Übungen zur Vorlesung Praktische Einführung in die Numerik

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 30. Juni 2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Di.	10 - 12 Uhr	SR1B	Leoni Hoffboll	BK 120
Gruppe 2:	Di.	10 - 12 Uhr	SRZ216	Adrian Chaluppka	BK 126
Gruppe 3:	Di.	16 - 18 Uhr	SR1B	Adrian Chaluppka	BK 130

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 + 5x - 6$$

im Intervall $I = [0, 2]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

1. Formulieren Sie das Problem geeignet (!) in ein Fixpunktproblem um, d.h. als $g(\bar{x}) = \bar{x}$. Zeigen Sie, dass g eine Selbstabbildung und Kontraktion auf I ist (nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert dann genau ein Fixpunkt von g, bzw. genau eine Nullstelle von f).
2. Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis nach zwei Iterationen mit dem Fixpunkt $\bar{x} = 1$.
3. Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche von f auf und geben Sie die Iterationsvorschrift explizit an. Vereinfachen Sie das Verfahren so weit wie möglich.
4. Führen Sie zwei Iterationen des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 0$ durch.
5. Vergleichen Sie den Fehler des Fixpunktverfahrens mit dem des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Gesucht sei eine Nullstelle $\overline{x}$ der Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$. Leiten Sie eine Alternative zum Newton–Verfahren her. Statt der Tangente an die Funktion f im Punkt $(x_k, f(x_k))$ benutzen Sie für ein fest gewähltes $h > 0$ die Sekante durch die Punkte $(x_k, f(x_k))$ und $(x_k + h, f(x_k + h))$.

1. Geben Sie die Iterationsvorschrift an.
2. Zeigen Sie: Falls $f'(\overline{x}) \neq 0$, so konvergiert das Verfahren gegen $\overline{x}$, falls x_0 nahe genug an $\overline{x}$ liegt und h klein genug ist.
   Hinweis: Schreiben Sie wie in der Vorlesung die Iteration als Fixpunktiteration für ein geeignetes g und zeigen Sie $|g'(\overline{x})| < 1$, falls h klein genug ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es sei $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und

$$I = [a, a + \epsilon],\ I' = [y_0 - \delta, y_0 + \delta].$$

Wir betrachten $V = (C^0(I), ||\cdot||_\infty)$, also den Raum der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumnorm. Weiter sei $f : I \times I' \mapsto \mathbb{R}$ stetig und $M = ||f||_\infty$. f sei Lipschitz–stetig, d.h. es gelte

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall t \in I,\, x, y \in I'.$$

ϵ sei so klein gewählt, dass

$$\epsilon \leq \frac{1/2}{L},\, \epsilon \leq \frac{\delta}{M}.$$

1. Wir definieren

   $$D := \{y \in V : y(x) \in I' \;\forall x \in I\}$$

   und

   $$g : D \to V,\; (g(y))(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s))ds.$$

   Zeigen Sie: g erfüllt alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach, d.h. es gibt genau ein y mit $g(y) = y$.

2. Durch Differenzieren nach t sieht man sofort: Dieses y erfüllt die Differentialgleichung

   $$y'(t) = f(t, y(t)),\; y(a) = y_0.$$

   Es gilt also: Wir können diese Differentialgleichung lösen, indem wir eine Fixpunktiteration durchführen. Tun Sie dies explizit für $f(t,y) := y$, $a := 0$, $y_0 := 1$, $y^{(0)}(t) := 1$, und zeigen Sie, dass die Iteration tatsächlich gegen eine Lösung der Differentialgleichung

   $$y'(t) = y(t)$$

   konvergiert.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Bei der Bahnbestimmung von Planeten ist die "KEPLERsche Gleichung" zu lösen:
Gesucht wird die "exzentrische Anomalie" $\overline{x}$ als Lösung der Gleichung

$$x = g(x) = e\sin(x) + \frac{2\pi}{u}t\;.$$

Dabei ist u die Umlaufzeit, t die seit dem Periheldurchgang vergangene Zeit in Tagen und e die numerische Exzentrizität der Bahnellipse.
Für die realistischen Werte $e = 0.1$ und $\frac{2\pi t}{u} = 0.85$ und $x_0 = 0.85$ berechne man die ersten 3 Iterationen zur Lösung obiger Gleichung mit Hilfe

a) der Fixpunktiteration,

b) des Newton-Verfahrens.

Geben Sie für die Fixpunktiteration die a priori– und die a posteriori– Abschätzung für den Fehler an. Geben Sie für das Newton–Verfahren den tatsächlichen Fehler an (Zum Vergleich: $\overline{x} \approx 0.9301722932$).