FE-Raum.

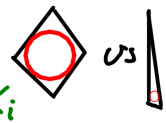
Bew: Es reicht zu zeigen, dass auf einer Kante $e = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$ zwischen zwei Elementen gilt $I_{K_i} v|_e = I_{K_j} v|_e \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Für ein Lagrange-Element m-ter Ordnung sind $I_{K_i} v|_e, I_{K_j} v|_e$ 1D-Polynome vom Grad m

$\Rightarrow$ die Bedingungen $I_{K_i} v(z_r) = v(z_r) = I_{K_j} v(z_r)$ für die $m+1$ Punkte z_r auf e implizieren $I_{K_i} v|_e = I_{K_j} v|_e$. Hermite-Element: HA $\square$

FEM: Bramble-Hilbert-Lemma





Def: · $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>sternförmig</u> bzgl. eines Balls $B \subset K$, falls die konvexe Hülle von $\{x\} \cup B$ für alle $x \in K$ erfüllt $co(\{x\} \cup B) \subset K$.

· Eine Unterteilung $\{K_1, \dots, K_M\}$ von Ω heißt <u>$\frac{1}{\rho}$-quasiuniform</u> oder regulär, falls $\forall i = 1, \dots, M$: $\frac{1}{\rho} \le \frac{r_{K_i}}{h_{K_i}}$, wobei r_{K_i} = Durchmesser des größten Balls in K_i

Stephen, nicht David

Thm: (Bramble-Hilbert-Lemma) Sei $\{K_1, \dots, K_M\}$ eine $\frac{1}{\rho}$-quasiuniforme Unterteilung von dem beschränkten offenen Gebiet Ω, und seien $(K_i, \mathcal{P}^i, \mathcal{N}^i)$ finite Elemente mit

(1) K_i sternförmig bzgl. eines Balls,

(2) $\mathcal{P}_{m-1} \subset \mathcal{P}^i \subset C^m(\overline{K_i})$,

(3) $\mathcal{N}^i \subset$ beschränkte Linearformen auf $C^l(\overline{K_i})$,

diese Form des Lemmas ist eigentlich von Dupont & Scott

dann gilt für $m > l + \frac{n}{2}$ und $0 \le j \le m$: $|v - I_{K_i} v|_{H^j(K_i)} \le C(m,n,\rho)\, h_{K_i}^{m-j}\, |v|_{H^m(K_i)}$

$\Longrightarrow$ $|v - I_h v|_{H^j(\Omega)} \le C(m,n,\rho)\, h^{m-j}\, |v|_{H^m(\Omega)}$ falls $I_h v \in H^j(\Omega)$

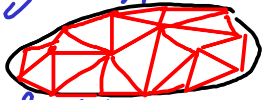
Kor: $\|u_h - u\|_{H^1} \le C\, h^{m-1}\, |u|_{H^m}$ für unsere elliptischen Probleme & C^0-FE-Approximationen

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Variational Crimes: Abweichung von exakten Methoden

Bisher haben wir FE-Approximationen betrachtet, bei denen u_h die gleiche schwache Gleichung erfüllt wie u (d.h. $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in X$), nur auf einem Unterraum X_h. In der Praxis wird davon jedoch oft abgewichen, z.B.

- Ω hat krummlinigen Rand $\partial\Omega$, wird jedoch mit Triangulierungen approximiert



- Die Systemmatrix $A_{mn} = \int_\Omega Q(\phi_m, \phi_n)\, dx$ oder rechte Seite $B_m = \int_\Omega f \phi_m\, dx$ werden nur approximativ berechnet, z.B. mit Quadratur
- Der finite-Elemente-Raum X_h ist gar kein Teilraum vom Lösungsraum X (z.B. ist der Crouzeix-Raviart-FE-Raum $\not\subset H^1(\Omega)$)

Solche Abweichungen bezeichnet man als „<u>Variational Crimes</u>".

<u>Bsp:</u> $\ell(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$ wird ersetzt durch Mittelpunktsquadratur auf jedem Dreieck T_ℓ der Triangulierung $\mathcal{T}$, d.h. durch

$$\ell_h(v) = \sum_{\ell=1}^{M} |T_\ell|\ f(\bar{x}_\ell)\, v(\bar{x}_\ell)$$ mit $\bar{x}_\ell$ dem Mittelpunkt von T_ℓ.

Variational Crimes: Strangs erstes Lemma

$u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)\ \forall v_h \in X_h$; a_h bilinear, gleichgradig koerziv; ℓ_h linear

$X_h \subset X$

d.h. $a_h(v_h, v_h) \geq c\|v_h\|_X^2$ unabh. von h

Übrigens: a_h & ℓ_h müssen nur auf X_h definiert sein! z.B. könnte $a_h(u_h, v_h)$ den Gradienten von u_h an einem Quadraturpunkt auswerten, für eine Funktion u aus $X = H^1(\Omega)$ würde dies jedoch nicht definiert sein

<u>Thm:</u> (Strangs erstes Lemma) Für ein $K \geq 0$ unabhängig von h gilt

$$\|u_h - u\|_X \leq K \left[\inf_{v_h \in X_h} \left(\|u - v_h\|_X + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} \right) + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_X} \right]$$

Bew: Sei $v_h \in X_h$ und $w_h = u_h - v_h$.

$$c\|u_h - v_h\|_X^2 \leq a_h(u_h - v_h, w_h) = a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [a_h(u_h, w_h) - a(u, w_h)]$$

$$\leq C\|u - v_h\|_X \|w_h\|_X + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [\ell_h(w_h) - \ell(w_h)]$$

$$\Rightarrow c\|u_h - v_h\|_X \leq C\|u - v_h\|_X + \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} + \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_X}$$

Nutze nun $\|u_h - u\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|u_h - v_h\|_X$

$\square$

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Variational Crimes: Strangs erstes Lemma - Anwendung

Bsp: Löse $-\Delta u + u = f$ auf $\Omega = [0,1]^2$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$

$\Longrightarrow$ $X = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$, $\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx$ erfüllen LM-Bedingung

$\frac{1}{\rho}$-quasiuniforme Triangulierung $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ mit Gitterweite h; X_h = 1. Ordnung-Lagrange FE-Raum

$a_h = a$, $\ell_h(v_h) = \sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} |T_\ell| \sum_{x \in \mathcal{V} \cap \overline{T_\ell}} \frac{f(x) v(x)}{3}$ „Trapezregel"

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)$ $\forall v_h \in X_h$; wie groß ist $\|u_h - u\|_{H^1}$?

Es gibt $K > 0$ mit $\|u_h - u\|_{H^1} \leq K\left(h\,|u|_{H^2} + h^2 \|f\|_{C^2}\right) \leq \tilde{K}\left(h\,\|f\|_{L^2} + h^2 \|f\|_{C^2}\right)$

Bew: Strang: $\|u_h - u\|_{H^1} \leq K\left[\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_{H^1}}\right]$

Bramble-Hilbert: $\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} \leq \|u - I_h u\|_{H^1} \leq C(\rho)\, h\, |u|_{H^2}$

$$|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)| = \left| \int_\Omega f w_h \, dx - \int_\Omega I_h(f w_h)\, dx \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |f w_h - I_h(f w_h)|\, dx$$

$$\leq \sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} \|f w_h - I_h(f w_h)\|_{L^2(T_\ell)} \sqrt{|T_\ell|} \leq \sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} \sqrt{|T_\ell|}\, C(\rho)\, h^2 \,|f w_h|_{H^2(T_\ell)}$$

$$\leq \Big(\sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} |T_\ell|\Big)^{\frac{1}{2}} C(\rho) h^2 \Big(\sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} |f w_h|^2_{H^2(T_\ell)}\Big)^{\frac{1}{2}} = C(\rho)\sqrt{|\Omega|}\, h^2 \Big(\sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} |f w_h|^2_{H^2(T_\ell)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$|f w_h|^2_{H^2(T)} = \int_T \left(w_h D^2 f + \nabla f \otimes \nabla w_h + \nabla w_h \otimes \nabla f\right)^2 dx \leq 8\left(\max_{x \in \Omega} |D^2 f(x)|^2 + \max_{x \in \Omega} |Df(x)|^2\right) \|w_h\|^2_{H^1(T)}$$

$\square$

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma

$u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt

$X_h \not\subset X$, d.h. insbesondere $\|\cdot\|_X$ nicht auf X_h definiert!

$\Rightarrow$ nutze (gitterabhängige) Norm $\|\cdot\|_h$ auf $X + X_h$

u_h wohldefiniert, wenn X_h Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_h$

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h,v_h) = \ell_h(v_h)\ \forall v_h \in X_h$; a_h bilinear; ℓ_h linear

$a_h(v_h,v_h) \ge c\|v_h\|_h^2\ \forall v_h \in X_h$; $|a_h(u,v_h)| \le C\|u\|_h\|v_h\|_h\ \forall u \in X+X_h, v_h \in X_h$

Thm: (Strangs zweites Lemma; Berger-Scott-Strang-Lemma) $\exists K>0$ unabhängig von h, sodass

$$\|u_h-u\|_h \le K\Big[\underbrace{\inf_{v_h\in X_h}\|u-v_h\|_h}_{\text{„Approximationsfehler"}} + \underbrace{\sup_{w_h\in X_h}\frac{|a_h(u,w_h)-\ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}}_{\text{„Konsistenzfehler"}}\Big]$$

Bew: Sei $v_h \in X_h$, $w_h = u_h - v_h$. $c\|u_h-v_h\|_h^2 \le a_h(u_h-v_h, w_h) = a_h(u-v_h,w_h) + [\ell_h(w_h) - a_h(u,w_h)]$

$\le C\|u-v_h\|_h\|w_h\|_h + |\ell_h(w_h) - a_h(u,w_h)|$

$\Rightarrow \|u_h-v_h\|_h \le \frac{C}{c}\|u-v_h\|_h + \frac{1}{c}\frac{|\ell_h(w_h)-a_h(u,w_h)|}{\|w_h\|_h}$; nutze nun $\|u-u_h\|_h \le \|u-v_h\|_h + \|u_h-v_h\|_h$ $\square$

Bsp: Beispiele für die Norm $\|\cdot\|_h$ sind gegeben durch

$$\|v\|_{m,h} = \sqrt{\sum_{T_\ell\in\mathcal{J}} \|v\|^2_{H^m(T_\ell)}} \qquad \left(\neq \|v\|_{H^m(\Omega)}\right)$$

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma - Anwendung

- $\Omega = [0,1]^2$, $X = H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$, $\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx$ für $u, v \in X$
- Crouzeix-Raviart-Elemente auf quasiuniformer Triangulierung $\mathcal{T}_h$, d. h.

$$X_h = \{ v \in L^2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \; \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ \& } v \text{ ist stetig an Mittelpunkten der Dreiecksseiten}$$
$$\text{\& } v = 0 \text{ auf Mittelpunkten der Dreiecksseiten auf } \partial\Omega \}$$

$$a_h(u,v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx, \quad \ell_h(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{für } u, v \in X_h \not\subset X!$$

- $u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v) \;\; \forall v \in X$, $u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \;\; \forall v_h \in X_h$
- wir wissen: $u \in H^2(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$

<u>Thm:</u> $\|u_h - u\|_{1,h} \leq ch \|f\|_{L^2}$ für ein $c > 0$.

Bew: $\cdot$ $a_h(u, v_h) - \ell_h(v_h) = \sum_{T_i} \int_{T_i} \nabla u \cdot \nabla v_h + u v_h - f v_h \, dx \overset{\text{part. Int. \& } u \in H^2}{=} \sum_{T_i} \int_{\partial T_i} \nabla u \cdot n \, v_h \, dx - \int_{T_i} v_h \underbrace{(\Delta u - u + f)}_{=0} dx$

$$= \sum_{T_i} \sum_{\text{Kante } e \in \partial T_i} \int_e \nabla u(x) \cdot n (v_h(x) - v_h(x_e)) \, dx \quad \text{mit } x_e = \text{Mittelpunkt von } e$$

da für $e = T_1 \cap T_2$ gilt $\nabla u|_{T_i} \in H^1(T_i)$, sodass nach dem Spursatz $\nabla u|_{T_1} \cdot n_{T_1} = -\nabla u|_{T_2} \cdot n_{T_2}$ auf e

$\int_e w_h - w_h(x_e) \, dx = 0$

$$= \sum_{T_i} \sum_{e \in \partial T_i} \int_e (\nabla u - \nabla I_h u) \cdot n \, (v_h - v_h(x_e)) \, dx \leq \sum_{T_i} \sum_{e \in \partial T_i} \|\nabla (u - I_h u)\|_{L^2(e)} \, \|v_h - v_h(x_e)\|_{L^2(e)}$$

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma - Anwendung (Forts.)

- $\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2(e)} \le \check{C}\left(h^{-\frac{1}{2}}\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2(T_i)} + h^{\frac{1}{2}}\|D^2(u-I_h u)\|_{L^2(T_i)}\right)$ Spursatz

$\le \bar{C}\, h^{\frac{1}{2}}\, \|D^2(u-I_h u)\|_{L^2(T_i)}$ Bramble-Hilbert

$= \bar{C}\, h^{\frac{1}{2}}\, |u|_{H^2(T_i)}$

- $\|v_h - v_h(x_e)\|_{L^2(e)} \le \|v_h - \overline{v_h}(T_i)\|_{L^2(e)}$ $\qquad \overline{v_h}(T_i) = \frac{1}{|T_i|}\int_{T_i} v_h\,dx$

$\le \check{C}\left(h^{-\frac{1}{2}}\|v_h - \overline{v_h}(T_i)\|_{L^2(T_i)} + h^{\frac{1}{2}}\|\nabla(v_h - \overline{v_h}(T_i))\|_{L^2(T_i)}\right)$ Spursatz

$\le C h^{\frac{1}{2}} |v_h|_{H^1(T_i)}$ Poincaré-Ungl.

$\Rightarrow |a_h(u,v_h) - \ell_h(v_h)| \le \sum_{T_i} C\, h\, |u|_{H^2(T_i)}\, |v_h|_{H^1(T_i)} \le C\, h\, |u|_{H^2(\Omega)}\, \|v_h\|_{1,h}$
Cauchy-Schwarz

- $\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{1,h}^2 \le \|u - I_h u\|_{1,h}^2 = \sum_{T_i}\|u - I_h u\|_{H^1(T_i)}^2 \le \sum_{T_i} C h^2 |u|_{H^2(T_i)}^2 = C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2$

- Voraussetzungen von Strangs 2. Lemma erfüllt $\Longrightarrow \|u_h - u\|_h \le \tilde{K}\left(h|u|_{H^2} + h|u|_{H^2}\right)$ $\square$

Variational Crimes: Dualität (Erweiterung von Aubin-Nitsche)

- $u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt
- Aubin-Nitsche-Bed.: H Hilbertraum mit stetiger Einbettung $X \hookrightarrow H$
- Strangs 2. Lemma-Bed: $a_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2\ \forall v_h \in X_h$; $|a_h(u,v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h\ \forall u,v \in X + X_h$
  ℓ_h linear & beschränkt auf X_h, $\|\cdot\|_h$ Norm auf Hilbertraum X_h
- $u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)\ \forall v_h \in X_h$
- Zusätzlich: a_h auf $X + X_h$ definiert, $a_h = a$ auf X, $X_h \subset H$, $\|\cdot\|_h$ definiert auf $X + X_h$

wird nicht in Beweis genutzt

Thm: $w_r \in X$ löse $a(v, w_r) = (r, v)_H\ \forall v \in X$, $w_h \in X_h$ löse $a_h(v_h, w_h) = (r, v_h)_H\ \forall v_h \in X_h$.

$$\|u_h - u\|_H \leq \sup_{r \in H} \frac{1}{\|r\|_H} \Big(C \|u_h - u\|_h \|w_r - w_h\|_h + \big[(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r) \big] + \big[\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r) \big] \Big)$$

Bew: Setze $r = u_h - u$. $(u_h - u, u_h - u)_H = a_h(u_h - u, w_r - w_h) + \text{Rest}$ wie Aubin-Nitsche

$$\begin{aligned}
\text{Rest} &= (u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r - w_h) = \big[(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r) \big] + a_h(u_h - u, w_h) \\
&= \big[(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r) \big] + \big[\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r) \big]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_h - u\|_H \leq \frac{1}{\|r\|_H} \Big(C \|u_h - u\|_h \|w_r - w_h\|_h + \big[(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r) \big] + \big[\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r) \big] \Big)$$

$\square$

Variational Crimes: Dualität - Anwendung

Löse $-\Delta u + u = f$ auf $[0,1]^2$ mit 0-RB mit Crouzeix-Raviart-Elementen $\Rightarrow$ Setting wie zuvor

<u>Thm:</u> $\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$ für ein $C > 0$.

Bew: · $H = L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{1,h}$. Wir wissen schon $\|u_h - u\|_{1,h} \leq Ch \|f\|_{L^2}$, $\|w_h - w_r\|_{1,h} \leq Ch \|r\|_{L^2}$.

· Wir haben außerdem schon einmal gezeigt

$$|(v_h, g)_{L^2} - a_h(v_h, w_g)| = |(v_h, g)_{L^2} - a_h(w_g, v_h)| \leq Ch |w_g|_{H^2} \|v_h\|_{1,h}$$

Beachte: Bei vorheriger Rechnung war Testfunktion $v_h \in X_h$, aber auch $v_h \in X + X_h$ möglich. Hierzu ersetze $v_h(x_e)$ durch $\overline{v}_e = \frac{1}{|e|}\int_e v_h(x)\,dx$ (ist auf X_h das gleiche) und

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_h - u, r)_{L^2} - a_h(u_h - u, w_r) \leq Ch |w_r|_{H^2} \|u_h - u\|_{1,h} \leq \tilde{C} h^2 \|r\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \\ \ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r) \leq Ch |u|_{H^2} \|w_h - w_r\|_{1,h} \leq \tilde{C} h^2 \|f\|_{L^2} \|r\|_{L^2} \end{cases}$$

· Bedingungen voriger Folie erfüllt

$$\Rightarrow \|u_h - u\|_{L^2} \leq \sup_{r \in L^2(\Omega)} \frac{1}{\|r\|_{L^2}} \left(Ch^2 \|f\|_{L^2} \|r\|_{L^2} \right) \qquad \square$$

Dualität: Duale Räume

Def: Sei X ein normierter Vektorraum. Der Dualraum X^* ist der Raum aller beschränkten linearen Funktionale auf X. Für $f \in X^*, x \in X$ schreiben wir auch $f(x) = \langle f, x \rangle_{X^*,X}$. Auf X^* ist durch $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_X}$ eine Norm definiert.

Thm: Offensichtlich ist $\langle f, x \rangle_{X^*,X} \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X$.

Bsp: $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$ & $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ($L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)^*$ nach Hölderungleichung)

Def: · Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Raum der Testfunktionen ist $C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} \phi \text{ kompakt}\}$.

$\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \phi$ in $C_c^\infty(\Omega)$, wenn ein kompaktes $K \subset \Omega$ existiert mit $\operatorname{supp} \phi_j \subset K \ \forall j$ und $\|\phi_j - \phi\|_{C^n} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \ \forall n$. Bsp.: $\phi(x) = e^{-(1-|x|)^{-2}}$ für $|x| < 1$ & $\phi(x) = 0$ sonst

· Der Raum der Distributionen ist $\mathcal{D}'(\Omega) = \{f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear \& stetig}\}$ (topologischer Dualraum zu $C_c^\infty(\Omega)$). Wir schreiben $f(\phi) = \int_\Omega f \phi \, dx$ und identifizieren somit Funktionen $f \in L^1(\Omega)$ mit Distributionen. Bsp.: $\int_\Omega \delta \phi \, dx = \phi(0)$

· Für $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und Multiindex α wird die distributionelle Ableitung $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert als $D^\alpha f(\phi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \phi)$ (part. Integration) Bsp.: $H' = \delta$

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Dualität: H^{-1}

Beweis mit Lax-Milgram möglich!

<u>Thm</u>: $C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H_0^1(\Omega)$, d.h. $\forall u \in H_0^1(\Omega), \varepsilon > 0 \ \exists \ \phi \in C_c^\infty(\Omega): \|u-\phi\|_{H^1} < \varepsilon$.

<u>Thm</u>: (Rieszscher Darstellungssatz) Ein Hilbertraum X ist isometrisch isomorph zu X^*, d.h. zu jedem $f \in X^*$ gibt es genau ein $u \in X$ mit $\|f\|_{X^*} = \|u\|_X$ und $f(v) = (u,v)_X \ \forall v \in X$.

<u>Bsp</u>: Jedes $f \in L^2(\Omega)^*$ lässt sich schreiben als $f(v) = \int_\Omega uv\,dx$ für ein $u \in L^2(\Omega)$.

<u>Def</u>: $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$. Offensichtlich gilt $H^{-1} \subset \mathcal{D}'$. Wir identifizieren $H^{-1}(\Omega)$ mit den Distributionen f, für die ein $g \in H^1(\Omega)$ existiert, sodass $\langle f,u\rangle_{\mathcal{D}',C_0^\infty} = (g,u)_{H^1} \ \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$:

Sei $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $u_j \to u$ in $H_0^1(\Omega)$, dann ist $\langle f, u_i - u_j\rangle_{\mathcal{D}',C_c^\infty} \le \|g\|_{H^1}\|u_i-u_j\|_{H^1} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0$

$\Longrightarrow \langle f,u\rangle_{H^{-1},H_0^1} := \lim_{i\to\infty} \langle f,u_i\rangle_{\mathcal{D}',C_0^\infty} = \lim_{i\to\infty} (g,u_i)_{H^1} = (g,u)_{H^1}$.

Wir schreiben $\langle f,u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega fu\,dx$.

<u>Bsp</u>: · $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ mit $\langle f,u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega fu\,dx$ für $f \in L^2(\Omega)$

· $\delta \in H^{-1}((-1,1))$: · $f: x \mapsto \delta(x) - \frac{1}{2}|x| \in H^{-1}((-1,1))$, da $\forall u \in C_c^\infty((-1,1))$ gilt

$$f(u) = u(0) - \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{2} u(x)\,dx = \left(-\frac{|x|}{2}, u\right)_{H^1}$$

· $\frac{1}{2}|x| \in L^2((-1,1)) \subset H^{-1}((-1,1))$

Dualität: Elliptische Differentialoperatoren

Thm: $H^{-1}(\Omega)^* = H_0^1(\Omega)$ mit $\langle u, f\rangle_{H^{-1}(\Omega)^*, H^{-1}(\Omega)} = \langle f, u\rangle_{H^{-1}, H_0^1}$.

Bew: · $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)^*$ (es gilt immer $X \subset (X^*)^*$)

· Sei nun $z \in H^{-1}(\Omega)^*$ und $R: H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ der Isomorphismus des Rieszschen Satzes.

Dann existiert ein $u_z \in H_0^1(\Omega)$ mit $z(f) = f(u_z)\ \forall f \in H^{-1}(\Omega)$, nämlich $u_z = R(z \circ R^{-1})$ □

Thm: Sei $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega)$. Der Differentialoperator $L: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$,

$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu$ ist beschränkt.

Bew: Sei $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\langle Lu, v\rangle_{\mathcal{D}', C_c^\infty} = \int_\Omega \nabla v\cdot A\nabla u + v\, b\cdot\nabla u + c u v\, dx \leq C_1 \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$

Sei nun $v \in H_0^1(\Omega)$, $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $v_j \to v$. $\langle Lu, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \lim_{j\to\infty} \langle Lu, v_j\rangle_{\mathcal{D}', C_c^\infty}$ existiert

(warum?) und $\|L\| \leq C_1$ (warum?). □

Def: Seien X, Y normierte Räume, $L: X \to Y$ linear und beschränkt. Der <u>adjungierte Operator</u> $L^*: Y^* \to X^*$ ist definiert durch $\langle f, Lx\rangle_{Y^*, Y} = \langle L^* f, x\rangle_{X^*, X}$.

Bsp: $L: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu \Rightarrow L^* v = -\operatorname{div}(A^T\nabla v) - \operatorname{div}(bv) + cv$

denn $\int_\Omega (Lu) v\, dx = \int_\Omega u L^* v\, dx$ nach mehrmaliger partieller Integration.

Adaptivität: Idee einer adaptiven FE-Lösung

a priori Fehlerschätzung $\|u-u_h\| \leq \eta_h(u)$

a posteriori Fehlerschätzung $\|u-u_h\| \leq \eta_h(u_h)$

<u>Def</u>: Ein Fehlerschätzer $\eta_h(u_h)$ heißt <u>zuverlässig</u>, falls $\|u-u_h\| \leq \eta_h(u_h)$.

Er heißt <u>effizient</u> mit Konstante $c>0$, falls $c\,\eta_h(u_h) \leq \|u-u_h\|$.

Oft lässt ein Fehlerschätzer sich schreiben als Summe $\eta_h(u_h)^2 = \sum_{T_\ell \in \mathcal{T}} \eta_{T_\ell}(u_h)^2$ über alle FE.

Geg. $TOL>0$: $\eta_{T_\ell}(u_h) < \frac{TOL}{\sqrt{M}}$ ($\neg$ Verfeinerungskriterium) $\Rightarrow \|u-u_h\| \leq \eta(u_h) < TOL$ (Abbruchbedingung)

<u>Alg.</u> (Adaptive FE)

wähle Anfangsgitter

while Abbruchbedingung nicht erfüllt

| berechne u_h & $\eta_h(u_h)$

| for $\ell = 1,\dots,M$

| | if Verfeinerungskriterium erfüllt für T_ℓ

| | | verfeinere T_ℓ in kleinere Elemente

Adaptivität: A posteriori-Fehlerschätzung

Def: Das <u>Residuum</u> einer elliptischen pDgl. $Lu = f$ mit $L: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ ist $R: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $R(v) = Lv - f$.

Sei $a(u,v) = \langle Lu, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}$, $\ell(v) = (f,v)_{L^2}$, $a(v,v) \geq c\|v\|_{H^1}^2$, $a(u,v) \leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$ $\forall u,v \in H^1(\Omega)$

$a(u,v) = \ell(v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ $\forall v_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega)$

z.B. $L = (-\Delta + id)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$

Thm: $c\,\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|R(u_h)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\,\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$

Bew:
- $\|R(u_h)\|_{H^{-1}} = \|Lu_h - f\|_{H^{-1}} = \|L(u_h - u)\|_{H^{-1}} \leq C\|u_h - u\|_{H^1}$
- $R(u_h)(u_h - u) = \int_\Omega (Lu_h)(u_h - u) - f(u_h - u)\,dx = a(u_h, u_h - u) - \ell(u_h - u)$

$$= a(u_h - u, u_h - u) \geq c\,\|u_h - u\|_{H^1}^2$$

$$\Rightarrow \|R(u_h)\|_{H^{-1}} \geq \frac{c\|u_h - u\|_{H^1}^2}{\|u_h - u\|_{H^1}} \geq c\|u_h - u\|_{H^1} \qquad \square$$

Somit ist $\|R(u_h)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ zuverlässiger, effizienter Fehlerschätzer.

Adaptivität: A posteriori-Fehlerschätzung in L^2

- $u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt

a & ℓ sodass $u \in H^2$, z.B. $\Omega = [0,1]^2$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\,dx$, $\ell(v) = \int_\Omega f v\,dx$, $f \in L^2(\Omega)$

$a(u,v) = \langle Lu, v\rangle_{H^{-1},H^1_0} = \langle u, L^* v\rangle_{H^1_0, H^{-1}}$ für einen Differentialoperator $L: H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$

z.B. $L = (-\Delta + id)$

- $u_h \in X_h \subset X$ löst $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)\ \forall v_h \in X_h$ (Finite Elemente auf quasiuniformer Triangulierung $\mathcal{T}$)

Thm: $\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h \|R(u_h)\|_{H^{-1}}$

Bew.: w löse duales Problem $a(v,w) = (u-u_h, v)_{L^2}\ \forall v \in X$ (siehe Aubin-Nitsche)

$$\Rightarrow \|u-u_h\|^2_{L^2} = (u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, w) = a(u-u_h, w-w_h) \quad \forall w_h \in X_h$$

$$= \langle Lu - Lu_h, w - w_h\rangle_{H^{-1},H^1_0} = R(u_h)(w_h - w) \leq \|R(u_h)\|_{H^{-1}} \|w_h - w\|_{H^1}$$

$w_h = I_h w$

$$\leq C \|R(u_h)\|_{H^{-1}}\, h\, |w|_{H^2} \leq C \|R(u_h)\|_{H^{-1}}\, h\, \|u-u_h\|_{L^2} \qquad \square$$

Mit den folgenden Techniken kann dies weiter verfeinert werden, sodass auf jedem Dreieck T das lokale h_T statt h benutzt wird.

Adaptivität: Lokaler Fehlerschätzer

Sei $a(u,v)=(f,v)_{L^2}\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,v)=\langle Lu,v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$ koerziv & beschränkt, $Lu=-\operatorname{div}(A\nabla u)+b\cdot\nabla u+cu$, $f\in L^2(\Omega)$.

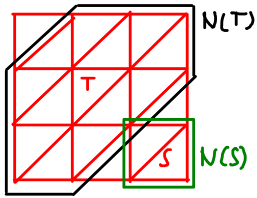
1) $\|R(u_h)\|_{H^{-1}}$ schwer zu berechnen   2) wir möchten Fehlerschätzer für jedes Element

$\Rightarrow$ wir werden $\|R(u_h)\|^2_{H^{-1}}$ ersetzen durch $\eta(u_h)^2=\sum_{T\in\mathcal{T}}\eta_T(u_h)^2$ mit

$$\eta_T(u_h)^2 := h_T^2\,\|Lu_h-f\|^2_{L^2(T)} + h_T\,\|[A\nabla u_h\cdot n]\|^2_{L^2(\partial T)}$$

$[\cdot]$ = Sprung über Kante

und Zuverlässigkeit & (fast) Effizienz zeigen. Zutaten:



(a) $\frac{1}{\rho}$ quasiuniforme Triangulierung $\mathcal{T}$,

$N(T)=\bigcup\{T_\ell\in\mathcal{T}\mid \overline{T_\ell}\cap\overline{T}\neq\emptyset\}$ für $T\in\mathcal{T}$, $N(S)=T_\ell\cup T_j$ für $S=\overline{T_\ell}\cap\overline{T_j}$, $h_S=\max_{T\in N(S)} h_T$

(b) Galerkin-Orthogonalität $\langle R(u_h),\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = a(u_h-u,\varphi) = a(u_h-u,\varphi-\varphi_h)$

(c) $\exists$ (Quasi-)Interpolation $\mathcal{I}_h: H_0^1(\Omega)\to X_h\subset H_0^1(\Omega)$, sodass $\forall K\in\mathcal{T}$ d.h. $\le C(\rho)\cdot\ldots$

$\cdot\ \|\mathcal{I}_h v-v\|_{H^1(K)}\lesssim\|\nabla v\|_{L^2(N(K))}$ $\cdot\ \|\mathcal{I}_h v-v\|_{L^2(K)}\lesssim h_K\|\nabla v\|_{L^2(N(K))}$ (siehe später)

(d) Spurabschätzung $\|v\|_{L^2(S)}\lesssim h_T^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(T)}+h_T^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2(T)}$ $\forall T\in\mathcal{T},\ S\subset\partial T,\ v\in H^1(T)$ HA

(e) Poincaré-Ungleichung $\|v\|_{L^2(T)}\lesssim h_T\|v\|_{H^1(T)}$ $\forall T\in\mathcal{T},\ v\in H_0^1(T)$ HA

Adaptivität: Zuverlässigkeit lokaler Fehlerschätzer

Thm: Sei u_h die FE-Lösung. Es existiert $C = C(\Omega, \rho) > 0$ mit $\|R(u_h)\|^2_{H^{-1}} \leq C \sum_{K\in J} \eta_K(u_h)^2$.

Bew: $\langle R(u_h), \varphi\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \overset{(b)}{=} a(u_h - u, \varphi - \varphi_h) = a(u_h, \varphi - \varphi_h) - (f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(\Omega)}$

$$= \sum_{K\in J} \int_K \nabla(\varphi - \varphi_h)\cdot A\nabla u_h + (\varphi - \varphi_h)(b\cdot\nabla u_h + cu_h - f)\,dx$$

$$= \sum_{K\in J} (Lu_h - f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(K)} + \int_{\partial K} (\varphi - \varphi_h)(A\nabla u_h)\cdot n\,dx$$

$$= \sum_{K\in J} (Lu_h - f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(K)} + \frac{1}{2}\int_{\partial K} (\varphi - \varphi_h)\left[(A\nabla u_h)\cdot n\right]dx$$

Hölder

$$\leq \sum_{K\in J} \|Lu_h - f\|_{L^2(K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2}\|[A\nabla u_h\cdot n]\|_{L^2(\partial K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\partial K)}$$

$$\overset{(d)}{\lesssim} \sum_{K\in J} \|Lu_h - f\|_{L^2(K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + \|[A\nabla u_h\cdot n]\|_{L^2(\partial K)} \left(h_K^{-\frac{1}{2}}\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + h_K^{\frac{1}{2}}|\varphi - \varphi_h|_{H^1(K)}\right)$$

wähle $\varphi_h = \mathcal{I}_h\varphi$

$$\overset{(c)}{\lesssim} \sum_{K\in J} \left(\|Lu_h - f\|_{L^2(K)} h_K + \|[A\nabla u_h\cdot n]\|_{L^2(\partial K)} h_K^{\frac{1}{2}}\right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(N(K))}$$

Cauchy-Schwarz

$$\lesssim \sqrt{\sum_{K\in J} h_K^2 \|Lu_h - f\|^2_{L^2(K)} + h_K \|[A\nabla u_h\cdot n]\|^2_{L^2(\partial K)}}\ \sqrt{\sum_{K\in J} \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(N(K))}}$$

$$\sum_{K\in J} \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(N(K))} \lesssim \sum_{K\in J} \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(K)} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\|R(u_h)\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle R(u_h), \varphi\rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\varphi\|_{H^1}} \lesssim \sqrt{\sum_{K\in J} \eta_K^2(u_h)} \qquad \square$$

Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer

Setze · $r \in L^2(\Omega)$, $r|_T = (Lu_h - f)|_T \ \forall T \in \mathcal{T}$, · $\bar{r} \in L^2(\Omega)$, $\bar{r}|_T = \frac{1}{|T|}\int_T r\,dx$

· $j \in L^2(S)$ ∀ Kanten S, $j|_S = [A\nabla u_h \cdot n]$, · $\bar{j} \in \mathcal{P}_1(S)$ $\forall S$ L^2-Projektion von j

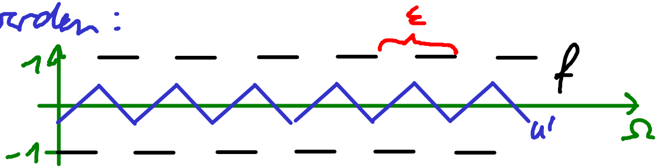
$$\Rightarrow \quad \eta_T(u_h)^2 = h_T^2 \|r\|^2_{L^2(T)} + h_T \sum_{S \in \partial T} \|j\|^2_{L^2(S)}$$

Thm: $\eta_T(u_h)^2 \lesssim \|u_h - u\|^2_{H^1(N(T))} + h_T^2 \|r - \bar{r}\|^2_{L^2(N(T))} + h_T \|j - \bar{j}\|^2_{L^2(\partial T)}$. lokale Effizienz!

$$\Rightarrow \quad \eta_h(u_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T(u_h)^2 \lesssim \|u_h - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(h_T^2 \|r - \bar{r}\|^2_{L^2(N(T))} + h_T \|j - \bar{j}\|^2_{L^2(\partial T)} \right)$$

$\Rightarrow$ $\eta_h(u_h)$ ist effizient bis auf Oszillationsterme

Die Oszillationsterme können nicht ignoriert werden:



Bsp: $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$, $a(u,v) = (f,v)_{L^2} \ \forall v \in H^1_0(\Omega)$,

$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \ \forall v_h \in X_h$ = linearer FE-Raum.

Sei $\varepsilon << h_T$ $\Rightarrow (f, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow u_h = 0$, doch $u'(x) = \begin{cases} x - \varepsilon i, & x \in \varepsilon i + [-\varepsilon/4, \varepsilon/4], i \in \mathbb{N} \\ -x - \varepsilon(i + \frac{1}{2}), & \text{sonst} \end{cases}$

$\eta_h(u_h)^2 = h^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)} = h^2 |\Omega|$

$\|u_h - u\|^2_{H^1} \approx \|\nabla(u_h - u)\|^2_{L^2} = \|\nabla u\|^2_{L^2} = \frac{\varepsilon^2}{3 \cdot 4^2} |\Omega| \quad \not\gtrsim \quad \eta_h(u_h)^2$!

Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer (Beweis)

Bew.: $h_S^{\frac{1}{2}}\|j\|_{L^2(S)} \lesssim \|u_h-u\|_{H^1(N(S))} + h_S\|r-\bar r\|_{L^2(N(S))} + h_S^{\frac{1}{2}}\|j-\bar j\|_{L^2(S)}$, denn

· erweitere $\bar j$ linear von S auf $N(S)$ sodass $\|\bar j\|_{L^2(N(S))}+h_S\|\nabla \bar j\|_{L^2(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}}\|\bar j\|_{L^2(S)}$ HA

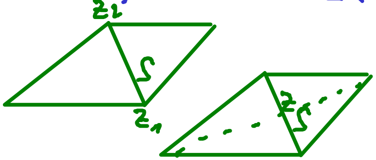
· Sei $\varphi\in W_0^{1,\infty}(N(S))$ für Kante S mit

$\varphi\ge 0$, $\int_S p^2\varphi\, dx \sim \int_S p^2\, dx \ \forall p\in \mathcal{P}_1$, $\|\varphi\|_{L^\infty(N(S))}+h_S\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(N(S))}\lesssim 1$

Bsp: (Kanten-Blase) · $\varphi = \psi_{z_1}\psi_{z_2}$ (Verfürth)

ψ_z = Hütchenfunktion in z

· $\varphi = \psi_z$ (Dörfler)



$\|\bar j\|^2_{L^2(S)} \lesssim \int_S \bar j \underbrace{(\bar j\varphi)}_{\psi_S} dx = \int_S j\psi_S\, dx + \int_S(\bar j - j)\psi_S\, dx$

· $\left|\int_S j\psi_S\, dx\right| \lesssim \|r\|_{L^2(N(S))}\|\psi_S\|_{L^2(N(S))} + \|u-u_h\|_{H^1(N(S))}\|\psi_S\|_{H^1(N(S))}$, da

$\int_S j\psi_S\, dx = a(u_h-u,\psi_S) - \int_{N(S)} r\psi_S\, dx$

· $\|\psi_S\|_{L^2(N(S))} \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\bar j\|_{L^2(N(S))}\|\varphi\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}}\|\bar j\|_{L^2(S)}$ und

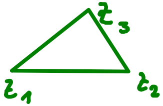
$\|\psi_S\|_{H^1(N(S))} \le \|\psi_S\|_{L^2(N(S))} + \|\nabla\psi_S\|_{L^2(N(S))} \lesssim h_S^{1/2}\|\bar j\|_{L^2(S)} + \|\bar j\nabla\varphi\|_{L^2(N(S))} + \|\varphi\nabla\bar j\|_{L^2(N(S))}$

$\le h_S^{1/2}\|\bar j\|_{L^2(S)} + \|\bar j\|_{L^2(N(S))}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(N(S))} + \|\nabla\bar j\|_{L^2(N(S))}\|\varphi\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim h_S^{-\frac{1}{2}}\|\bar j\|_{L^2(S)}$

· $\|j\|_{L^2(S)} \sim \|\bar j\|_{L^2(S)} \lesssim \frac{\int_S j\psi_S\, ds}{\|\bar j\|_{L^2(S)}} + \|\bar j - j\|_{L^2(S)}\frac{\|\psi_S\|_{L^2(S)}}{\|\bar j\|_{L^2(S)}}$ nutze (d), obiges & folgende Abschätzung für $\|r\|_{L^2(N(S))}$

Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer (Beweis Forts.)

- $h_T \|r\|_{L^2(T)} \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(T)} + h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}$, denn
  - $h_T \|r\|_{L^2(T)} \le h_T \|\bar{r}\|_{L^2(T)} + h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}$
  - Sei $\psi \in W_0^{1,\infty}(T)$ mit $\int_T \psi \, dx = 1$, $\|\nabla \psi\|_{L^\infty(T)} \lesssim h_T^{-1}$

    <u>Bsp:</u> (Element-Blase) · $\psi = c\, \psi_{z_1} \psi_{z_2} \psi_{z_3}$ 

(Verfürth)

    · $\psi = c\, \psi_z$ 

(Dörfler)

$$\|\bar{r}\|^2_{L^2(T)} = \int_T \bar{r}\,(\bar{r}\psi)\, dx \le \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r}\psi\|_{H^1(T)} \lesssim \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\nabla(\bar{r}\psi)\|_{L^2(T)}$$

Hölder
$$\le \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r}\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi\|_{L^\infty(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r}\|_{L^2(T)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\bar{r}\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \le h_T^{-1} \|r\|_{H^{-1}(T)} + h_T^{-1} \|r - \bar{r}\|_{H^{-1}(T)}$$

- $$\|r\|_{H^{-1}(T)} = \sup_{w \in H_0^1(T)} \frac{\langle r, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|w\|_{H^1(T)}} = \sup_{w \in H_0^1(T)} \frac{a(u_h - u, w)}{\|w\|_{H^1(T)}} \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(T)}$$

- $$\|r - \bar{r}\|_{H^{-1}(T)} = \sup_{w \in H_0^1(T)} \frac{\langle r - \bar{r}, w\rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|w\|_{H^1(T)}} \le \sup_{w \in H_0^1(T)} \frac{\|r - \bar{r}\|_{L^2(T)} \|w\|_{L^2(T)}}{\|w\|_{H^1(T)}} \overset{(P)}{\lesssim} h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}$$

- $$\eta_T(u_h)^2 = h_T^2 \|r\|^2_{L^2(T)} + h_T \sum_{S \in \partial T} \|j\|^2_{L^2(S)}$$

$$\lesssim \|u_h - u\|^2_{H^1(T)} + h_T^2 \|r - \bar{r}\|^2_{L^2(T)} + \sum_{S \in \partial T} \left(\|u_h - u\|^2_{H^1(N(S))} + h_S^2 \|r - \bar{r}\|^2_{L^2(N(S))} + h_S \|j - \bar{j}\|^2_{L^2(S)} \right) \square$$

Adaptivität: Clément-Interpolation

<u>Thm:</u> Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $m \geq 0$, $p \in [1,\infty]$, $X_h = \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k(T)\ \forall T \in \mathcal{T},\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$

gibt es einen linearen Operator $I_h : L^1(\Omega) \to X_h$, sodass

hängt von Quasiuniformität ab

$$\|D^t(v - I_h v)\|_{L^q(T)} \lesssim h_T^{\,s-\frac{d}{p}-t+\frac{d}{q}} \|D^s v\|_{L^p(N(T))}$$

$\forall v \in W^{m,p}(\Omega)$, $T \in \mathcal{T}$, $0 \leq t \leq s \leq \min(m, k+1)$ $\quad s - \frac{d}{p} \geq t - \frac{d}{q}$.

Insbesondere $\|v - I_h v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$ & $\|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$

Hier für Lagrange-FE 1. Ordnung für $H_0^1(\Omega)$.

<u>Def:</u> (Clément-Interpolation) · M_i sei der Träger der stückweise affinen Hütchenfunktion in Knoten z_i

· $P_{M_i} : L^2(M_i) \to X_h(M_i) = \{v_h|_{M_i} \mid v_h \in X_h\}$ ist definiert als die L^2-orthogonale Projektion,

d.h. $\|v - P_{M_i} v\|_{L^2(M_i)} = \inf\limits_{v_h \in X_h(M_i)} \|v - v_h\|_{L^2(M_i)}$

warum?

($P_{M_i} v$ ist die nach Lax-Milgram wohldefinierte Lösung $u \in X_h(M_i)$ von $(u, v_h)_{L^2(M_i)} = (v, v_h)_{L^2(M_i)}\ \forall v_h \in X_h(M_i)$)

· $I_h v = \sum\limits_{z_i \in \mathcal{V} \cap \mathring{\Omega}} (P_{M_i} v)(z_i)\, \varphi_i$ für φ_i die Hütchenfunktion in z_i

<u>Thm:</u> Die Clément-Interpolation erfüllt $\|v - I_h v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$ & $\|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$

Adaptivität: Clément-Interpolation (Beweis)

Bew.: Für ein inneres Element T_ℓ gilt

Partition der 1 — Dreiecks- & Hölder-Ungl.

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(T_\ell)} \overset{\text{Partition der 1}}{=} \Big\|\sum_i \big(v - P_{M_i} v(z_i)\big)\psi_i\Big\|_{L^2(T_\ell)} \le \sum_i \|v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)}$$

Summe über Dreiecksknoten

$$\le \sum_i \|v - P_{M_i} v\|_{L^2(T_\ell)} + \|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)} \le \sum_i \|v - P_{M_i} v\|_{L^2(M_i)} + \|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)}$$

- mit $\overline{v}_M = \frac{1}{|M|}\int_M v\,dx$ ist

Zurückziehen auf Referenzgebiet, Poincaré, Rücktransformation auf M

$$\|v - P_M v\|^2_{L^2(M)} \le \|v - \overline{v}_M\|^2_{L^2(M)} \lesssim h_M^2 \|\nabla(v - \overline{v}_M)\|^2_{L^2(M)} = h_M^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(M)}$$

- $$\|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)} \le \sum_k \|P_{M_i} v(z_k) - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)} = \sum_k |T_\ell|^{1/2} |P_{M_i} v(z_k) - P_{M_i} v(z_i)|$$
$$\le \sum_k |T_\ell|^{1/2} h_{T_\ell} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^\infty(T_\ell)} = \sum_k h_{T_\ell} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^2(T_\ell)} \lesssim h_{T_\ell} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^2(T_\ell)}$$

„inverse Ungleichung" HA

- $$\|\nabla P_M v\|_{L^2(T_\ell)} = \|\nabla(P_M v - \overline{v}_M)\|_{L^2(T_\ell)} = \|\nabla P_M(v - \overline{v}_M)\|_{L^2(T_\ell)} \le \|\nabla P_M (v - \overline{v}_M)\|_{L^2(M)} \lesssim \frac{1}{h_M} \|P_M(v - \overline{v}_M)\|_{L^2(M)}$$

$\|P_M\| \le 1$
$$\le \|v - \overline{v}_M\|_{L^2(M)} / h_M \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(M)}$$

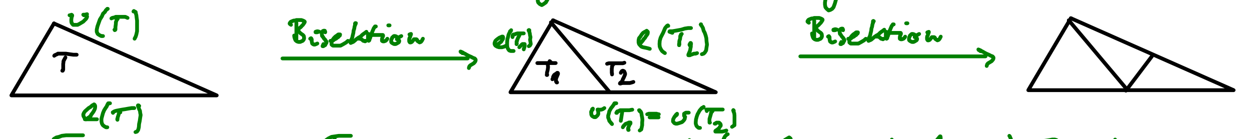
- $$\|\nabla(v - \mathcal{I}_h v)\|_{L^2(T_\ell)} = \Big\|\sum_i (\nabla v)\psi_i + (v - P_{M_i} v(z_i))\nabla\psi_i\Big\|_{L^2(T_\ell)} \lesssim \sum_i \|\nabla v\|_{L^2(T_\ell)} + \|v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_\ell)} / h_{T_\ell}$$
$$\lesssim \sum_i \|\nabla v\|_{L^2(M_i)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T_\ell))} \qquad \square$$

Adaptivität: Verfeinerungsstrategie

Def: · Für ein Dreieck T sei $v(T)$ die jüngste Ecke & $e(T)$ die Kante gegenüber

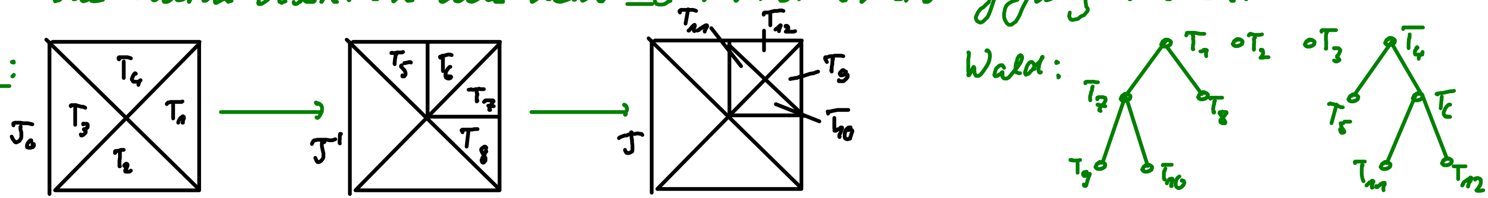
· Die Bisektion teilt T entlang der Verbindungslinie von $v(T)$ zur Mitte von $e(T)$

Bsp:



Def: Die Triangulierung $\mathcal{T}$ gehe aus $\mathcal{T}_0$ durch (ggfs. mehrfache) Bisektion von Dreiecken hervor. Der zu $\mathcal{T}$ gehörende Wald ist ein gerichteter Graph aus Bäumen, deren Knoten Dreiecken entsprechen, deren Wurzeln die Dreiecke von $\mathcal{T}_0$ sind, deren Blätter die Dreiecke von $\mathcal{T}$ sind, deren innere Knoten genau zwei Kinder haben, die durch Bisektion aus dem Elternknoten hervorgegangen sind.

Bsp:



Bem: Jede Familie aus Bäumen, deren Wurzeln die Dreiecke von $\mathcal{T}_0$ sind und deren innere Knoten genau zwei Kinder haben, entspricht eindeutig einer Triangulierung $\mathcal{T}$, die aus $\mathcal{T}_0$ durch (ggfs. mehrfache) Bisektion entstanden ist.

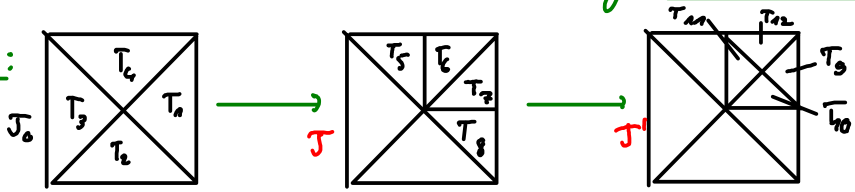
Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

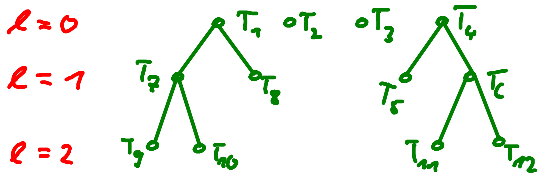
Adaptivität: Verfeinerungsstrategie Forts.

Def: · Der <u>Level</u> (die Generation) $\ell(T)$ von $T \in \mathcal{T}$ ist die Entfernung von T zur Wurzel (= Anzahl nötiger Bisektionen, um T aus $\mathcal{T}_0$ zu erhalten).

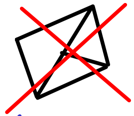
· Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ die zu $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ gehörenden Wälder. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, heißt $\mathcal{T}'$ <u>Verfeinerung</u> von $\mathcal{T}$. $\mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$ ist die Menge <u>verfeinerter Elemente</u>.

Bsp:





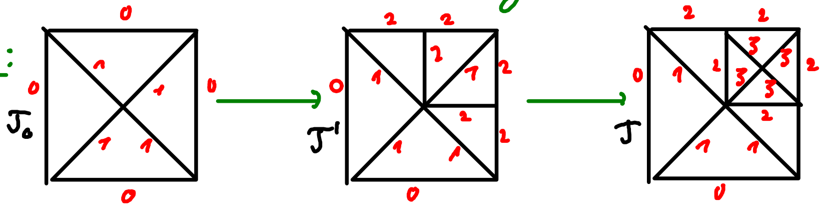
Wir werden nur so verfeinern, dass keine <u>hängenden Knoten</u> auftreten.



Anstelle sich für jedes Dreieck T die Kante $e(T)$ zu merken, kann man die Kanten numerieren.

Def: Sei $T \in \mathcal{T}$. Die <u>Numerierung</u> der Kanten $e \in \partial T$ ist
$$\ell(e) = \begin{cases} \ell(T) & \text{falls } e = e(T) \\ \ell(T)+1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bsp:



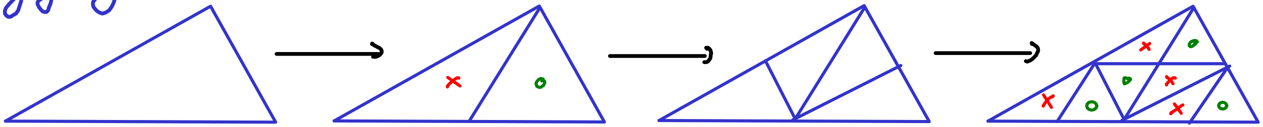
Numerierung sagt, welche Kante als nächstes geteilt werden muss

Adaptivität: Eigenschaften der Bisektionsmethode

Thm: Es gibt ein $\rho > 0$, sodass die durch Bisektion aus $\mathcal{T}_0$ gewonnenen Triangulierungen alle $\frac{1}{\rho}$-quasiuniform sind.

Bew: 1) Sei $T \in \mathcal{T}$ mit $\ell(T) \geq 3$. Dann ist T ähnlich zu einem Dreieck T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$:

Es reicht zu zeigen, dass alle aus einem Dreieck T'' durch dreimalige Bisektion hervorgegangenen Dreiecke T ähnlich zu einem T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$ sind.



2) $\Rightarrow$ Alle Dreiecke sind ähnlich zu einem aus $\mathcal{T}_0$ mittels höchstens zwei Bisektionen hervorgegangenen. Dies sind endlich viele und daher $\frac{1}{\rho}$-quasiuniform für ein $\rho > 0$. $\square$

Thm: Es gibt $D_2 > D_1 > 0$ abhängig von $\mathcal{T}_0$, sodass für alle durch Bisektion aus $\mathcal{T}_0$ gewonnenen Dreiecke T gilt
$$D_1 2^{-\ell(T)/2} \leq h_T \leq D_2 2^{-\ell(T)/2}.$$

Bew: Jedes Dreieck T mit $\ell(T) \geq 3$ ist ähnlich zu einem T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$ & $h_{T'} = 2 h_T$.

$\Rightarrow$ Es reicht, die Behauptung für $\ell(T) \leq 2$ zu zeigen.

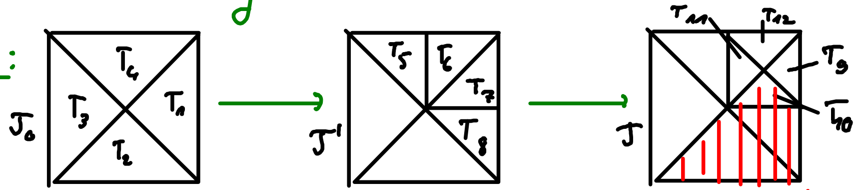
Dort gilt sie mit $D_{1/2} = \begin{smallmatrix} \min \\ \max \end{smallmatrix} \{ h_T 2^{\ell(T)/2} \mid \ell(T) \leq 2 \}$ $\square$

Adaptivität: Verfeinerungsprozedur

Def: · Für $T\in\mathcal{T}$ sei $F(T)$ dasjenige Nachbardreieck mit $\overline{F(T)}\cap\overline{T} = e(T)$ ($F(T)=\emptyset$, falls $e(T)\in\partial\Omega$).

· Eine Kette $\mathcal{C}(T)$ mit Startelement $T\in\mathcal{T}$ ist eine Folge $\left(T, F(T), F(F(T)),\dots, F^m(T)\right)$ ohne Wiederholung von Elementen und mit $F^{m+1}(T)=\emptyset$ oder $F^{m+1}(T)\in\mathcal{C}(T)$.

Bsp:

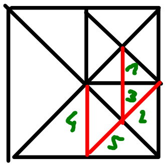


$\mathcal{C}(T_9) = \{T_9\}$

$\mathcal{C}(T_{10}) = \{T_{10}, T_8, T_2\}$

wird T_{10} verfeinert, müssen alle Dreiecke aus $\mathcal{C}(T_{10})$ verfeinert werden, um hängende Knoten zu vermeiden.

Alg: refine(T); geg: $\mathcal{C}(T) = (T, T^1, \dots, T^m)$



Bisektion von T^1

for $i = 1$ to $m-1$

 $2\times$ Bisektion von T^i

Bisektion von T^m

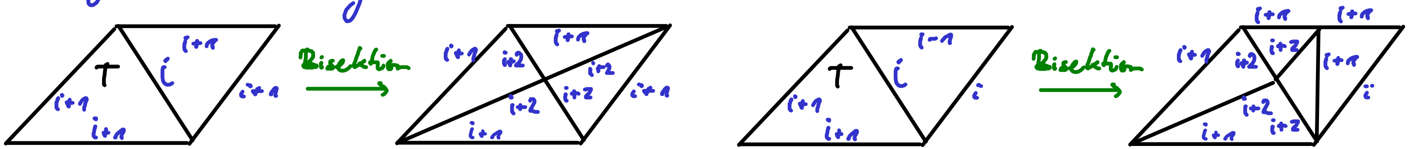
if $F(T^m) \neq T^{m-1}$

 Bisektion von T^m

Adaptivität: Verfeinerungsprozedur Forts.

Thm: Während refine(T) erhalten mehrere Kanten eine neue Numerierung. Dabei ist die Numerierung eindeutig, unabhängig von beiden angrenzenden Dreiecken.

Bew: Bei jeder Bisektion gibt es zwei Fälle:



$\square$

Kor: Für $T \in \mathcal{T}$, $T' = F(T)$ gilt entweder (a) $\ell(T) = \ell(T')$ und die Bisektion von T & T' ist kompatibel oder (b) $\ell(T') = \ell(T) - 1$ und die Bisektion von T ist kompatibel mit der linken Kindes von T'.

- $\mathcal{E}(T)$ enthält höchstens $\ell(T) + 2$ Elemente
- Ist T' durch refine(T) entstanden, gilt $\ell(T') \leq \ell(T) + 1$
- Ist T' durch refine(T) entstanden, gilt $\operatorname{dist}(T, T') \leq D_2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} 2^{-\frac{\ell(T')}{2}}$

Thm: Es gibt $\Lambda > 0$ abhängig von $\mathcal{T}_0$, sodass die Anzahl $\#\mathcal{T}_n$ an Elementen in $\mathcal{T}_n$ erfüllt $\#\mathcal{T}_n - \#\mathcal{T}_0 \leq \Lambda n$, wobei $\mathcal{T}_n$ aus $\mathcal{T}_0$ durch n-maliges Anwenden von refine entstand.

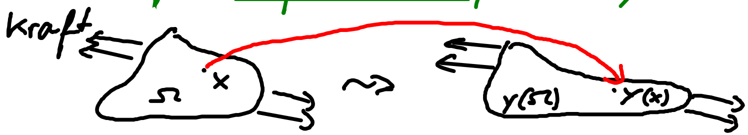
Bew: technisch/kompliziert (Binev-Dahmen-De Vore, Stevenson) $\square$

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Elastizität

Ein klassisches Beispiel einer nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung ist die Beschreibung der Verformung elastischer Festkörper.

Def: · Der Festkörper im undeformierten, spannungsfreien Zustand nehme ein ausreichend glattes, offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein; dieses nennt man Referenzkonfiguration.

· Die neue Position eines Punktes $x \in \Omega$ nach der Verformung wird mit $y(x)$ bezeichnet. $y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt Deformation, $F = Dy : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ heißt Deformationsgradient.



· Die Koordinaten $x \in \Omega$ nennt man Lagrange-Koordinaten, d.h. jede betrachtete Größe (Materialdichte, elastische Kräfte etc.) an einer Stelle $y(x)$ im deformierten Material wird als Funktion der ursprünglichen Position x der Materialstelle dargestellt (die Darstellung als Funktion der neuen Position $y(x)$ heißt Darstellung in Euler-Koordinaten).

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Energiedichte

Def: · Ein Material heißt <u>hyperelastisch</u>, wenn die gesamte zur Materialverformung aufgewandte Arbeit in Form mechanischer potentieller Energie im Material gespeichert wird und die <u>Energiedichte</u> an Stelle x nur von x und $F(x)$ abhängt.

· Die <u>gespeicherte Energie</u> hat daher die Form $\int_\Omega W(x,F(x))\,dx$ mit der gespeicherte <u>Energiedichtefunktion</u> $W: \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$

· W heißt
- <u>homogen</u>, wenn $W(x,F) = W(F) \quad \forall x \in \Omega,\ F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- <u>orientierungserhaltend</u>, wenn $W(x,F) = \infty$ für $\det F \leq 0$
- <u>isotrop</u>, wenn $W(x,F) = W(x,FR) \quad \forall R \in SO(3)$

  d.h. Material ist in alle Richtungen gleich steif

  erst rotieren, dann dehnen
- <u>Starrkörper-Bewegungs-invariant</u>, wenn $W(x,I) = 0$ & $W(x,RF) = W(x,F) \quad \forall R \in SO(3)$

  d.h. rigide Rotationen / Translationen kosten keine Energie

  erst dehnen, dann rotieren
- <u>von p-Wachstum</u>, falls $\exists\, C > 0 : W(x,F) \geq C\,|F|^p - C$

Im Folgenden habe W all diese Eigenschaften.

Bsp: $W(F) = a\,|F|^p + b \det F^{-q}$

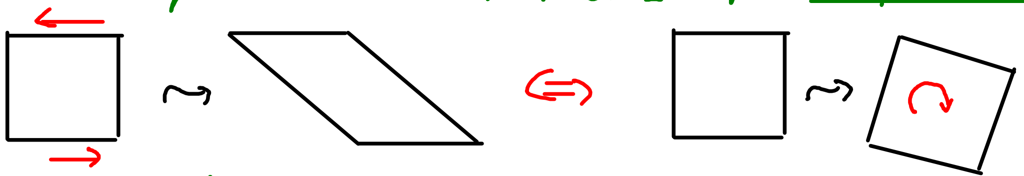
$\operatorname{cof} A = \det A \, A^{-T}$

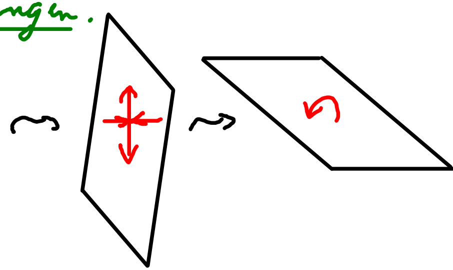
Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Hauptstreckungen

Bem: Mittels erster Ordnung Taylorentwicklung lässt sich jede Deformation y um einen Punkt x als affine Transformation $y(z) \approx y(x) + F(x)(z-x)$ schreiben. $|Fv|$ beschreibt die neue Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ nach Deformation, $|\operatorname{cof} F n|$ die Flächenvergrößerung der Ebene mit Normale n, $\det F$ die Volumenänderung.

Def: Sei $F(x) = U \Sigma V$ die Singulärwertzerlegung, dann ist $y(z) \simeq y(x) - F(x)\,x + U\Sigma V z$ eine Rotation V, anschließende Streckung / Stauchung entlang der Koordinatenachsen um die Singulärwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, anschließende Rotation U und anschließende Translation. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen Hauptstreckungen.

Bsp:





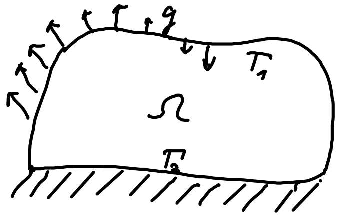
Thm: $W(x,F) = \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für ein $\hat{W} : [0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$

Bew: $W(x,F) = W(x, U^T F V^T) = W(x, \Sigma) = W(\Sigma)$ $\square$

D.h. gespeicherte Energie hängt nur von den Hauptstreckungen ab!

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Variationsproblem

Die Referenzkonfiguration Ω habe Lipschitz-Rand, an $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ mit positivem Maß sei der Körper befestigt, an $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_2$ greife eine Kraftdichte (Spannung = Kraft pro Fläche) $g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ an.



falls dies nicht gilt, setze $E[y] = \infty$

Die freie Energie einer Deformation y mit $y|_{\Gamma_2} = id|_{\Gamma_2}$ ist $E[y] = \int_\Omega W(Dy(x))\,dx - \int_{\Gamma_1} y(x)\cdot g(x)\,dx$

Die sich einstellende Deformation ist ein Minimierer der freien Energie.

<u>Minimierungsproblem</u>: $\min \{ E[y] \mid y|_{\Gamma_2} = id|_{\Gamma_2} \}$ ← natürlichste Form elliptischer Probleme

<u>Schwache Formulierung</u>: $y \in W^{1,p}(\Omega)$ erfüllt $y|_{\Gamma_2} = id|_{\Gamma_2}$ &

$A:B = tr(A^T B)$ — $\int_\Omega DW(Dy) : D\phi\,dx - \int_{\Gamma_1} \phi \cdot g\,dx = 0 \quad \forall \phi \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\phi|_{\Gamma_2} = 0$

<u>Starke Formulierung</u>: y erfüllt $\operatorname{div}(\underbrace{DW(Dy)}) = 0$ in Ω — Erhaltungsgleich. für lineares Moment

zeilenweise Divergenz

$y(x) = x$ auf Γ_2

1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$DW(Dy)\cdot n = g$ auf Γ_1

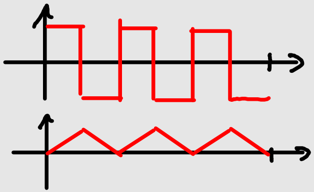
Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - schwache Konvergenz

<u>Def:</u> Seien X, X^* normierter Vektorraum und Dualraum, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X^*$.

- x_i <u>konvergiert schwach</u> gegen $x \in X$ $(x_i \longrightarrow x)$, falls $\langle x_i, y\rangle_{X,X^*} \xrightarrow[i\to\infty]{} \langle x, y\rangle \; \forall y \in X^*$
- y_i <u>konvergiert schwach-*</u> gegen $y \in X^*$ $(y_i \xrightarrow{*} y)$, falls $\langle x, y_i\rangle_{X,X^*} \xrightarrow[i\to\infty]{} \langle x, y\rangle \; \forall x \in X$
- X heißt <u>reflexiv</u>, falls $(X^*)^*$ zu X isometrisch isomorph ist
- X heißt <u>separabel</u>, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

<u>Bsp:</u>

- $L^p(\Omega)$ ist reflexiv & separabel für $p \in (1,\infty)$ $\left((L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p \text{ für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$
- $W^{m,p}(\Omega)$ ist reflexiv & separabel für $p \in (1,\infty)$
- $x_i = \operatorname{sgn} \circ \sin(i\,\cdot) \longrightarrow 0$ in $L^p((0,1))$
- $\tilde{x}_i = \int x_i \, dt \longrightarrow 0$ in $W^{1,p}(0,1)$



<u>Thm:</u>

- $x_i \longrightarrow x \implies x_i \longrightarrow x$
- $x_i \longrightarrow x \implies \{x_i\}$ ist beschränkt
- $f_i \longrightarrow f$ in $W^{1,p}(\Omega)$, $p > \dim(\Omega) \implies f_i \longrightarrow f$ in $C^0(\overline{\Omega})$ für Teilfolge

„Sobolev-Einbettung“

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Lax-Milgram-Ersatz

<u>Thm</u>: (Banach-Alaoglu) Sei $A \subset X^*$ eine beschränkte Teilmenge des Dualraums eines separablen normierten Vektorraums X, dann enthält A eine schwach-$*$-konvergente Folge.

<u>Kor</u>: Sei X reflexiv & X^* separabel, $A \subset X$ beschränkt. A enthält eine schwach konvergente Folge.

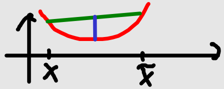
<u>Thm</u>: (Ball) Sei $f_n \longrightarrow f$ in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ mit $p > 3$. Dann gilt

$$\det Df_n \longrightarrow \det Df \text{ in } L^{p/3}(\Omega) \quad \text{und} \quad \operatorname{cof} Df_n \longrightarrow \operatorname{cof} Df \text{ in } L^{p/2}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}).$$

= Menge der 2x2 Subdeterminanten

<u>Thm</u>: (Mazur) Sei $x_n \longrightarrow x$, dann existiert eine Folge $\tilde{x}_n = \sum_{i=n} a_{in} x_i$ von Konvexkombinationen (d.h. $a_{in} \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{in} = 1$) mit $\tilde{x}_n \longrightarrow x$.

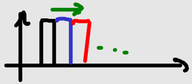
<u>Thm</u>: (Jensen) Sei $f: X \to \mathbb{R}$ konvex (d.h. $f\left(\frac{x+\tilde{x}}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(\tilde{x})}{2}$ $\forall x, \tilde{x} \in X$



) und $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ eine Konvexkombination, dann ist $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$.

<u>Thm</u>: Sei $f_n \longrightarrow f$ in $L^1(\Omega)$, dann existiert eine Teilfolge $f_{n_i} \longrightarrow f$ punktweise fast überall.

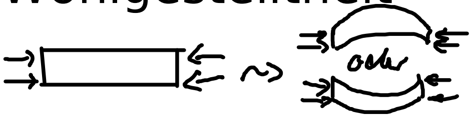
<u>Bem</u>: Teilfolge ist wichtig! $f_n^k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; $f_1 = f_1^0, f_2 = f_2^0, f_3 = f_2^1, f_4 = f_3^0, \ldots \xrightarrow{L^1} 0$, aber nicht punktweise f.ü.



<u>Thm</u>: (Fatou) Sei $f_n \ge 0$, dann ist $\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx$

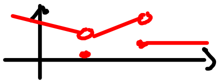
Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Wohlgestelltheit

Bem: I. A. ist eine Lösung nicht eindeutig, z.B.



Def: W heißt polykonvex, wenn es sich als konvexe Funktion der Subdeterminanten von F schreiben lässt, $W(F) = \hat{W}(F, \operatorname{cof} F, \det F)$ mit $\hat{W}$ konvex.

· $f : X \to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, falls $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)\ \forall x_n \longrightarrow x$



unterhalbstetig

Annahme: W sei nichtnegativ, unterhalbstetig, polykonvex, von p-Wachstum mit $p>3$.

Thm: $y \mapsto \int_\Omega W(Dy)\,dx$ ist unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$.

Bew: Sei $y_n \longrightarrow y$ in $W^{1,p}(\Omega)$; OBdA sei $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega W(Dy_n)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega W(Dy_n)\,dx$.

sonst betrachte Teilfolge

$$\overset{\text{Ball}}{\Longrightarrow}\ \omega_n := (Dy_n, \operatorname{cof} Dy_n, \det Dy_n) \xrightarrow{L^p \times L^{p/2} \times L^{p/3}} (Dy, \operatorname{cof} Dy, \det Dy) =: \omega$$

$$\overset{\text{Mazur}}{\Longrightarrow}\ \tilde{\omega}_n = \sum_{i=n}^{N_n} a_{in}\, \omega_i \xrightarrow{L^p \times L^{p/2} \times L^{p/3}} \omega \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\omega}_{n_i} \longrightarrow \omega \text{ punktweise f.ü.}$$

$$\int_\Omega W(Dy)\,dx = \int_\Omega \hat{W}(\omega)\,dx \leq \int_\Omega \liminf_{i\to\infty} \hat{W}(\tilde{\omega}_{n_i})\,dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega \hat{W}(\tilde{\omega}_{n_i})\,dx$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=n_i}^{N_{n_i}} a_{jn_i}\, \hat{W}(\omega_j)\,dx = \liminf_{i\to\infty} \sum_{j=n_i}^{N_{n_i}} a_{jn_i} \int_\Omega W(Dy_j)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega W(Dy_n)\,dx \quad \square$$

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Wohlgestelltheit II

Thm: Sei $g \in L^q(\Gamma_1)$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. E besitzt einen Minimierer y mit $y|_{\Gamma_2} = id|_{\Gamma_2}$.

Bew: „Direkte Methode der Variationsrechnung"

0) $E \not\equiv \infty$ und E ist nach unten beschränkt:

$$E[id] < \infty \;\&\; E[y] \geq C\|Dy\|^p_{L^p} - C - \underbrace{\int_{\Gamma_1} g\cdot y\,dx}_{\leq \|g\|_{L^q}\|y|_{\Gamma_1}\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^q}\|y\|_{W^{1,p}}} \overset{\text{Poincaré}}{\geq} \tilde{C}\|y\|^p_{W^{1,p}} - C - \|g\|_{L^q}\|y\|_{W^{1,p}} \quad (*)$$

$$\geq -C - \left(1-\frac{1}{p^{1/(p-1)}}\right)\sqrt[p-1]{\frac{\|g\|^p_{L^q}}{\tilde{C}}}$$

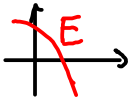
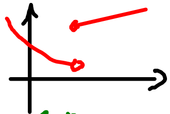
1) Betrachte „Minimalfolge" $y_1, y_2, \ldots$ mit $E[y_n] \longrightarrow \inf_y E[y]$

2) Zeige, dass eine Teilfolge (in einem zu wählenden Sinn) gegen ein y konvergiert:

$$E[y_n] < C \overset{(*)}{\Longrightarrow} \|y_n\|_{W^{1,p}} \text{ ist beschränkt} \Longrightarrow y_{n_i} \longrightarrow y \text{ in } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

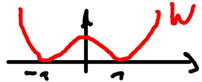
3) Zeige Unterhalbstetigkeit von E bzgl. obiger Konvergenz, sodass $E[y] \leq \liminf_{i\to\infty} E[y_{n_i}] \leq \inf E$

voriges Thm. + $\int_{\Gamma_1} g\cdot y_n\,dx \longrightarrow \int_{\Gamma_1} g\cdot y\,dx$ (Spursatz) □

Bsp: Was kann in direkter Methode schiefgehen? 0)  2)  3) 

Bem: (Poly-)Konvexität ist essentiell! Z.B. ist $y_n(x) = \frac{|nx - \mathrm{round}(nx)|}{n} \xrightarrow{W^{1,p}} 0 \equiv y$

aber $\int_0^1 W(y_n')\,dx = 0 \not\to 1 = \int_0^1 W(y')\,dx$ für $W(a) = (a^2-1)^2$!



Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Diskretisierung

Wie für finit Elemente typisch, wählen wir einen finite-Elemente-Raum X_h und definieren die diskrete Approximation y_h an $y \in \operatorname{argmin} E$ als $y_h \in \operatorname{argmin}_{X_h} E$.

Im Folgenden benutzen wir Lagrange-Elemente 1. Ordnung.

Thm: E besitzt in X_h einen Minimierer.

Bew: Direkte Methode in X_h; es fehlt nur zu zeigen, dass $y_h \in X_h$, $y_h \xrightarrow{W^{1,p}} y \Rightarrow y \in X_h$.

Dies folgt aus $y_h \longrightarrow y$ in C^0. $\square$

Konvergiert y_h gegen y für $h \to 0$?

Definiere

$$E_h[y] = \begin{cases} E[y] & \text{, falls } y \in X_h \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_h \in \operatorname{argmin} E_h[y]$$

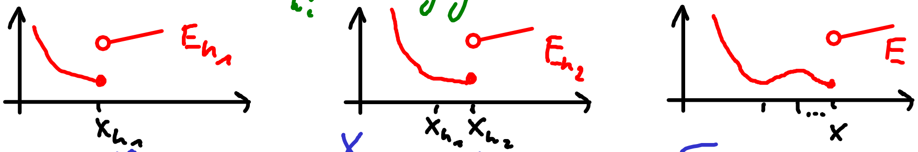
Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Gamma-Konvergenz

<u>Def</u>: Lege auf dem Raum X einen Konvergenzbegriff fest. Ein Funktional $E_h : X \to \mathbb{R}$ <u>Γ-konvergiert</u> gegen $E : X \to \mathbb{R}$ $\left(\Gamma(X)\text{-}\lim_{h\to 0} E_h = E\right)$, wenn $\forall h_i \to 0$

- $\forall\, x_i \xrightarrow[i\to\infty]{X} x$: $\liminf_{i\to\infty} E_{h_i}[x_i] \geq E[x]$ „liminf-Ungleichung"
- $\forall\, x\in X\ \exists\, x_i \xrightarrow{X} x$: $\limsup_{i\to\infty} E_{h_i}[x_i] \leq E[x]$ „limsup-Ungleichung"

- Die Funktionale E_h heißen <u>equikoerziv</u>, falls $\exists\, C \subset X$ folgenkompakt mit $\operatorname{argmin} E_h \subset C\ \forall h$

<u>Thm</u>: Falls $\Gamma(X)\text{-}\lim_{h\to 0} E_h = E$ und die E_h equikoerziv sind, besitzt jede Folge x_{h_i} von Minimierern von E_{h_i} eine gegen einen Minimierer von E konvergierende Teilfolge.



aber keine Konvergenzrate! Diese würde von der Form der Energie im Minimum abhängen (z.B. lokal quadratisch oder quartisch)

Bew: · Equikoerzivität $\Rightarrow x_{h_i} \xrightarrow{X} x \in X$ für eine Teilfolge.

- Für alle $\hat{x} \in X$ existiert $x_i \xrightarrow{X} x$ mit

$$E[\hat{x}] \geq \limsup_{i\to\infty} E_{h_i}[x_i] \geq \limsup_{i\to\infty} E_{h_i}[x_{h_i}] \geq \liminf_{i\to\infty} E_{h_i}[x_{h_i}] \geq E[x]$$ □

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Konvergenz

Thm: Sei
- Ω Lipschitz, Γ_1, $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ Lipschitz,
- $W: \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ polykonvex, stetig, von p-Wachstum mit $p > 3$,
- $W(F) \leq C|F|^p + C$ für ein $C > 0$,
- $g \in L^q(\Gamma_1)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$,
- X_h $\frac{1}{\rho}$-quasiuniforme lineare Lagrange-Finite-Element-Raum mit Gitterweite h,
- $E: W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $E[y] = \begin{cases} \int_\Omega W(\nabla y)\,dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot y\,dx, & \text{falls } y|_{\Gamma_2} = id \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

  $E_h: W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $E_h[y] = \begin{cases} E[y], & \text{falls } y \in X_h \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann $\Gamma(\text{schwache Konvergenz in } W^{1,p}(\Omega))$-$\lim\limits_{h\to 0} E_h = E$.

Kor: Jede Folge $y_{h_i} \in \operatorname{argmin} E_{h_i}$, $h_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, enthält eine Teilfolge $y_{h_{i_n}} \xrightarrow[h\to\infty]{W^{1,p}} y \in \operatorname{argmin} E$.

Bew: $E[id] \geq E_{h_i}[y_{h_i}] = E[y_{h_i}] \overset{(*)}{\Longrightarrow} \|y_{h_i}\|_{W^{1,p}}$ ist uniform beschränkt

$\Rightarrow E_{h_i}$ ist equikoerziv bzgl. schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Konvergenzbeweis

Bew: Sei $h_i \longrightarrow 0$.

<u>liminf-Ungl</u>: Sei y_i Folge mit $y_i \xrightarrow{W^{1,p}} y$, dann folgt aus der Unterhalbstetigkeit von E: $\quad E[y] \leq \liminf_{i\to\infty} E[y_i] \leq \liminf_{i\to\infty} E_{h_i}[y_i]$

<u>limsup-Ungl</u>: Sei $y \in W^{1,p}(\Omega)$ gegeben.

- $W^{2,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, y^n \in W^{2,p}(\Omega)$ mit $\|y^n - y\|_{W^{1,p}} \leq \frac{1}{n}$.
- Setze $y_i^n = I_{h_i} y^n \Rightarrow \|y_i^n - y\|_{W^{1,p}} \leq \|y_i^n - y^n\|_{W^{1,p}} + \|y^n - y\|_{W^{1,p}} \leq C h_i \|y^n\|_{W^{2,p}} + \frac{1}{n}$
- Sei i_n so, dass $C h_{i_n} \|y^n\|_{W^{2,p}} \leq \frac{1}{n}$ und definiere die Folge $y_i \in X_{h_i}$, $i \in \mathbb{N}$, durch $(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{i_2}^1, y_{i_2}^2, y_{i_2+1}^2, \ldots, y_{i_3-1}^2, y_{i_3}^3, y_{i_3+1}^3, \ldots)$
- $y_i \xrightarrow{W^{1,p}} y$ (also auch $y_i \longrightarrow y$), da $\|y_i - y\|_{W^{1,p}} \leq \frac{2}{n}$ für alle y_i nach $y_{i_n}^n$
- wähle Teilfolge y_{i_k} sodass $\lim_{n\to\infty} E_{h_{i_k}}[y_{i_k}] = \limsup_{i\to\infty} E_{h_i}[y_i]$ und sodass $Dy_{i_k} \longrightarrow Dy$ punktweise f.ü.
- noch zu zeigen: $\lim_{k\to\infty} E_{h_{i_k}}[y_{i_k}] \leq E[y]$

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl. - Konvergenzbeweis Forts

Es ist · $W(Dy_{i_k}) \longrightarrow W(Dy)$ punktweise f.ü.

· $C|Dy_{i_k}|^p + C \xrightarrow{L^1} C|Dy|^p + C$, da

$y_{i_k} \to y$ in $W^{1,p}$

$$\int_\Omega \Big| C|Dy_{i_k}|^p + C - C|Dy|^p - C \Big| \, dx = C\int_\Omega \Big| |Dy_{i_k}|^p - |Dy|^p \Big| \, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

· $\int_\Omega W(Dy_{i_k})\,dx \longrightarrow \int_\Omega W(Dy)\,dx$ nach Lebesgues Konvergenzsatz

· $\int_{\Gamma_1} g\cdot y_{i_k}\,dx \longrightarrow \int_{\Gamma_1} g\cdot y\,dx$, da $y_{i_k}|_{\Gamma_1} \xrightarrow{L^p} y|_{\Gamma_1}$

$\Rightarrow \quad E_{h_{i_k}}[y_{i_k}] \longrightarrow E[y]$ $\square$