Evolutionsgleichungen
Musterlösung zu Blatt 6

---

1. Für jedes $\gamma \neq 0$ existiert $\lambda = \lambda_0 - 1/\gamma \in \mathbb{C}$, d.h. $\gamma = 1/(\lambda_0 - \lambda)$.
   Sei $\lambda_0 \neq \lambda \in \rho(A)$ in der Resolventenmenge von A. Dann ist

$$\begin{aligned}(\lambda - A)(\lambda_0 - A)^{-1} &= (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - A)(\lambda_0 - A)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1} + Id \\ &= (\lambda_0 - \lambda)\left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda} - (\lambda_0 - A)^{-1}\right).\end{aligned}$$

   Damit ist $\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} \subseteq \{1/(\lambda_0 - \lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ gezeigt.
   Sei jetzt $1/(\lambda_0 - \lambda) \in (R(\lambda_0, A))$. Dann ist

$$\left(\frac{1}{\lambda_0 - \lambda} - (\lambda_0 - A)^{-1}\right)(\lambda_0 - A) = \left(\frac{\lambda_0 - A}{\lambda_0 - \lambda} - 1\right) = \left(\frac{\lambda_0 - \lambda + \lambda - A}{\lambda_0 - \lambda} - 1\right) = (\lambda - A),$$

   also $\lambda \in \rho(A)$, und somit ist auch $\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} \supseteq \{1/(\lambda_0 - \lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ gezeigt.
   Ferner gilt

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_p(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \neq 0 : \ Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_0 - A)x = (\lambda_0 - \lambda)x \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{1}{\lambda_0 - \lambda}x = (\lambda_0 - A)^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \in \sigma_p(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

2. Sei $U_S = (S - i)(S + i)^{-1}$ die Cayley-Transformierte von S. Dann impliziert jede selbstadjungierte Erweiterung T von S eine unitäre Erweiterung U_T von U_S. Ist umgekehrt U_T eine unitäre Erweiterung von U_S, dann ist nach Aufgabe 2. b) von Blatt 4 $(Id - U_T)$ injektiv, da $\mathrm{Rg}(Id - U) \supseteq \mathrm{Rg}(Id - U_S) = D(S)$ dicht in H liegt, und somit definiert $T := i(U_T + Id)(Id - U_T)^{-1}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S.
   Nun besitzt aber eine Isometrie $U_S : H \mapsto H$ genau dann eine unitäre Erweiterung U_T, wenn $\operatorname{codim} D(U_S) = \operatorname{codim} \mathrm{Rg}(U_S)$. Nun ist aber $\operatorname{codim} D(U_S) = \dim \mathrm{Rg}(S + i)^{\perp} = \dim \mathrm{Ker}(S^* - i)$ und $\operatorname{codim} \mathrm{Rg}(U_S) = \dim \mathrm{Rg}(S - i)^{\perp} = \dim \mathrm{Ker}(S^* + i)$.

3. Sei $f \in H_0^1(0, 1) = D(S)$:

$$\int_0^1 (i\frac{d}{dt}f(t))\overline{g(t)}\,dt = -\int_0^1 if(t)\overline{\frac{d}{dt}g(t))}\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{i\frac{d}{dt}g(t))}\,dt,$$

   d.h. f ist symmetrisch und $D(S^*) = H^1(0, 1) \neq D(S)$.
   Sei $f \in D(T)$, dann ist wie oben jedes $g \in D(T^*)$ nach Definition in $H^1(0, 1)$ und

$$\int_0^1 (i\frac{d}{dt}f(t))\overline{g(t)}\,dt = \int_0^1 f(t)\overline{i\frac{d}{dt}g(t))}\,dt + i(f(1)\overline{g(1)} - \lambda f(1)\overline{g(0)}),$$

   so dass g genau dann in $D(T^*)$ liegt, wenn $g(1) = \overline{\lambda}g(0)$, was gleichbedeutend ist mit $\lambda g(1) = g(0)$, also $g \in D(T)$.