Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 8** **01.06.2011**

Aufgabe 1 *Verschränkte- und separable Zustände*

Auf dem letzten Übungsblatt wurde gezeigt, dass der Grundzustand des gekoppelten quantenmechanischen Pendels in Orstdarstellung durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(x_1, x_2) = \mathcal{N} \exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{m\omega_0}{\hbar}(1+\sqrt{1+4g})(x_1^2+x_2^2)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{m\omega_0}{\hbar}x_1 x_2(1-\sqrt{1+4g})\right\}$$

beschrieben wird. Nehmen Sie nun an, dass durch eine Orstmessung am Pendel, welches durch die Variable x_1 beschrieben wird, der Ort $x_1^{'}$ gemessen wird.

a) Berechnen Sie den Zustand des Gesamtsystems in Ortsdarstellung nach der Messung, wenn vor der Messung das System

i) durch einen separablen Zustand $\psi_0(x_1, x_2)$ (für $g = 0$) und

ii) durch einen verschränkten Zustand $\psi_0(x_1, x_1)$ (für $g \neq 0$) beschrieben wird.

(1 Punkt)

b) Skizzieren Sie für **i)** und **ii)** jeweils die Wahrscheinlichkeitsdichte, die nach der Messung das Pendel beschreibt, welches durch die Koordinate x_2 beschrieben wird und diskutieren Sie die Unterschiede. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Drehimpulsoperatoren und Kommutatoren*

Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm], \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_z], \quad [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm]$$

für die in der Vorlesung eingeführten Operatoren. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Der quantenmechanische Kreisel*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, welches in einem festen Abstand r um einen Punkt rotiert. Das System wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2mr^2}$$

beschrieben, wobei $\hat{\vec{L}}$ der Drehimpulsoperator ist. Da der Radius fest ist, ist die Wellenfunktion des Teilchen $\psi(\theta, \varphi)$ nur von den Polarwinkeln $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ abhängig.

a) Welche Energien können gemessen werden und wie sehen die Energieeigenzustände aus? Skizzieren Sie zudem die Energieniveaus mit den zugehörigen Energien und geben sie den Entartungsgrad und die Energiedifferenz für benachbarte Energieniveaus an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Mittelwerte $\left\langle \hat{\vec{L}}^2 \right\rangle$, $\left\langle \hat{L}_z \right\rangle$, $\left\langle \hat{L}_x \right\rangle$ für

i) die Energieeigenzustände $|l = 1, m = -1\rangle$, $|l = 1, m = 1\rangle$, $|l = 2, m = 0\rangle$ und den

ii) Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|l = 1, m = 1\rangle + |l = 1, m = -1\rangle)$.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(0 \leq \theta \leq \pi/4;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ das Teilchen im Raumbereich $0 \leq \theta \leq \pi/4;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zu finden, wenn es entweder im Energieeigenzustand $|l = 1, m = 0\rangle$ oder $|l = 2, m = -2\rangle$ präpariert wurde. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}$ für den Fall, dass sich das Teilchen im Energieeigenzustand $|l = 1, m = 1\rangle$ befindet und diskutieren Sie ihr Ergebnis. *(1 Punkt)*