ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 2

(Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 04.05.2018, N24 - H14)

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben 1, 2a, 3a, 3b, 5 ab.*
   Falls Sie mehrere Blätter abgeben, sind diese zusammenzuheften.

1. Welche der Abbildungen $f,\ g,\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind injektiv, surjektiv oder bijective (bzw. welche sind es nicht)? [2]
$$f(x) := x^2, \qquad g(x) := x + |x|, \qquad h(x) := x\ |x|.$$

2. Beweise folgende Aussagen:

   (a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn sie eine **Linksinverse** besitzt, d.h., wenn eine Abbildung $g_\ell : Y \to X$ existiert mit [2]
$$g_\ell \circ f = \mathrm{id}_X\,.$$

   (b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn sie eine **Rechtsinverse** besitzt, d.h., wenn eine Abbildung $g_r : Y \to X$ existiert mit
$$f \circ g_r = \mathrm{id}_Y\,.$$

3. X, Y, Z seien Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ seien Abbildungen. Man zeige:

   (a) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv). [1.5]

   (b) Sind f und g bijektiv, so gilt: [1.5]
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

   (c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv. Ist zusätzlich f surjektiv, so ist auch g injektiv.

   (d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv. Ist zusätzlich g injektiv, so ist auch f surjektiv.

4. X, Y seien Mengen, $R \subset X \times Y$ sei eine Relation von X nach Y und
$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in R\}$$
sei die inverse Relation zu R. Man zeige: R und R^{-1} sind genau dann Abbildungen, wenn R eine bijektive Abbildung ist.

5. Man beweise durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2,$ [2]

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$ [1]