① Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $n \geq 2$. Zeigen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes, dass für alle $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ die Greensche Identität

$$\int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \partial_\nu u - u\, \partial_\nu v)\, d\sigma$$

gilt ($\nu(x)$ ist die äußere Einheitsnormale in $x \in \partial G$).

② Greensche Funktion für Neumann-Problem. ($n \geq 2$)

a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Es wird angenommen, dass es zu jedem $x \in G$ eine Funktion $\psi^x \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ gibt, so dass

$$\begin{cases} -\Delta \psi^x(y) = 0, & y \in G \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu(y)} \psi^x(y) = \dfrac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x-y) + \dfrac{1}{|\partial G|}, & y \in \partial G \end{cases} \qquad (*)$$

gilt. Wir setzen $N(x,y) = \Phi(x-y) - \psi^x(y)$, $x \in G, y \in \overline{G}, x \neq y$.

Es sei nun $u \in C^2(\overline{G})$ Lösung des Neumann-Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } G \\ \partial_\nu u = h & \text{auf } \partial G \end{cases}$$

mit $f \in C(\overline{G})$ und $h \in C(\partial G)$. Zeigen Sie die Darstellungsformel

$$u(x) - ⨍_{\partial G} u\, d\sigma = \int_G N(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial G} N(x,y) h(y)\, d\sigma(y) \quad \forall x \in G.$$

[Tipp: Verwenden Sie Aufg. 1 und die allgemeine Greensche Darstellungsformel für $C^2(\overline{G})$-Funktionen aus der Vorlesung.]

b) Zeigen Sie, dass das Randdatum $g(y) := \dfrac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x-y) + \dfrac{1}{|\partial G|}$ ($x \in G$ fest), $y \in \partial G$, im Korrektorproblem $(*)$ die für die Lösbarkeit notwendige Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{\partial G} g(y)\, d\sigma(y) = 0$$

erfüllt.

③ Gegenbeispiel zu Perron.

Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Definiere für $x \in \overline{B_1(0)}$:

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\dfrac{|x|^{2-n}-1}{\varepsilon^{2-n}-1} & : \ \varepsilon < |x| \leq 1 \\ -1 & : \ |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Wir betrachten das beschränkte Gebiet $G = B \setminus \{0\}$ und $g \in C(\partial G)$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} 0 & : \ x \in \partial B \\ -1 & : \ x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) u_ε ist für alle $\varepsilon \in (0,1)$ subharmonisch in B (im verallg. Sinne).

b) Die Perron-Lösung $u_* : \overline{G} \to \mathbb{R}$ aus Satz 2.60 der Vorlesung ist gegeben durch $u_* \equiv 0$. Insbesondere erfüllt die Perron-Lösung nicht die Randbedingung $u = g$ in $x = 0$. (hier ist $0 \in \partial G$ kein reg. Pkt.)

④ Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $n \geq 2$. Zu jedem $g \in C(\partial G)$ gebe es ein $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } G \\ u = g & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Randpunkte von G regulär sind.

Abgabe/Besprechung am Freitag, den 20.05.2016.