Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Lösungen Maßtheorie: Blatt 3

Die Übungen am 5. November fallen aus. Die Bearbeitungen zu diesem Übungsblatt werden ausnahmsweise in der Vorlesung am 6. November eingesammelt. Das Übungsblatt wird zusammen mit dem 4. Übungsblatt, das regulär erscheint, in den Übungen am 12. November besprochen, die ausnahmsweise zweistündig stattfinden.

6. Sei A eine Menge. Eine *binäre Relation* ist eine Teilmenge R von $A \times A$. Gilt für $x, y \in A$, dass $(x, y) \in R$, so schreibt man $x \sim y$. Man nennt die Relation $\sim$ eine *Äquivalenzrelation*, falls

(a) $x \sim x$ für alle $x \in A$ (reflexiv).

(b) $x \sim y$ impliziert $y \sim x$ (symmetrisch).

(c) $x \sim y$ und $y \sim z$ implizieren $x \sim z$ (transitiv).

Für $x \in A$ bezeichnet $[x] \coloneqq \{y \in A : x \sim y\}$ die *Äquivalenzklasse von* x. Die Äquivalenzklassen zu zwei Elementen aus A sind entweder identisch oder disjunkt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von X unter $\sim$ bildet somit eine disjunkte Zerlegung von A.

(a) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeige, dass (3)

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$$

eine Äquivalenzrelation auf Σ definiert. Was bedeutet die Äquivalenzrelation in Worten?

Lösung: In Worten sind zwei Mengen unter dieser Relation äquivalent, wenn sie sich nur in einer Nullmenge entscheiden. Wir überprüfen nun formal, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert. Für $A \in \Sigma$ ist

$$\mu((A \cup A) \setminus (A \cap A)) = \mu(\emptyset) = 0,$$

also ist $\sim$ reflexiv. Die Symmetrie folgt auch sofort aus der Symmetrie der Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$. Für die Transitivität seien $A, B, C \in \Sigma$ gegeben mit $A \sim B$ und $B \sim C$. Dann ist (Skizze!)

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus (B \cup C) \cup (A \cap C) \setminus B \cup B \setminus (A \cup C) \cup (B \cap C) \setminus A.$$

Analog ist

$$(B \cup C) \setminus (B \cap C) = B \setminus (C \cup A) \cup (B \cap A) \setminus C \cup C \setminus (B \cup A) \cup (C \cap A) \setminus B.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}(A \cup C) \setminus (A \cap C) &= A \setminus (C \cup B) \cup (A \cap B) \setminus C \cup C \setminus (A \cup B) \cup (C \cap B) \setminus A \\ &\subset (A \cup B) \setminus (A \cap B) \cup (B \cup C) \setminus (B \cap C).\end{aligned}$$

Also ist

$$\mu((A \cap C) \setminus (A \cap C)) \le \mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) + \mu((B \cup C) \setminus (B \cap C)) = 0.$$

Hieraus folgt $A \sim C$.

(b) Sei $\Omega = \mathbb{Z}$ und $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Setze (3)

$$\mu(A) = \#(A \cap 2\mathbb{Z}) \qquad \text{für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}),$$

wobei # die Anzahl der Elemente in der Menge bezeichnet. Zeige, dass (Ω, Σ, μ) ein Maßraum ist und bestimme die Äquivalenzklassen unter der in (a) definierten Äquivalenzrelation.

Lösung: Offensichtlich ist (Ω, Σ) ein Messraum, da Σ die gesamte Potenzmenge ist. Es bleibt also zu zeigen, dass μ ein Maß ist. Offensichtlich ist $\mu(\emptyset) = 0$. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine disjunkte Folge. Enthält ein A_{n_0} unendlich viele Elemente von $2\mathbb{Z}$, so enthält auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ unendlich viele Elemente von $2\mathbb{Z}$ und man erhält $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty = \mu(A_{n_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Sind unendlich viele $A_n \cap 2\mathbb{Z}$ nicht-leer, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1: A_n \cap 2\mathbb{Z} \neq \emptyset}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1: A_n \cap 2\mathbb{Z} \neq \emptyset}^{\infty} 1 = \infty.$$

Da $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap 2\mathbb{Z}$ unendlich viele Elemente in diesem Fall enthält, folgt auch die Gleichheit $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty$. Der verbliebene Fall $A_n \cap 2\mathbb{Z} \neq \emptyset$ für endlich viele n folgt aus den Rechenregeln für endliche Kardinalitäten.

Alternativ kann man auch feststellen, dass $\mu = \sum_{m\in 2\mathbb{Z}} \delta_m$ und dass die abzählbare Summe von Maßen wieder ein Maß definiert.

Sei $A \in \Sigma$. Für $B \in \Sigma$ mit $B \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset$ gilt $\mu(B) = 0$ und damit $B \cup A \in [A]$, da wegen

$$\mu((B \cup A \cup A) \setminus ((B \cup A) \cap A)) = \mu((B \cup A) \setminus A) \leq \mu(B) = 0.$$

Sei umgekehrt $C \in [A]$, also $C \sim A$. Schreibe $C = (A \cap C) \cup (C \setminus A)$. Da $C \setminus A \subset (A \cup C) \setminus (A \cap C)$, folgt $\mu(C \setminus A) = 0$, also $(C \setminus A) \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset$. Genauso ist $\mu(A \setminus (A \cap C)) = 0$ und damit $(A \setminus (A \cap C)) \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset$. Ist $A \subset 2\mathbb{Z}$, so folgt $A = A \cap C$. Unter dieser Annahme ist also $C = A \cup B$ mit $B \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset$ und damit

$$[A] = \{A \cup B : B \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset\}.$$

Für allgemeine $A \in \Sigma$ folgt dann

$$[A] = [A \cap 2\mathbb{Z}] = \{(A \cap 2\mathbb{Z}) \cup B : B \cap 2\mathbb{Z} = \emptyset\}.$$

7. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeige, dass für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ (4)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $B_n = A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k)$. Dann ist $B_n \cap B_m = \emptyset$ für $n \neq m$ mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Aus der σ-Additivität des Maßes und der Monotonie des Maßes folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

8. Sei $d \in \mathbb{N}$ und A eine invertierbare $d \times d$-Matrix. Zeige, dass dann $A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Hierbei ist (5)

$$A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \{C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : C = AB \text{ für ein } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Lösung: Da A invertierbar ist, ist die von A induzierte Abbildung ein Homöomorphismus. Insbesondere bildet A offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ auf offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ab. Definiere

$$\mathcal{A} := \{B \subset \mathbb{R}^d : AB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Nach der Vorüberlegung enthält $\mathcal{A}$ alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$ (Prinzip der guten Mengen), also $AB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dies würde also $A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zeigen.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. Aus $A\emptyset = \emptyset$ und $A\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$ folgt $\emptyset, \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$. Eine bijektive Abbildung vertauscht zudem mit den Mengenoperationen $\cup$ und Komplementbildung. Hieraus folgen direkt die restlichen Eigenschaften einer σ-Algebra.

Also ist $A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bewiesen. Umgekehrt folgt aus dem ersten Teil $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = AA^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Damit ist die Behauptung $A\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bewiesen.