Lösungshinweise zu den Aufgaben aus Kapitel 5

Hinweis zu Aufgabe 5.1. Im Folgenden sei für jedes der betrachteten Iterationsverfahren aus (5.20)–(5.21) die jeweilige Iterationsfunktion mit Φ bezeichnet. Für die Verfahren in (5.20) hat man $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$ nachzuprüfen. Für ein Verfahren zweiter Ordnung ist $\Phi'(x^*) = 0$ erforderlich. Man überlege sich für das erste Verfahren in (5.21) noch, ob der sich ergebende Wert für a ein praktikables Verfahren liefert. Für das zweite Verfahren in (5.21) bestimme man eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von einfacher Form, so dass sich für die ergebende Funktion $\Phi(x) = \frac{g(x)x + e^{-x}}{g(x)+1}$ Folgendes gilt: $\Phi(x^*) = x^*$ und $\Phi'(x^*) = 0$. Die Wahl $a_n = g(x_n)$ führt dann zum Ziel. Man beachte allerdings, dass die Werte a_n keine echten Konstanten sind, sondern eben noch von x_n abhängen.

Hinweis zu Aufgabe 5.3. Betrachte auch die fehlerfreie Folge $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ für $n = 0, 1, \ldots$. Startpunkt der Fehleranalyse ist die Abschätzung $(*)$ $\| x_{n+1}^\delta - x^* \| \le \| x_n^\delta - x_n \| + \| x_n - x^* \|$. Für den zweiten Term auf der rechten Seite in $(*)$ existieren bekannte Abschätzungen von der Form $\| x_n - x^* \| \le q_n \| x_1 - x_0 \|$ mit geeigneten Konstanten q_n, und dann schätzt man noch $\| x_1 - x_0 \| \le L\delta + \| x_1^\delta - x_0^\delta \|$ ab mit einer geeigneten Konstanten L. Den ersten Term auf der rechten Seite in $(*)$ schätzt folgendermaßen ab, $\| x_n^\delta - x_n \| \le K \| x_{n-1}^\delta - x_{n-1} \| + \delta$ und erhält so induktiv eine Abschätzung von der Form $\| x_n^\delta - x_n \| \le c\delta$ mit einer geeigneten Konstanten c. Diese sich ergebenden Resultate hat man nur noch geeignet zusammenzutragen.

Hinweis zu Aufgabe 5.4. (a) Man betrachte $\| \Phi((x,y)^\top) - \Phi((\widehat{x}, \widehat{y})^\top) \|_\infty$ mit $x = y = z \in (0, \pi/2)$ und $\widehat{x} = \widehat{y} = 0$. Außerdem zeige man $(*)$ $\| \mathcal{D}_{(x,y)^\top} \Phi \|_2 \le K = (5 + \sqrt{89})/16 < 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Für $(*)$ genügt es aufgrund der Symmetrie der Matrix $\mathcal{D}_{(x,y)^\top}\Phi$, deren Eigenwerte dem Betrag nach abzuschätzen. Auftretende Beträge trigononometrischer Ausdrücke dürfen durch die Zahl Eins abgeschätzt werden

(b) Aus dem banachschen Fixpunktsatz verwende man die a priori und die a posteriori- Fehlerabschätzung, wobei zur Umsetzung der Letzteren numerisch vorzugehen ist.

Hinweis zu Aufgabe 5.8. Man gehe vor wie beim Beweis über das Verhalten des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der größten Nullstelle eines Polynoms.