Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler WS10/11

Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 24: (Doob-Zerlegung) Ein Prozeß $(V_n : n \in \mathbb{N}_0)$ heißt vorhersagbar bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}_0)$ falls V_n $\mathfrak{A}_{n-1}$-meßbar ist.

(a) Zeigen Sie, daß jeder adaptierte Prozeß $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ eindeutig zerlegbar ist in der Form $X_n = M_n + V_n$ mit einem Martingal $(M_n : n \in N_0)$ und einem vorhersagbaren Prozeß $(V_n : n \in \mathbb{N}_0)$ mit $V_0 = 0$. (*Hinweis:* $V_n = \sum_{j=1}^{n} E(X_j - X_{j-1} | \mathfrak{A}_{j-1})$.)

(b) Zeigen Sie, daß jedes Submartingal $(X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ eindeutig zerlegt werden kann in ein Martingal $(M_n : n \in \mathbb{N}_0)$ und einen monoton wachsenden vorhersagbaren Prozeß $(I_n : n \in \mathbb{N}_0)$ mit $I_0 = 0$, so daß $X_n = M_n + I_n$.

Aufgabe 25: Bei einem Spiel gewinnt jeder der beiden Spieler eine Runde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (unabhängig von der anderen) und erhält dann vom Gegenspieler 1 DM. Spieler A startet mit a DM, Spieler B mit b DM und es wird solange gespielt, bis einer pleite ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit daß am Ende A gewinnt. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Stopzeit $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -a \text{ oder } S_n = b\}$ wobei S_n den Gewinn von Spieler A bezeichne; wenden Sie auf $\min(T, n)$ die Stopregel an und lassen Sie n gegen ∞ gehen.)

Abgabe: Donnerstag, den 16.Dezember 2010 in der Vorlesung