Übungen zu Numerik I

WiR AG, Dep. Mathematik, NT-Fakultät, Universität Siegen

Wintersemester 2012/2013 Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das eindimensionale Newton-Verfahren für stetig differenzierbare Funktionen im Falle einfacher Nullstellen mindestens super-linear konvergiert.

Aufgabe 2. Sei F_N die Iterationsfunktion des eindimensionalen Newton-Verfahrens, wenn dieses als Fixpunktiteration zur Lösung einer Gleichung der Form $f(x) = 0$ aufgefasst wird. Dabei sei f eine geeignete Funktion.

Zeigen Sie, dass dann $F_N'(\tilde{x}) = 1 - 1/m$ gilt, wobei $\tilde{x}$ eine Nullstelle von f mit Vielfachheit m sei. Beweisen Sie weiter, dass das Newton-Verfahren dann quadratisch konvergiert falls $m = 1$, und ansonsten nur linear.

Aufgabe 3. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin(x)}{4} + y, 1 + \sin(y) + x\right)^T.$$

(a) Untersuchen Sie die Kontraktionseigenschaften von F jeweils bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$.

(b) Berechnen Sie den Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}^2$ von F mittels sukzessiver Approximation für den Startwert $x_0 := (0,0)^T$ mit dem Computer (Angabe des Ergebnisses ist ausreichend). Wie oft muss iteriert werden, um die Abschätzung $\|x_t - x_*\|_2 \leq 10^{-2}$ zu garantieren. Verwenden Sie sowohl die a priori als auch die a posteriori Fehlerabschätzung, um zu einer Aussage zu gelangen.

Aufgabe 4. (Zusatzaufgabe, Bearbeitung freiwillig)
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$x = (5 + x^2 + y^2)^{-1}, \quad y = (x^2 + y^2)^{1/4}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System lösbar ist.

(b) Mit dem Startwert $(0.2, 1)^T$ führe man jeweils einen Schritt der sukzessiven Approximation und des Newton-Verfahrens durch.

(c) Beweisen Sie die Konvergenz der sukzessiven Approximation für beliebige Startwerte (x_0, y_0) mit $x_0, y_0 \geq 0$.

Schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Hinweis: Abgabetermin ist der 10.01.13 vor der Vorlesung. Die Abgabe in 2er-Gruppen ist erwünscht.