



# Autonome Mobile Systeme

**Teil II: Systemtheorie für Informatiker**

-Skript zur Vorlesung-

Dr. Mohamed Oubbati

Institut für Neuroinformatik  
Universität Ulm  
Albert-Einstein-Allee 11, D-89069 Ulm

Stand: Sommersemester 2007

## Vorwort

Informatiker werden zunehmend mit Systemen konfrontiert, die eine Automatisierung benötigen. Unter Automatisierung (Automation) versteht man die selbstständige Durchführung von Arbeits- und Produktionsprozessen durch Einsatz geeigneter Methoden. Hierzu fehlen Informatikern "häufig" wichtige Grundlagen der Systemtheorie. Das vorliegende Skript soll Informatikstudenten den Einstieg in das Gebiet der Systemtheorie linearer, zeitinvarianter Systeme erleichtern, damit sie später mit Ingenieuren auf einer gemeinsamen begrifflichen Basis arbeiten können.

Inhaltlich umfasst der Umdruck:

- Grundlagen
- Beschreibung dynamischer Systeme
- Laplacetransformation
- Eigenschaften von Übertragungsfunktionen
- Regelkreis und Reglerentwurf

### Literaturhinweise

A.V Oppenheim, A.S Willsky, *Signale und Systeme*, VCH 1989. (Z TK 5101/1989 O)

L. Merz, H. Jaschek, *Grundkurs der Regelungstechnik*, Oldenbourg Verlag 1996. (I, TJ 213 1996 Mb)

H. Mann, H. Schiffelgen, R. Froriep, *Einführung in die Regelungstechnik*, Hauser 1997. (Z, TJ 213/ 1997 M)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Systeme und ihre Eigenschaften</b>	<b>2</b>
1.1	Begriff des Systems . . . . .	2
1.2	Klassifizierung der Systeme . . . . .	3
1.2.1	Klassifizierung anhand der über den Ein- und Ausgangssignalarten . . . . .	3
1.2.2	Klassifizierung anhand der Transformationsgleichungseigenschaften . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Zeitinvariante Systeme</b>	<b>5</b>
2.1	Sprung- und Impulsantwort eines LTI-Systems . . . . .	5
2.1.1	Impulsantwort . . . . .	5
2.1.2	Sprungantwort . . . . .	6
2.1.3	Faltungsintegral . . . . .	7
2.2	Laplace-Transformation . . . . .	8
2.2.1	Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	9
2.2.2	Korrespondenztabelle . . . . .	10
2.2.3	Laplace-Transformation und lineare Differentialgleichungen . . . . .	10
2.3	Die Übertragungsfunktion . . . . .	11
2.4	Zusammenfassung von Übertragungsfunktionen in Blockschaltbildern . . . . .	12
2.5	BIBO-Stabilität . . . . .	14
2.5.1	Definition . . . . .	14
2.5.2	Stabilitätskriterium im Zeitbereich . . . . .	14
2.5.3	Stabilitätskriterium im Bildbereich . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Regelungstechnik</b>	<b>17</b>
3.1	Unterschied Steuerung - Regelung . . . . .	18
3.1.1	Steuerung (Open Loop Control) . . . . .	19

3.1.2	Regelung (Closed Loop Control) . . . . .	20
3.2	Grundsätzlicher Aufbau von Regelkreisen . . . . .	21
3.2.1	Allgemeine Anforderungen an einen Regelkreis . . . . .	21
3.3	Lineare Standard-Regler (PID Regler) . . . . .	23
3.3.1	<i>P</i> -Regler . . . . .	24
3.3.2	<i>I</i> -Regler . . . . .	24
3.3.3	<i>D</i> -Regler . . . . .	25
3.3.4	<i>PI</i> -Regler . . . . .	25
3.3.5	<i>PD</i> -Regler . . . . .	26
3.3.6	<i>PID</i> -Regler . . . . .	26

# Kapitel 1

## Systeme und ihre Eigenschaften

### 1.1 Begriff des Systems

Ein System ist häufig ein kompliziertes technisches Gebilde, das über Ein- und Ausgangssignale mit seiner Umgebung in Wechselwirkung steht.

**Eingangssignale** sind Signale, die von der Umgebung auf das System einwirken.

**Ausgangssignale** sind Signale, mit denen das System seinerseits auf die Umgebung einwirkt.

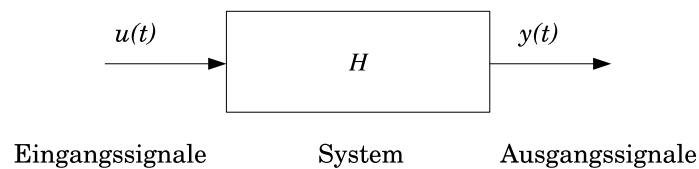


Abbildung 1.1: Begriff des Systems

dabei ist  $H$  die Übertragungsfunktion (en. transfer function), die angibt, wie das Eingangssignal mit der Transformationsvorschrift in das Ausgangssignal transformiert wird:

$$y(t) = H[u(t)] \quad (1.1)$$

Systeme sind einfach beschreibbar, sofern sie eine einfache Übertragungsfunktion besitzen.

## 1.2 Klassifizierung der Systeme

### 1.2.1 Klassifizierung anhand der über den Ein- und Ausgangssignalarten

**kontinuierliche Systeme:**  $u$  und  $y$  werte sind zeitkontinuierlich, d.h. auch, dass das System eine Änderung des Systemzustandes zu jedem beliebigen Zeitpunkt erlaubt, also kontinuierlich.

**zeitdiskrete Systeme:**  $u$  und  $y$  sind wertekontinuierlich, aber zeitdiskret. Diese Systeme erlauben eine Änderung des Systemzustandes nur zu festgelegten Zeitpunkten, häufig in einem festen Takt.

### 1.2.2 Klassifizierung anhand der Transformationsgleichungseigenschaften

**Dynamik:** Ein System  $y(t) = H[u(t)]$  heißt *dynamisch*, wenn seine Ausgangsgröße  $y(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t = \tau > 0$  von zurückliegenden oder zukünftigen Werten seiner Eingangsgröße  $u(t)$  abhängt; ansonsten heißt das System statisch.

**Kausalität:** Ein System  $y(t) = H[u(t)]$  heißt *kausal*, wenn sein Ausgangssignal  $y(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t = \tau > 0$  von den Eingangssignalen  $u(t)$  mit abhängt, d.h. auch, ein Ausgangssignal  $y(t) \neq 0$  erscheint nicht vor Beginn eines Eingangssignals  $u(t) \neq 0$ ; ansonsten heißt das System *nicht kausal*. Die Kausalitätseigenschaft gilt für alle physikalisch realisierbaren Systeme.

**Linearität:** Ein System  $y(t) = H[u(t)]$  wird als linear bezeichnet, wenn es zwei Bedingungen erfüllt:

- Linearität: Bei Vergrößerung des Eingangssignals um den Faktor  $a$ , vergrößert sich auch das Ausgangssignal um den Faktor  $a$ .
- Additivität: Wenn man z.B an den Eingang die Summe mehrere Signale legt, erhält man die Addition der entsprechende einzelnen Ausgangssignale als Ausgangssignal. D.h der Ausgangssignal ist mit Hilfe des Superpositionsgesetzes berechenbar.

$$Y(t) = H \left( \sum_i a_i u_i(t) \right) \quad (1.2)$$

$$Y(t) = \sum_i a_i H(u_i(t)) \quad (1.3)$$

$$Y(t) = \sum_i a_i y_i(t) \quad (1.4)$$

**Zeitinvarianz:** Ein System  $y(t) = H(u(t))$  heißt dann zeitinvariant, wenn das Verschiebungsprinzip für beliebige Zeitverschiebungen  $\Delta t > 0$  und beliebige Eingangsgrößen  $u(t)$  erfüllt ist:

$$y(t) = H(u(t)) \iff y(t - \Delta t) = H(u(t - \Delta t)) \quad (1.5)$$

d.h auch, wenn seine Eigenschaften mit der Zeit sich nicht ändern; ansonsten heißt das System zeitvariant.

**Definition 1** *Die Systeme, die zeitinvariante Parameter besitzen, heißen LTI-Systems "LTI steht für: Linear and Time Invariant".*

# Kapitel 2

## Zeitinvariante Systeme

Systeme, die Linearität und Zeitinvarianz erfüllen, werden auch kurz als LTI-Systeme “LTI steht für: linear and time invariant” bezeichnet. In der Praxis sind allerdings Systeme in der Regel nichtlinear und zeitvariant. Vielfach befindet sich aber zumindestens ein Teilbereich, in dem das System linear ist und die Analyse der LTI-Systeme angewendet werden kann.

### 2.1 Sprung- und Impulsantwort eines LTI-Systems

Das Verhalten von LTI-Systemen wird häufig durch Testsignale beschrieben. Dabei wird der zeitliche Verlauf eines Ausgangs als Reaktion auf die Anregung eines Eingangs betrachtet.

#### 2.1.1 Impulsantwort

Die Impulsantwort eines LTI-Systems ist das Ausgangssignal eines LTI-Systems, dem am Eingang ein Dirac-Impuls zugeführt wird (Abbildung 2.1).

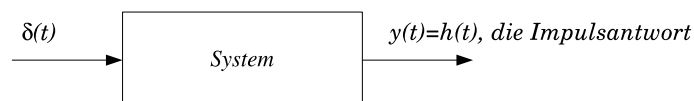


Abbildung 2.1: Impulsantwort eines LTI-Systems

Die Dirac-Impuls (auch  $\delta$ -Funktion; Dirac-Funktion; Stoßfunktion; sowie Einheitsimpulsfunktion genannt) wird durch ein kleines Delta  $\delta$  dargestellt.



Sie ist keine Funktion im klassischen Sinne, sondern kann nur mit Hilfe der Distributionentheorie mathematisch exact definiert werden. Sie hat folgende Eigenschaften:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.2)$$

Graphisch kann  $\delta(t)$  als Grenzwert angesehen werden. Für den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhält man einen Impuls mit unendlicher Amplitude, aber endlicher Fläche (Abbildung 2.2).

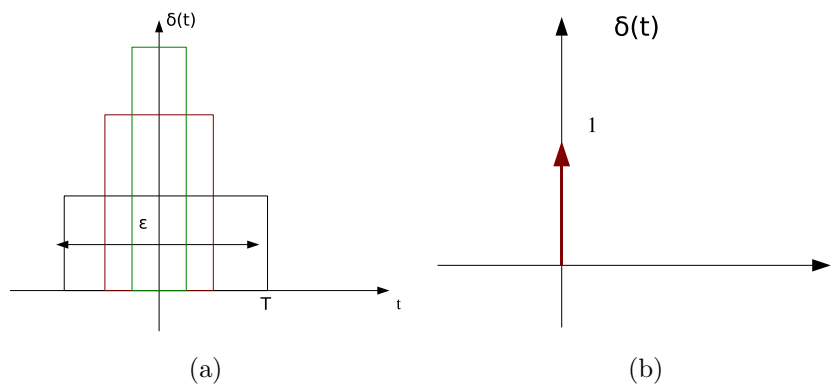


Abbildung 2.2: Die Dirac-Impuls. (a) Graphische Darstellung (b) Symbolische Darstellung

Als Antwort auf eine Impulsfunktion  $\delta(t)$  am Eingang erhält man die Impusantwort  $h(t)$ .

### 2.1.2 Sprungantwort

Die Antwort auf eine *Sprungfunktion* wird als *Sprungantwort* bezeichnet. Die Sprungfunktion wird auch als *Heaviside-Funktion* bezeichnet (Abb. 2.3).

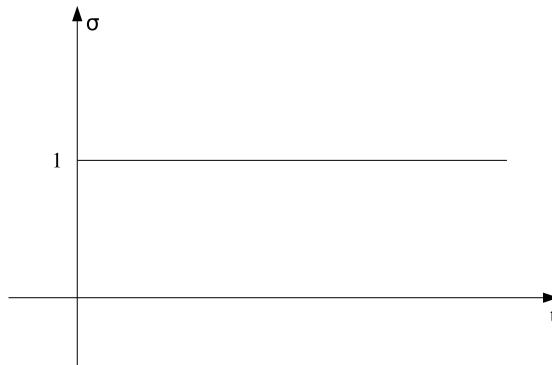


Abbildung 2.3: Sprungfunktion

Sie ist mathematisch gegeben durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Faltungsintegral

Jetzt stellt sich die Frage: wie reagiert ein lineares, zeitinvariantes System auf ein beliebiges Eingangssignal  $u(t)$ ? bzw. was ist die Transformation  $\xi$  sodass:

$$y(t) = \xi\{u(t)\} \quad (2.4)$$

zunächst stellen wir das Eingangssignal  $u(t)$  mit Hilfe des Integrals mit  $\delta$ -Funktion:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (2.5)$$

Da die Integration und die Multiplikation mit  $u(\tau)$  lineare Transformationen sind, kann das Ausgangssignal  $y(t)$  geschrieben werden als:

$$y(t) = \xi\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\xi\{\delta(t - \tau)\}d\tau \quad (2.6)$$

Da die Impusantwort  $h(t)$  eine Antwort auf die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist, gilt:

$$\xi\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau) \quad (2.7)$$

Damit ergibt sich die Ausgabe  $y(t)$  eines linearen, zeitinvarianten Systems mit der Impulsantwort  $h(t)$  bei einer Eingabe  $u(t)$  zu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.8)$$

Gleichung (2.8) wird auch als *Faltungsintegral* (eng. Convolution) bezeichnet. Die Faltung von  $u$  und  $h$  wird als  $(u * h)$  notiert.

## 2.2 Laplacetransformation

LTI-Systems “lineare zeitinvariante Systeme” lassen sich einfacher als andere Systeme mathematisch beschreiben. Mit der Laplacetransformation kann das Verhalten der LTI-Systems berechnet werden. Die Laplacetransformation stellt eine Funktionentransformation dar, welche die Funktion  $f(t)$  ( $t \in \mathcal{R}^+$ ) die Funktion  $F(s)$  zuordnet.

Sei  $f : [0, \infty]$  Kausal stetig, dann definiert man die Laplacetransformation durch

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.9)$$

hier ist  $s = \sigma + jw$  eine komplexe Funktion.

Vielfach schreibt man für die Laplacetransformation auch

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (2.10)$$

### Beispiel 1

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} e^0 \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad (2.12)$$

Um die Umkehrfunktion der Laplacetransformation so berechnen, benötigt man eine Integration in der komplexen Ebene.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - jw}^{\sigma + jw} F(s)e^{st} ds \quad (2.13)$$

## 2.2.1 Eigenschaften der Laplacetransformation

Bevor wir endlich die Laplacetransformation in action vorführen können, benötigen wir noch einige allgemeine Rechenregeln, die auf die Eigenschaften der Laplace-transformation basiert.

Die wichtigsten Eigenschaften sind:

### Linearitätssatz

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (2.14)$$

### Verschiebungssatz

1. Verschiebung nach rechts

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-as} F(s) \quad (t \geq a > 0) \quad (2.15)$$

2. Verschiebung nach links

$$\mathcal{L}[f(t+a)] = e^{as} \left( F(s) - \int_0^a f(t)e^{-st} dt \right) \quad (t \geq a > 0) \quad (2.16)$$

### Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0) \quad (2.17)$$

### Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (a \in \mathbb{C}) \quad (2.18)$$

### Multiplikationssatz

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

### Divisionssatz

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(x) dx \quad (2.20)$$

### Differentiationssatz

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) \quad (2.21)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (2.22)$$

### Integrationsatz

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(x) dx \right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (2.23)$$

**Faltung** Die Laplacetransformation der Faltung ist:

$$\mathcal{L} [(f * g)(t)] = F(s)G(s) \quad (2.24)$$

wobei  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , und  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ .

### 2.2.2 Korrespondenztabelle

Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$f(t) \sin(at)$	$\frac{1}{2i} (F(s+ia) - F(s-ia))$
$f(t) \cos(at)$	$\frac{1}{2} (F(s+ia) + F(s-ia))$

### 2.2.3 Laplacetransformation und lineare Differentialgleichungen

Die Laplacetransformation eignet sich, Differentialgleichungen zu lösen. Dazu transformiert man die Differentialgleichung in den Spektralbereich (Bildbereich), löst die so erhaltene algebraische Gleichung und transformiert die Lösung in den Zeitbereich zurück.

**Beispiel 2** Es soll die folgende Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplacetransformation gelöst werden:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2.25)$$

Mit der Linearität der Laplacetransformation folgt:

$$\mathcal{L} [y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L} [e^{3t}] \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{3t}] = \frac{1}{s-3} \quad (2.27)$$

und daraus folgt

$$s^2Y(s) - s - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s-3} \quad (2.28)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2-3s+2)} + \frac{s-3}{(s^2-3s+2)} \quad (2.29)$$

Eine kleine Rechnung ergibt

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3} \quad (2.30)$$

Die Lösung im Zeitbereich wird dann:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}, \quad t \geq 0 \quad (2.31)$$

**Übung 1** Berechnen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung der folgenden Differentialgleichung.

$$y'' + 3y' - 4y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{4}, \quad y'(0) = 1 \quad (2.32)$$

**Lösung**

$$y(t) = \frac{7}{5}e^t + \frac{1}{10}e^{-4t} - \frac{1}{4}, \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

## 2.3 Die Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion ist eine mathematische Beschreibung im Laplace-Bereich (auch Spektralbereich, oder Bildbereich genannt) des Verhaltens eines LTI-Systems, das einen Eingang und einen Ausgang besitzt. Sie ist für ein System immer dieselbe - unabhängig von der Wahl eines speziellen Ein/Ausgangssignalpaars. Deshalb beschreibt sie das gesamte Verhalten des Systems.

In einem LTI-System soll der Verlauf der Ausgangsgröße  $y(t)$  mit Hilfe der Faltungsbeziehung ermittelt werden:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (2.34)$$

darin stellt  $h(t)$  die Impulsantwort des Systems dar.  
Mittels (2.24) wird die Gleichung (2.34) im Bildbereich:

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (2.35)$$

wobei  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ ,  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ , und  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

$H(s)$  stellt die **Übertragungsfunktion** dar.  
Ebenso kann die Übertragungsfunktion als Laplacetransformierte der Impulsantwort  $h(t)$  ermittelt werden (Abb. 2.4)

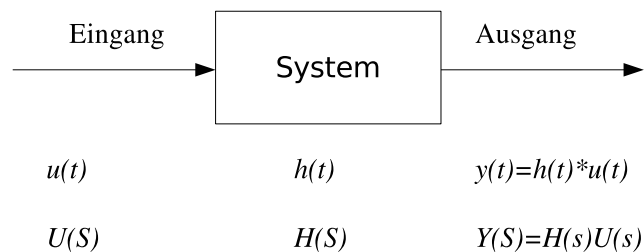


Abbildung 2.4: Übertragungsfunktion

## 2.4 Zusammenfassung von Übertragungsfunktionen in Blockschaltbildern

Die Darstellung der Systeme im Frequenzbereich (Laplace-Transformation) ermöglicht die Vereinfachung von Signalflussbildern mit einfachen Operationen.

- Zusammenfassen einer Kettenschaltung zu einem Block

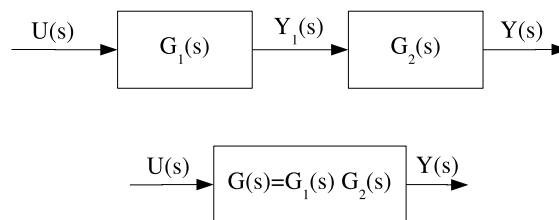


Abbildung 2.5: Reihenschaltung zweier linearer Blöcke

- Zusammenfassen einer Parallelschaltung zu einem Block

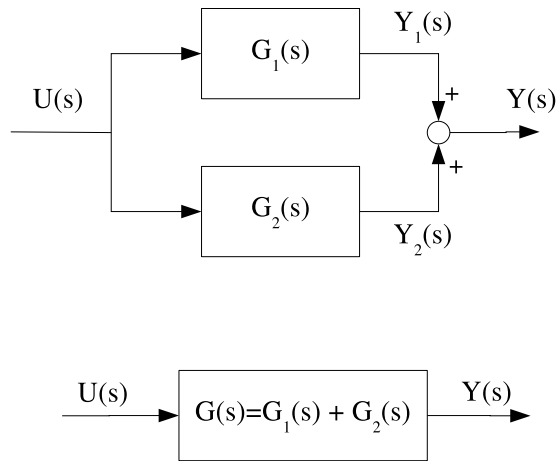


Abbildung 2.6: Parallelschaltung zweier linearer Blöcke

- Zusammenfassen einer Rückführung zu einem Block

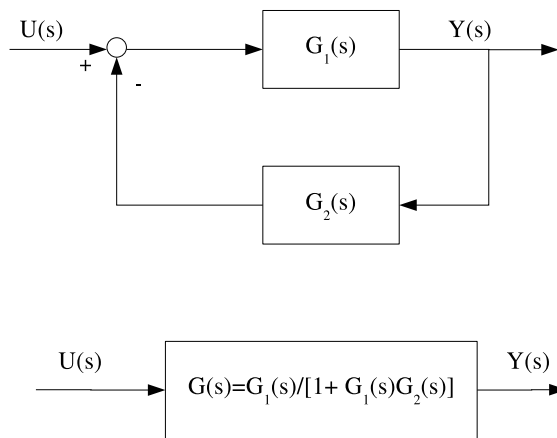


Abbildung 2.7: Rückführung



## 2.5 BIBO-stabilität

### 2.5.1 Definition

Ein System ist BIBO-stabil (Bounded Input Bounded Output), wenn für verschwindende Anfangszustände und auf ein beschränktes Eingangssignal  $u(t)$  (bounded input), mit einer ebenfalls beschränkten Ausgangsgröße  $y(t)$  antwortet (bounded output).

d.h. für jedes  $u(t)$

$$|u(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.36)$$

gilt, dass

$$|y(t)| \leq N < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.37)$$

### 2.5.2 Stabilitätskriterium im Zeitbereich

Ein kausales LTI - System ist genau dann stabil, wenn seine Impulseantwort  $h(t)$  strebt mit wachsendem  $t$  einem endlichen Wert zu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c < \infty \quad (2.38)$$

Das System heißt dann:

**asymptotisch Stabil** , wenn die Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$  erfüllt ist.

**grenzstabil** , wenn die Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c$ ,  $c \neq 0$  aber auch  $c < \infty$  erfüllt ist.

**Instabil** , wenn die Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  erfüllt ist.

### 2.5.3 Stabilitätskriterium im Bildbereich

Von der Gleichung (2.35) ergibt sich dass:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} \quad (2.39)$$

Die Analyse der Pole- und Nullstellen einer Übertragungsfunktion spielt eine wichtige Rolle für das Stabilitätskriterium. Dabei bezeichnet man als:

**Polstellen**  $s_i$  : die  $i$ -te Nullstelle des Nennerpolynoms (heißt auch das *charakteristische Polynom*)

**Nullstelle**  $z_j$  : die  $j$ -te Nullstelle des Zählerpolynoms.

Pole und Nullstellen geben durch ihre Positionen in der komplexen  $p$ -Ebene Information über Eigenschaften des Systems. Mithilfe der Polstellen-Positionen in der  $s$ -Ebene kann eine Stabilitätsanalyse vorgenommen werden (Abb. 2.8).

Ein System heißt:

**asymptotisch Stabil** , wenn alle Pole in der linken  $p$ -Halbebene liegen:

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad \forall i \quad (2.40)$$

**grenzstabil** , wenn mindestens ein Pole auf der  $j$ - Achse liegt, und kein Pole in der rechten  $s$ -Halbebene liegt.

**Instabil** , wenn mindestens ein Pole auf der rechten  $s$ -Halbebene liegt.

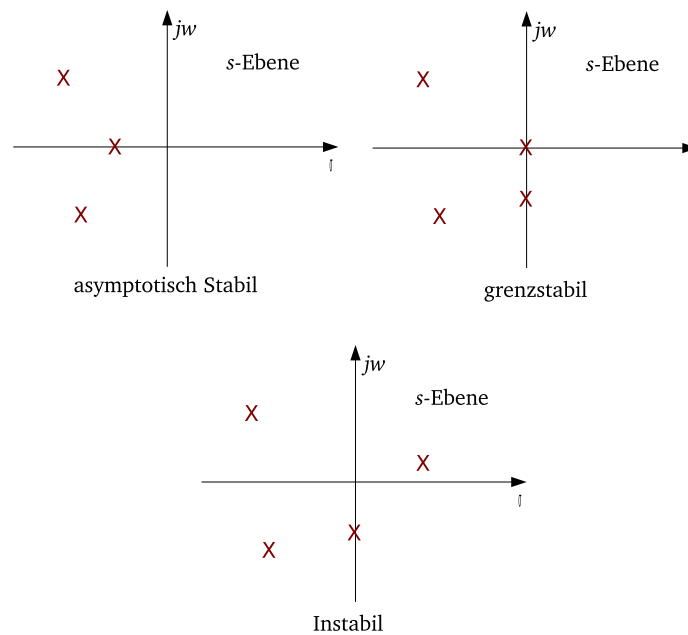


Abbildung 2.8: Analyse der Stabilität durch Polstellen-Positionen

**Beispiel 3** Berechnen Sie die Wurzeln des charakteristischen Polynoms für ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (2.41)$$

Treffen Sie eine Aussage über die Stabilität.

**Lösung :**

$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ . Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind  $s_1 = -1, s_2 = -2$ . Da alle Pole in der linken  $s$ -Halbebene liegen, dann ist das System **asymptotisch Stabil**.

# Kapitel 3

## Grundlagen der Regelungstechnik

Der Begriff “Regelung” beschreibt Tätigkeiten, bei denen eine physikalische Größe Beeinflußt, so dass eine gewünschte Betriebsart eingestellt wird oder erhalten bleibt. Die Regelungstechnik ist in vielen technischen und natürlichen Systemen benutzt. Einige Beispiele sind im folgenden aufgeföhrt:

- Raumtemperaturre
- Körpertemperature
- Drehzahlregelung eines Motors

Abbildung 3.1 zeigt eine Übersicht über Anwendungsbereiche der Regelungstechnik.

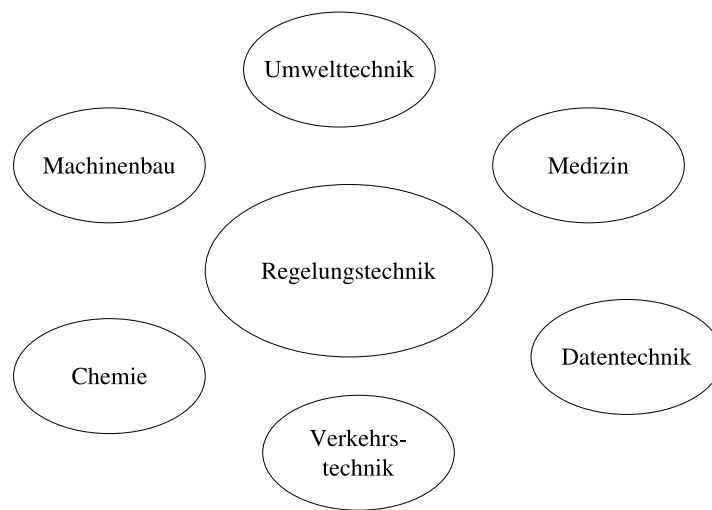


Abbildung 3.1: Einsatzgebiete der Regelungstechnik

### 3.1 Unterschied Steuerung - Regelung

Im alltäglichen Sprachgebrauch werden die Begriffe Steuerung und Regelung nicht immer sauber unterschieden, und manchmal widersprechen der technischen Definition des Steuern und Regeln. Zum Beispiel beim "Steuern" eines Auto (Abbildung 3.2) wird ständig die augenblickliche Fahrtrichtung mit der vom Fahrbahnverlauf Richtung verglichen. Bei Abweichungen wird der Fahrer den Kurs entsprechend korrigieren. Dieser Vorgang wiederholt sich kontinuierlich, daher wird in der Regelungstechnik von einem Regelkreis gesprochen.

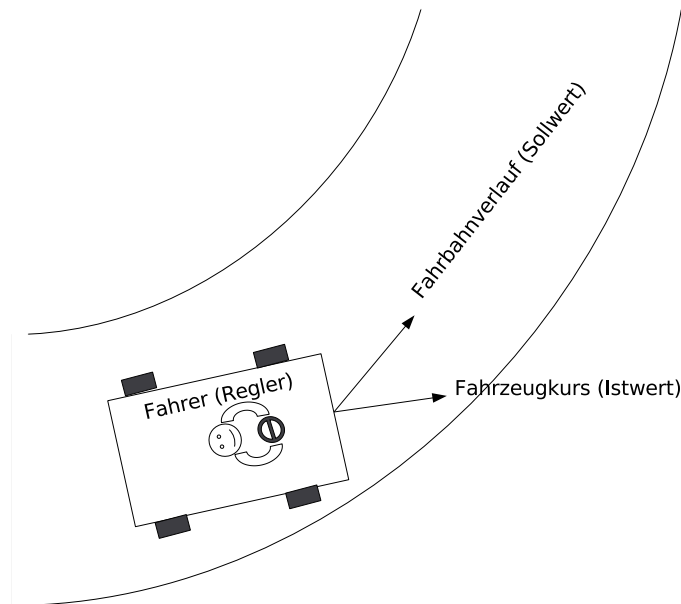


Abbildung 3.2: Autofahren: “Steuern” oder “Regeln”?

Ein anderes Beispiel ist der “Lautstärkeregler” beim Radiogerät. Die Lautstärke ändert sich bei gleicher Einstellung, egal ob das empfangene Signal stark oder schwach ist. Es wird keinen Vergleich zwischen die jetzige und die gewünschte Stärke stattfinden, also kein Regelkreis.

Bei diesen bekannten Beispielen aus dem Alltagsleben treten bereits die ersten Unterschiede zwischen Steuerung und Regelung deutlich hervor.

### 3.1.1 Steuerung (Open Loop Control)

Die Steuerung (Abbildung 3.3) wirkt auf das Eingangssignal und beeinflusst damit das Ausgangssignal. Dieses Vorgehen erzeugt einen rein vorwärts gerichteten Signalfluss, und damit hat es den Vorteil, dass es die Stabilität des Systems nicht gefährdet. Es hat aber entscheidende Nachteile. Die Steuerung hat keine Kenntnisse, ob das Ausgangssignal die gewünschte Wert hat. Da die meisten technischen Systeme unterliegen externer Störeinflüssen, kann es bei einer Steuerung zu Abweichungen zwischen den gewünschten und aktuellen

Ausgangsgrößen kommen. Deshalb, diese Strategie kann nur in sehr einfachen Fällen angewendet werden. Instabile Systeme können überhaupt nicht mit einer Steuerung kontrolliert werden.

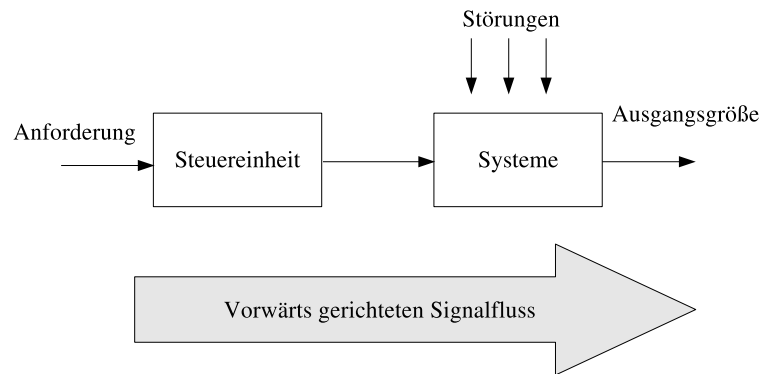


Abbildung 3.3: Steuerung

### 3.1.2 Regelung (Closed Loop Control)

Die Regelung wirkt auch auf das Eingangssignal um das Ausgangssignal zu beeinflussen, aber in diesem Vorgehen "weiß" man, ob das Ausgangssignal die gewünschte Wert hat. Im Gegensatz zur Steuerung, in der Regelung entsteht ein Kreis, in dem Signale laufen (*Regelschleife*) (Abbildung 3.4). Es wird dann ein Vergleich mit den gewünschten Sollwerten stattfinden, und somit kann eine bessere Unterdrückung der Störeinflüsse auf das System gegeben werden. Im Unterschied zur Steuerung, eine Regelung kann instabile Systeme stabilisieren und damit technisch nutzbar machen.

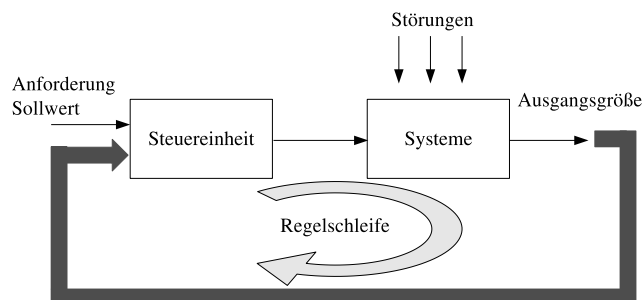


Abbildung 3.4: Regelung

## 3.2 Grundsätzlicher Aufbau von Regelkreisen

Die Regelung ist eine systematische Beeinflussung einer Eingangsgröße eines zu regelnden Systems, damit die Ausgangsgröße, die als *Regelgröße* bezeichnet, des Systems, den Wunschwert möglichst schnell und genau erreicht. Der Wunschwert der *Regelgröße* wird in der Praxis als *Sollwert* oder auch als *Führungsgröße* bezeichnet. Bei einem Regelprozess werden die *Regelgröße* und der *Sollwert* ständig gemessen und verglichen. In Abhängigkeit des Ergebnisses dieses Vergleichs, ergibt der Regler eine so genannte *Stellgröße* als Eingangsgröße, um die *Regelgröße* an den *Sollwert* heranzuführen und dort zu halten (Bild 3).

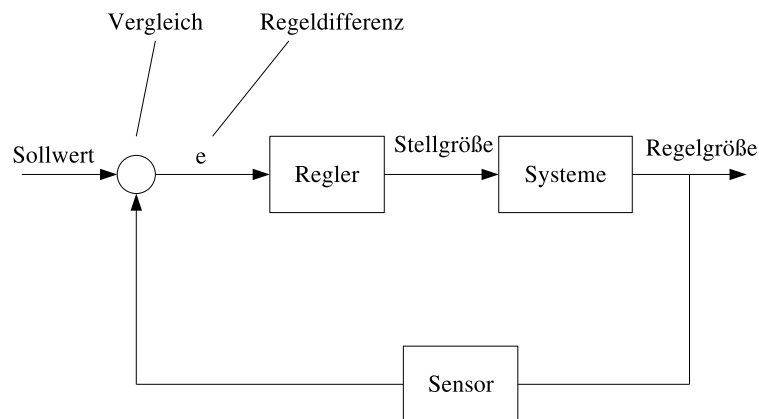


Abbildung 3.5: Blockschaltbild der Regelung

### 3.2.1 Allgemeine Anforderungen an einen Regelkreis

As seen above in section 3.2 ein Regelkreise kann durch das Blockschaltbild 3.6 beschrieben werden.



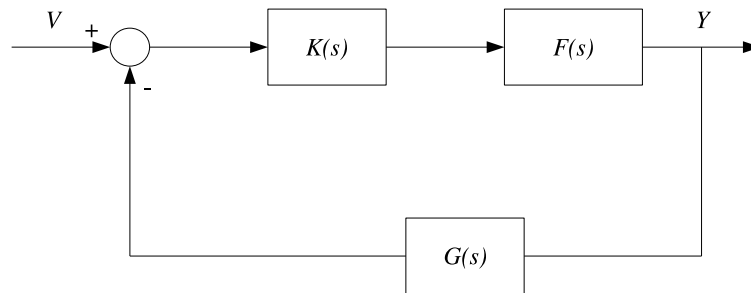


Abbildung 3.6: Blockschaltbild geschlossener Kreis

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises lautet folglich:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K(s)F(s)}{1 + K(s)F(s)G(s)} \quad (3.1)$$

$K(s)F(s)G(s)$  wird auch *Kreisübertragungsfunktion*  $G_k(s)$  genannt:

$$G_k(s) = K(s)F(s)G(s) \quad (3.2)$$

Grundaufgabe einer jeden Regelung ist es, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. Die Stabilitätskriterien sind in Kapitel 2.5 vorgestellt. Die Stabilität des geschlossenen Kreises (Bzw. Übertragungsfunktion 3.1) hängt dann von der Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion  $1 + G_k(s)$  ab. Es ist dann die Wahl des Reglers ( $K(s)$ ) in Verbindung mit den dynamischen Eigenschaften des Systems ( $F(s)$ ), die entscheidet ob das Gesamtsystem stabil oder instabil ist.

Die Anforderung können auch quantifiziert werden. Es wird daher Kenngrößen für die Sprungantwort des Regelkreises festgelegt.

Kenngrößen, die durch das Führungsverhalten bei Anregung mit Sprungfunktion erzielt werden, sind (Abbildung 3.7):

**Anregelzeit (rise time)**  $T_{an}$  gibt den Zeitpunkt an, zu dem erstmals der Sollwert erreicht wird.

**Ausregelzeit (transient time)**  $T_{aus}$  gibt den Zeitpunkt an, ab dem die Regelabweichung kleiner als eine vorgegebene Schranke  $\pm\epsilon$ .

**Maximale Überschwingweite (overshoot)**  $e_{max}$  gibt die maximale Regelabweichung an, die nach dem erstmaligen Erreichen des Sollwertes (100%) auftritt.

**Bleibende Regeldifferenz (steady-state error)** ist die Abweichung der Sollwert von der Istwert für  $t \rightarrow \infty$

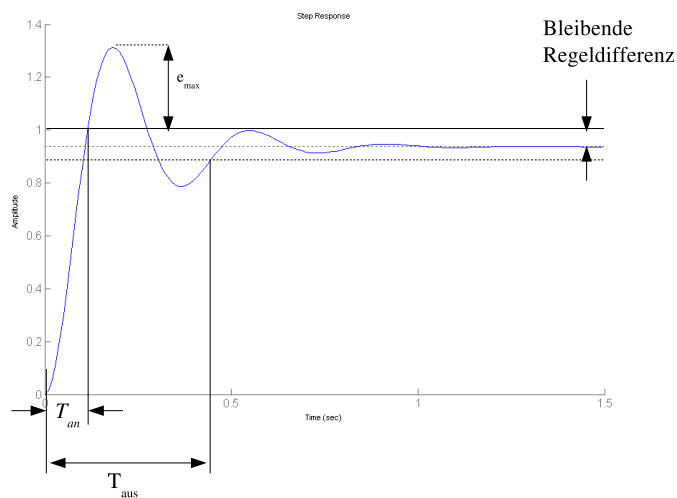


Abbildung 3.7: Sprungantwort des Regelkreises

An eine Regelung werden vier Anforderungen gestellt:

- Kleine bleibende Regelabweichung.
- geringes Überschwingen.
- Kleine Anregelzeit.
- Kleine Ausregelzeit.

### 3.3 Lineare Standard-Regler (PID Regler)

PID-Regler besteht aus folgenden Anteilen:

- Proportionalen Anteil (P-Regler)
- Integralen Anteil (I-Regler)
- Differentialen Anteil (D-Regler)

### 3.3.1 *P*-Regler

*P*-Regler, auch *P*-Glied genannt, ist das einfachste Element in einer Regelkreis. Er bestimmt die Stellgröße  $u(t)$  durch Multiplikation der Regelabweichung  $e(t)$  mit einem Faktor ( $K_p$ ):

$$u(t) = K_p e(t) \quad (3.3)$$

bzw.

$$U(s) = K_p E(s) \quad (3.4)$$

im Laplace Bereich.

**Vorteile:**

- einfach im Aufbau und damit relativ preiswert.
- das Verhalten wird nur durch die Einstellung des Parameters  $K_p$ .

**Nachteil:** bleibende Regeldifferenz. Diese wird umso größer, je kleiner die Kreisverstärkung ( $K_p$ ) ist, und eine Erhöhung des Faktors  $K_p$  wird zur Erhöhung der Überschwingweite führen.

### 3.3.2 *I*-Regler

Beim *I*-Regler (integrierender Regler) ist die Stellgröße  $u(t)$ , abgesehen vom Anfangswert, proportional zum Zeitintegral der Regelabweichung  $e(t)$ :

$$u(t) = \frac{1}{K_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Im Laplace Bereich wird der I-Regler durch

$$U(s) = \frac{1}{K_i s} E(s) \quad (3.6)$$

beschrieben.

Die Aufgabe des *I*-Reglers ist es, die Regeldifferenz nicht zuzulassen.

**Vorteil:** keine bleibende Regeldifferenz.

**Nachteil:** *I*-Regler greifen langsamer ein als *P*-Regler.

### 3.3.3 *D*-Regler

Der *D*-Regler (differentialer Regler) bestimmt den Stellwert aus der zeitlichen Ableitung der Regelabweichung:

$$u(t) = K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.7)$$

BZW. im Laplace Bereich:

$$U(s) = K_d s E(s) \quad (3.8)$$

Der *D*-Regler wird also aus der Änderung der Regeldifferenz reagieren. Je schneller sich die Regeldifferenz verändert, desto größer ist der Stellwert. Wenn die Regeldifferenz konstant bleibt, wird der *D*-Regler diese nicht ausgleichen.

**Vorteil:** Beim Auftreten einer Regeldifferenz greift der *D*-Regler sofort proportional zur Änderungsgeschwindigkeit ein. Der Vorteil ist es, das Überschwingen zu minimieren.

**Nachteile:**

- reagiert nicht auf eine konstante Regeldifferenz.
- verstärkt Messrauschen.

### 3.3.4 *PI*-Regler

Die Kombination eines *I*-Reglers mit einem *P*-Regler führt zum *PI*-Regler. Der *PI*-Regler vereint die Wirkungsweisen von *P*- und *I*-Reglern in sich. Der *P*-Reglerteil versucht eine auftretende Regeldifferenz schnell abzufangen, und die *I*-Reglerteil beseitigt anschließend die restliche Regeldifferenz.

Das dynamische Verhalten des *PI*-Reglers kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{1}{K_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

**Vorteile:**

- anfangs schneller als der *I*-Regler.
- präziser als der *P*-Regler (keine bleibende Regeldifferenz)

**Nachteil:** Einstellung von zwei Reglerparametern (Zeit Aufwand beim Tuning)

### 3.3.5 PD-Regler

Die Parallelschaltung eines  $D$ -Reglers und eines  $P$ -Reglers führt zum  $PD$ -Regler. Er ist durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.10)$$

**Vorteil:** sehr schneller Regler, und größere Regeldifferenz werden vermieden.

**Nachteil:** bleibende Regeldifferenz tritt auf.

### 3.3.6 PID-Regler

Der PID-Regler vereint die Verhaltensweisen der  $P$ -,  $I$ -, und  $D$ -Regler. Folgende Gleichung beschreibt das dynamische Verhalten eines  $PID$ -Reglers:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{1}{K_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.11)$$

**Vorteile:**

- reagiert schnell
- läßt keine bleibende Regeldifferenz zu
- erlaubt im Verlauf der Regelung keine großen Regelabweichungen

**Nachteil:** Einstellung eines PID-Regler erfordert einen großen Zeitaufwand

Wir fassen die Merkmale der elementaren PID-Regler in der folgenden Tabelle zusammen.

Regler	Anregelzeit	Überschwinger	Ausregelzeit	Regelabweichung
$K_p$	sinkt	wächst	geringe Änderung	sinkt
$K_I$	sinkt	wächst	wächst	0
$K_D$	geringe Änderung	sinkt	sinkt	geringe Änderung

**Beispiel 4** Entwerfen Sie einen  $PID$ -Regler für das System mit folgender Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 5} \quad (3.12)$$

so dass die folgende Anforderungen erfüllt werden:

- *Kleine bleibende Regeldifferenz.*
- *geringes Überschwingen.*
- *Kleine Anregelzeit.*
- *Kleine Ausregelzeit.*

## Lösung

Bei einer Sprunantwort hat das unregelte System (Steuerung) nur 20% des Sollwerts und erst nach  $T_{aus} \approx 10s$  erreicht (Abbildung 3.8). Durch Einsatz von Reglern, können wir diese Situation verbessern.

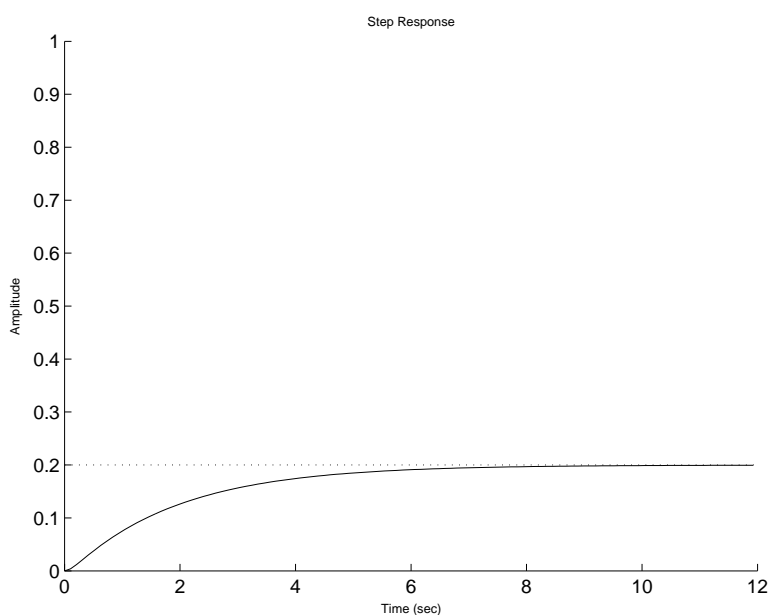


Abbildung 3.8: Sprungantwort: Steuerung des Systems

### a) Verwendung eines $P$ -Reglers

Zunächst wird der Regler als  $P$ -Regler betrieben (Abbildung 3.9). Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises können wir dann durch Superposition berechnen:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K_p}{Ms^2 + bs + (k + K_p)} \quad (3.13)$$

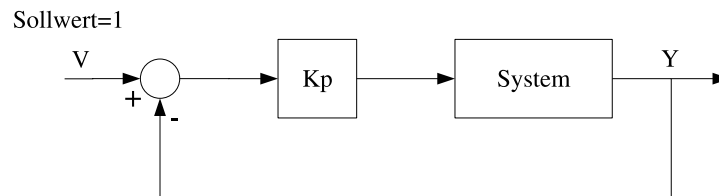


Abbildung 3.9: Regelung mit P-Regler

Bei dem ersten Versuch (Abbildungen 3.10) haben wir eine bleibende Regeldifferenz erhalten. Diese kann aber reduziert werden, wenn wir  $K_P$ , also die Verstärkung des Reglers, entsprechend hoch wählen. Die Abbildungen (3.11) zeigt, dass die Regeldifferenz bei der Erhöhung des Parameters  $K_P$  von 100 auf 300 ist kleiner geworden. Man kann auch klar sehen, dass die Ausregelzeit mit abnehmender Überschwingung proportional dazu zunimmt. Allgemein lässt sich die folgende Aussagen zur Regelsystemen bestehend aus  $P$ -Reglern machen: Die Regeldifferenz und die Ausregelzeit werden kleiner, wenn  $K_P$  größer gewählt wird. Aber dazu erhält man eine stärkere Überschwingung. Mit einem  $P$ -Regler wird man in der Praxis oft einer dieser Kenngrößen den Vorzug geben.

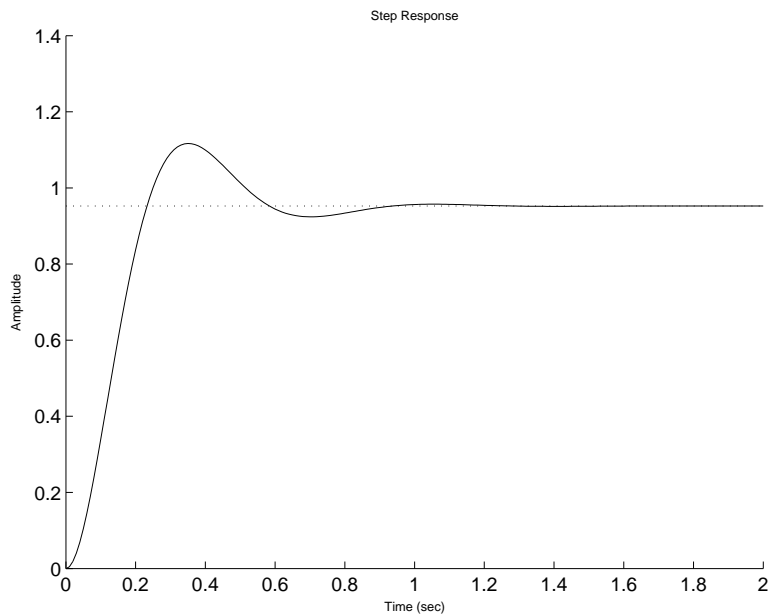


Abbildung 3.10: Regelung des Systems mit P-Regler ( $K_p=100$ )

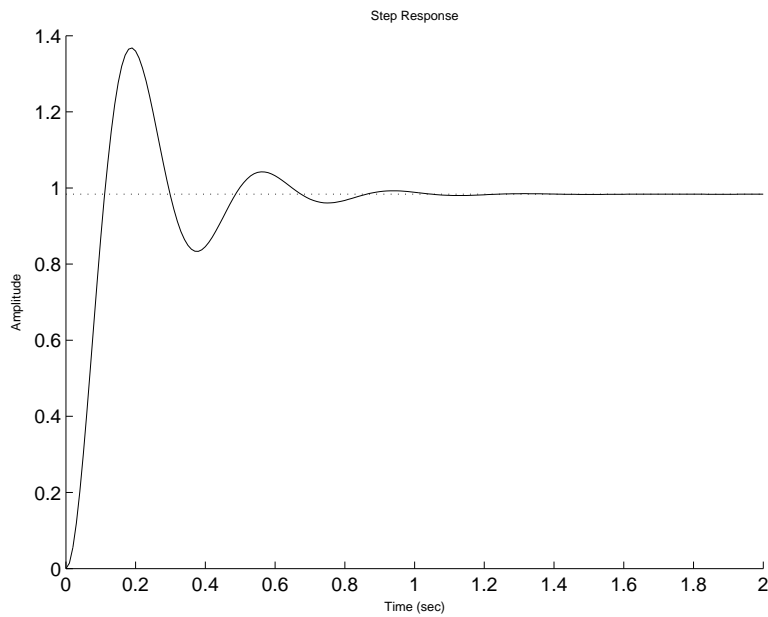


Abbildung 3.11: Regelung des Systems mit P-Regler ( $K_P=300$ )

**b) Verwendung eines PD-Reglers**

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (Abbildung 3.12) wird:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K_D s + K_p}{M s^2 + (b + K_D) s + (k + K_p)} \quad (3.14)$$

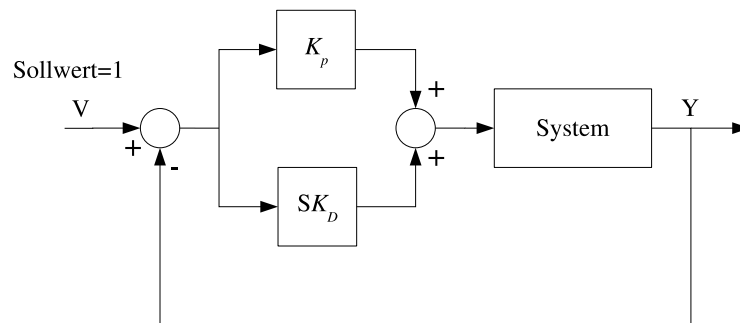


Abbildung 3.12: Regelung mit PD-Regler



Durch die Wirksamkeit des  $D$ -Anteils werden größere Überschwingung vermieden, so dass insgesamt eine Verbesserung der Regelung - im Vergleich zum Regelkreis mit P-Regler deutlich zu sehen (Abbildung 3.13).

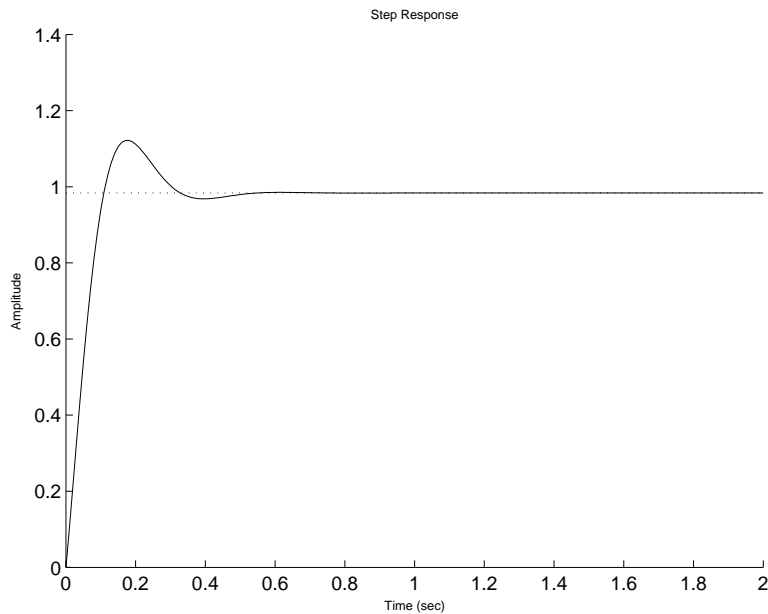


Abbildung 3.13: Regelung des Systems mit PD-Regler ( $K_P=300$ ,  $K_D=10$ )

### b) Verwendung eines $PI$ -Reglers

Für den geschlossenen Regelkreis (Abbildung 3.14) erhalten wir die folgende Übertragungsfunktion:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K_p s + K_I}{M s^3 + b s^2 + (k + K_p) s + K_I} \quad (3.15)$$

In Abbildung (3.15) ist gezeigt, dass die Regeldifferenz konvergiert gegen 0. Mit steigendem  $K_p$  oder  $K_I$  erhalten wir niedrige Ausregelzeit, aber gleichzeitig stärkeres Überschwingen.

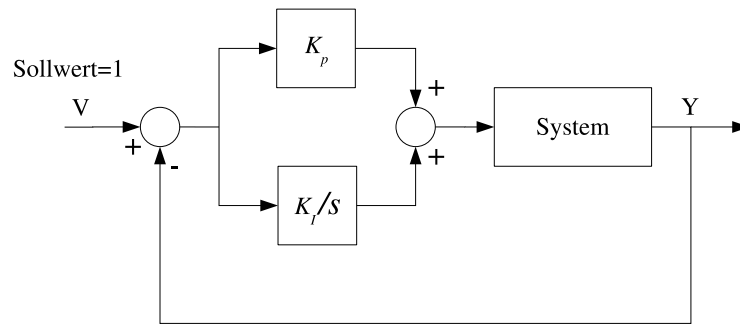


Abbildung 3.14: Regelung mit PI-Regler

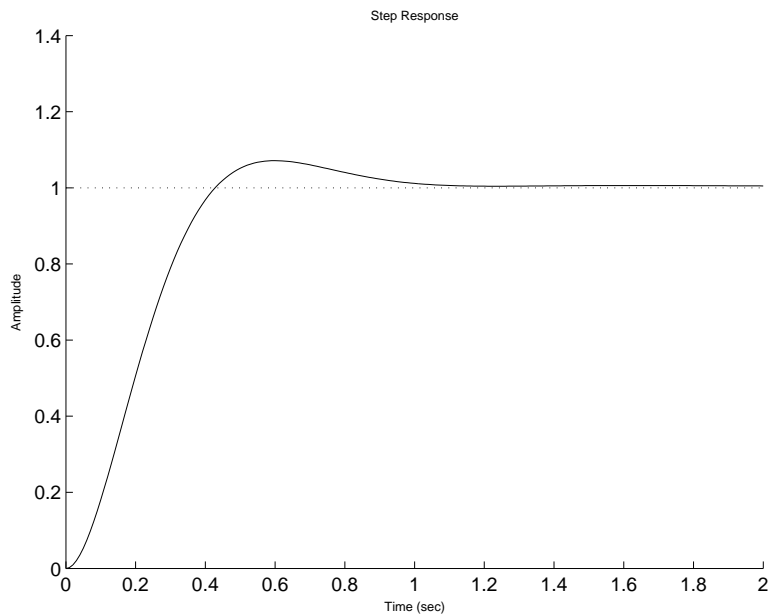


Abbildung 3.15: Regelung des Systems mit PI-Regler ( $K_P=50$ ,  $K_I=30$ )

### b) Verwendung eines *PID*-Reglers

Ein PID-Regler folgt aus der Parallelschaltung eines Proportionalgliedes, eines Integralgliedes, und noch eines Differentialgliedes. Die Ausgangsgrößen der beteiligten Regelglieder können getrennt berechnet und anschließend aufaddiert werden (Abbildung 3.16). Die Übertragungsfunktion des geschlosse-

nen Regelkreises wird:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{M s^3 + (b + K_D) s^2 + (k + K_p) s + K_I} \quad (3.16)$$

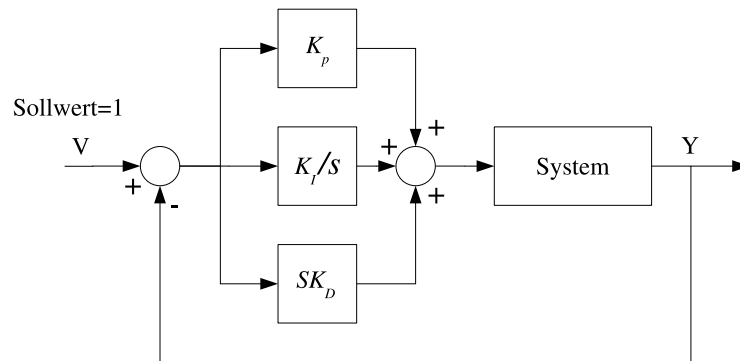


Abbildung 3.16: Regelung mit PID-Regler

Zunächst wird der PI-Regler so gewählt, dass der Regelkreis stabil ist, also keine Schwingungen auftreten. Zusätzlich sorgt der D-Regler für eine kürzere Anregelzeit. Abbildung (3.17) zeigt das Zeitverhalten des Regelkreises mit PID-Regelung bei Sprungerregung. Diese Regelung zeichnet sich durch eine deutlich kürzere Anregelzeit gegenüber der PI-Regelung aus.

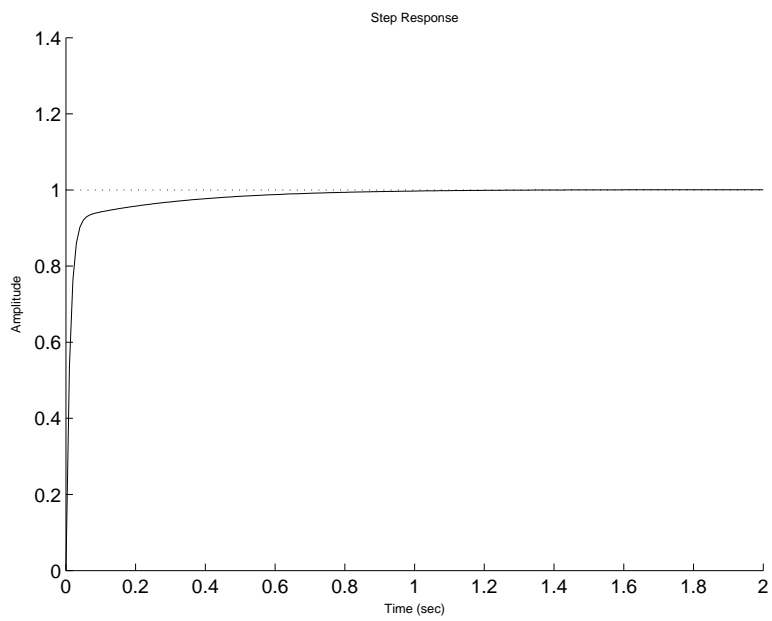


Abbildung 3.17: Regelung des Systems mit PID-Regler ( $K_P=300$ ,  $K_I=150$ ,  $K_D=80$ )