ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 8

Evolutionsgleichungen

Abgabe ist am 10.12.2014 um 12 Uhr in der Übung

Aufgabe 1 (*C_0-Halbgruppen durch C_0-Gruppen*) (10*+10)

Es sei $U\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ eine C_0-Gruppe mit Generator A. Sie dürfen benutzen, dass A^2 eine C_0-Halbgruppe T erzeugt. Wir wollen eine konkrete Darstellung von T durch U bekommen.

(a) Man zeige, dass

$$S(t)x = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) U(\tau)x \, d\tau$$

für alle $x \in X$ und $t > 0$ eine C_0-Halbgruppe definiert.
Hinweis: Man definiere S durch die obige Formel. Es ist schnell klar, dass $S(t)$ beschränkt ist und dass $S(t)x \to x$ für $t \to 0+$ gilt. Um das Halbgruppengesetz zu beweisen, benutze man

$$\frac{1}{\sqrt{4(t+s)\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4(t+s)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4t}\right) \frac{1}{\sqrt{4s\pi}} \exp\left(-\frac{(\tau-\sigma)^2}{4s}\right) d\sigma.$$

Dies muss man nicht beweisen, weil wir das aus der Wahrscheinlichkeitsrechung als bekannt voraussetzen. Außerdem dürfen Sie den vektorwertigen Satz von Fubini für Riemann-Integrale über stetige Funktionen von zwei Variablen benutzen.

(b) Man zeige, dass $S = T$ gilt.
Hinweis: Man zeige nun, dass $A^2 = B$ für den Generator B von S gilt, indem man den Integranden von

$$S(t)x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) U\left(\sqrt{2t}\tau\right) x \, d\tau$$

durch die Taylor-Entwicklung in $\sqrt{2t}\tau$ bis (mindestens) zur Ordnung 2 ersetzt. Dies geht zumindest für $x \in D(A^4)$. Man zeige weiter, dass $D(A^4)$ ein wesentlicher Definitionsbereich für A^2 ist (warum ist man dann fertig? Man hat ja nicht gezeigt, dass dies ein wesentlicher Definitionsbereich für B ist!).

Aufgabe 2 (*Holomorphie und Winkel für die Wärmeleitungshalbgruppe*) (5+5+10*)

In den ersten beiden Teilaufgaben diskutieren wir die Analytizität der Wärmeleitungshalbgruppe und leiten in der letzten Teilaufgabe wichtige Identitäten für diese her.

(a) Es sei A ein dicht-definierter Operator auf einem **komplexen** Banachraum. Weiter sei $\lambda - A$ surjektiv für ein λ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ und für alle $f \in D(A)$ existiere ein $g \in \mathrm{dN}(f)$ mit $\langle g, Af\rangle \in (-\infty, 0]$. Man zeige, dass dann iA eine kontraktive C_0-Gruppe und A eine kontraktive holomorphe C_0-Halbgruppe $(T(z))_{\operatorname{Re} z>0}$ erzeugt. Weiter kann diese stark-stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ fortgesetzt werden[1] und $(T(it))_{t\in\mathbb{R}}$ ist die von iA erzeugte C_0-Gruppe.
Bemerkung: Es reicht nicht, dass $\pm iA$ beide C_0-Halbgruppen erzeugen.

(b) Es sei $Af = f''$ mit $D(A) = H^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Man zeige, dass A eine kontraktive holomorphe C_0-Halbgruppe $(T(z))_{\operatorname{Re} z>0}$ erzeugt. Weiter kann diese stark-stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ fortgesetzt werden kann und $(T(it))_{t\in\mathbb{R}}$ ist die von iA erzeugte C_0-Gruppe.
Hinweis: Man muss nur Teilaufgabe (a) benutzen.

[1]Die Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit T.

Bitte wenden!

(c) Es seien zwei Operatoren auf $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ definiert durch $(\tau_x f)(s) = f(s-x)$ und $(\sigma_p f)(s) = e^{-isp} f(s)$ für fast alle $s \in \mathbb{R}$ (für $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{C}$) und T die C_0-Halbgruppe der vorigen Teilaufgabe. Man zeige, dass

$$T(z)\tau_x = \tau_x T(z)$$

und

$$T(z)\sigma_p = \exp\left(-zp^2\right) \sigma_p \tau_{2ipz} T(z)$$

für alle z mit $\operatorname{Re} z \geq 0$ gilt (wobei p so gewählt ist, dass $ipz \in \mathbb{R}$ gilt). Weiter berechne man $T(z)g$ für

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-s^2\right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

für alle z mit $\operatorname{Re} z \geq 0$ und zeige

$$(T(t)f)(s) = \frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) f(s-\tau)\, d\tau$$

für fast alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$.
Hinweis: Die angegebene Formel für $T(t)$ zeigt man über direkte Anwendung von Aufgabe 1 auf die Translationshalbgruppe. Den Beweis der anderen Identitäten und auch $T(z)g$ führe man nur für $z \in \mathbb{R}$ aus und argumentiere dann über die Eindeutigkeit holomorpher Fortsetzungen.

Aufgabe 3 (***Für Interessierte:*** *Eine einfache Schrödingergleichung I*) (5*+5*+5*+5*)
Es sei $A\colon D(A) \to C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $D(A) = \{f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \ f, f'' \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})\}$ und $Af = if''$ gegeben. Ziel wird es sein zu zeigen, dass A nichtmal eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Wechselt man dagegen den Raum zu $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, dann erzeugt der entsprechende Operator B sogar eine C_0-Gruppe S (siehe Aufgabe 2 (b)). Die Lösung der Aufgabe wird einer physikalischen Anschauung folgen, welche hier vermittelt werden soll. Zudem werden einige wichtige Rechnungen hier vorweggenommen.

(a) Formulieren Sie die Ergebnisse, dass A keine bzw. B eine C_0-Halbgruppe erzeugt über Anfangsrandwertprobleme um (benutzen Sie nur klassische Ableitungen in endlich-dimensionalen Räumen bei der Formulierung Ihrer Aussagen!). Die Formulierung soll dabei so gewählt sein, dass der einzige Unterschied darin besteht, dass die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten in zwei verschiedenen Normen gemeint ist.
Hinweis: Benutzen sie als Anfangswerte nur Elemente aus einem geeigneten gemeinsamen wesentlichen Definitionsbereich. Dann sind die Aussagen äquivalent zur Wohlgestelltheit des kanonischen Problems und unterscheiden sich nur in der stetigen Abhängigkeit.

(b) Man betrachte nun ein **Gauß-** oder **Wellen-Paket**

$$g_{x,p}\colon y \mapsto \exp\left(-(y-x)^2 - ipy\right)$$

(mit $p, x \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie $S(t)g_{x,p}$.
Hinweis: Benutzen Sie dazu die Aufgabe 2 (c).

(c) Machen Sie sich schlau über die physikalische Bedeutung der C_0-Gruppe S und über die passende Interpretation von $g_{x,p}$ und $S(t)g_{x,p}$. Beschreiben Sie diese auf ihrer Lösung.
Hinweis: Ein Teilchen/Zustand in der Quantenmechanik wird modeliert durch eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ (hier $n=1$). Genauer sollte man eine Äquivalenzklasse aller $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})\backslash\{0\}$ betrachten, die sich nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden. Dabei ist $\|f\|_2^{-2}|f|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Ortes des Teilchens. Die Dichte für den Impuls ist gegeben durch $\|f\|_2^{-2}|\mathcal{F}f|^2$. Dabei ist $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation (dies wird nicht weiter benötigt). Die Unsicherheit im Ort und Impuls rühren nicht von Unwissen her, sondern sind von fundamentaler Natur (Heisenbergsche Unschärferelation). Ein Wellenpacket $g_{x,p}$ modeliert ein

Bitte wenden!

Teilchen (welches fast klassisch - weil bis an die Grenzen der Heisenbergschen Unschärferelation gebracht) mit wahrscheinlichstem Ort x und wahrscheinlichstem Impuls p. Die C_0-Halbgruppe S ist dabei die Lösung der Schrödingergleichung für ein freies (ohne Potential) Teilchen mit Masse $m = 0.5$. Weiter ist $\hbar = 1$ gesetzt (Normierung der Einheiten). In ihrer Lösung formulieren Sie dies kurz in eigenen Worten und gehen darauf ein, wo der wahrscheinlichste Ort von $S(t)g_{x,p}$ ist. Vergleichen Sie dies nun mit dem Verhalten eines klassischen Teilchens. Dies ist ganz essentiell, um die Lösung des eigentlichen Problems anschaulich zu verstehen. Es sei noch bemerkt, dass es erstaunlich tiefe mathematische Gründe gibt, warum die Quantensysteme so aussehen. Dafür benötigt man aber starke Methoden der **abstrakten**[2] Harmonischen Analysis.

(d) Wir betrachten nun eine Überlagerung zweier Wellenpakete $f = g_{x,-p} - g_{-x,p}$ ($p > 0$). Was würde klassisch am Ort $y = 0$ passieren und was passiert an diesem Ort tatsächlich?
Hinweis: Eine Überlagerung von Wellenpaketen wird auf dem nächsten Übungsblatt zur Lösung des Problems führen, ob A eine C_0-Halbgruppe erzeugt oder nicht. In diesem Fall würde man klassisch immer das Teilchen am Ort $y = 0$ mit einer positiven Wahrscheinlichkeit finden und zu einer gewissen Zeit sollte man dort auch die maximale Aufenthaltsdichte erwarten. Tatsächlich passiert dies aber nicht. An dem Ort wird man das Teilchen nie finden.

[2] Im Gegensatz zur abstrakten Harmonischen Analysis, welche im wesentlichen die Untersuchtung von topologischen Gruppen (und ihrer Fourier-Transformation) ist, gibt es noch die softe Harmonische Analysis (Untersuchung der Fourier-Transformation, Eigenschaften harmonischer Funktionen, und Untersuchung verschiedener Funktionenräume, ...). Diese Unterscheidung folgt der Differenzierung der Analysis in die abstrakte (basiert auf Theorie-Gebäuden - wie die Funktionalanalysis) und der soften Analysis (Abschätzungen und Untersuchung von konkreten Räumen und Fragestellungen).