# Übungen zur Vorlesung Optimale Steuerprozesse I

Übungsblatt 8, Abgabe: Dienstag, 17.06.2008, 08.15 Uhr

---

**Aufgabe 27:** (2+4+4 Punkte)
*(Kriterium für vollständige Steuerbarkeit nichtautonomer linearer Steuerprozesse)*

Gegeben sei der nichtautonome Steuerprozess

$$(L) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Die $(n \times n)$–Matrix $A(t)$ sei $(k-1)$–mal differenzierbar und die $(n \times m)$–Matrix $B(t)$ sei $(k-2)$–mal differenzierbar für $t \geq t_0$ mit $k \geq 2$. Induktiv werden $(n \times m)$–Matrizen $M_j(t)$ definiert durch $M_0(t) = B(t)$ und

$$M_{j+1}(t) = -A(t)M_j(t) + \dot{M}_j(t)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-2\,.$$

(a) Für eine Fundamentallösung $\phi(t)$ von $\dot{x} = A(t)\,x$ zeige man induktiv

$$\frac{d^j}{dt^j}\left(\phi(t)^{-1}B(t)\right) = \phi^{-1}(t)M_j(t)\,, \quad j = 0, \ldots, k-1\,.$$

(b) Zeigen Sie: Wenn es eine Zahl $k \geq 2$ gibt, so dass für alle $t_1 > t_0$ ein $t \in [t_0, t_1)$ existiert mit

$$\operatorname{rang}\left[M_0(t), M_1(t), \ldots, M_{k-1}(t)\right] = n\,,$$

dann ist $(L)$ vollständig steuerbar. Welches Kriterium erhält man hieraus für autonome Systeme?

(c) Prüfen Sie nach, dass das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} u$$

vollständig steuerbar in $t_0 = 0$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie (b) und berechnen Sie $M_j(0)\,, \quad j = 0, 1, 2, 3$.

**Aufgabe 28:** (5 Punkte)
Gegeben sei der skalare lineare Steuerprozess

$$\begin{array}{rcll} \dot{x} + ax & = & u(t) & , \quad x(0) = x_0\,, \quad (a \in \mathbb{R})\,, \\ |u(t)| & \leq & c & , \quad 0 \leq t \leq T\,, \quad (c > 0)\,. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie für $a \geq 0$ und $a < 0$ alle nach Null steuerbaren (d.h. $x(T) = 0$) Anfangszustände $x_0$.

(b) Berechnen Sie die zeitoptimale Steuerung mit $x(T) = 0$ und die zugehörige optimale Endzeit $T$.

**Aufgabe 29:** (4 Punkte)
Der lineare Steuerprozess

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

sei normal. Zeigen Sie, dass jede zeitoptimale Steuerung mit

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & x_0\,, \quad x(T) = x_1\,, \\ u(t) & \in & U_c = [-1,1]^m\,, \qquad 0 \le t \le T\,, \end{array}$$

eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Beweis indirekt: Betrachten Sie eine Konvexkombination zeitoptimaler Steuerungen.

**Aufgabe 30:** (4 Punkte)
Man betrachte ein erdölexportierendes Land, dessen Ölreserven mit $x$ bezeichnet werden. Ferner bezeichne $y$ das investierte Kapital, also etwa die Anzahl der Bohrtürme. Jeder Bohrturm fördert pro Zeiteinheit $c$ Barrel Rohöl. Das Kapital kann mit der Maximalrate $b > 0$ gekauft bzw. mit der Maximalrate $a > 0$ verkauft werden. Ziel des Landes ist es, die Erdöllager möglichst rasch auszubeuten, wobei am Ende kein Produktivkapital mehr vorhanden sein soll. Das Modell lautet also:

Minimiere die Endzeit $T$ unter

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -cy\,, \qquad \dot{y} = u\,, \\ x(0) & = & x_0 > 0\,, \quad y(0) = y_0 > 0\,, \quad x(T) = y(T) = 0\,, \\ -a & \le & u(t) \;\le\; b\,. \end{array}$$

Diskutieren Sie die Struktur der optimalen Steuerung, indem Sie das Modell auf das Beispiel der zeitoptimalen Steuerung eines Wagens zurückführen, und berechnen Sie die optimale Endzeit $T^*$ in Abhängigkeit vom Schaltpunkt $t_s$. Für welche Anfangsbedingung $(x_0, y_0)$ ist die (sinnvolle) Forderung $x(t) \ge 0$ verletzt? Existiert eine optimale Steuerung für diese Anfangsbedingungen, wenn $x(t) \ge 0$, $0 \le t \le T$, gefordert wird?