Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 29.05.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 18+10*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 5

27. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe auf X.

(a) Zeigen Sie: Wenn jeder Operator $T(t)$ (für $t \in \mathbb{R}$) eine Kontraktion ist, dann ist sogar jeder Operator $T(t)$ (für $t \in \mathbb{R}$) eine Isometrie, d.h. es gilt $||T(t)x|| = ||x||$ für alle $x \in X$. (1)

Lösung: Wenn jedes $T(t)$ eine Kontraktion ist, dann gilt für jedes $x \in X$ und jedes $t \in T$ die Abschätzung

$$||T(t)x|| \leq ||x|| = ||T(-t)T(t)x|| \leq ||T(t)x||.$$

Also ist $||T(t)x|| = ||x||$, d.h. $T(t)$ ist eine Isometrie.

(b) Sei nun $X = H$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass ein Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ genau dann unitär ist, wenn er isometrisch und surjektiv ist. (3)

Folgern Sie, dass für jede C_0-Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H gilt: Es sind genau dann alle Operatoren $T(t)$ Kontraktionen, wenn alle Operatoren $T(t)$ unitär sind.

Lösung: Jeder unitäre Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ ist offenbar surjektiv und für jedes $x \in H$ gilt

$$||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2,$$

also ist U auch isometrisch.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass U isometrisch und surjektiv ist, dann ist U sogar bijektiv und für jedes $x \in H$ folgt aus $||Ux||^2 = ||x||^2$, dass $\langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle$ ist. Durch Polarisation erhalten wir also $U^*U = I$. Da U bijektiv ist, folgt $U^* = U^{-1}$.

Ist nun $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe von Kontraktionen. Weil jedes $T(t)$ bijektiv und nach Teilaufgabe (a) isometrisch ist, folgt aus dem soeben Gezeigten, dass jedes $T(t)$ unitär ist. Ist umgekehrt jedes $T(t)$ unitär, so ist jedes $T(t)$ ismetrisch und somit eine Kontraktion.

28. Sei H ein Hilbertraum, sei A ein selbst-adjungierter Operator auf H und sei $B \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Zeigen Sie: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. *Tipp: Verwenden Sie das Theorem von Stone.* (1)

Lösung: Nach dem Theorem von Stone erzeugt iA eine C_0-Gruppe von Kontraktionen auf H. Also erzeugt sowohl iA als auch $-iA$ jeweils eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Es folgt $s(iA) \leq 0$ und $s(-iA) \leq 0$. Damit ist $\sigma(iA) \subset i\mathbb{R}$ und somit $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ gezeigt.

(b) Zeigen Sie: B ist genau dann selbstadjungiert, wenn B symmetrisch ist. (1)

Lösung: Wenn B selbstadjungiert ist, ist B nach Definition auch symmetrisch. Sei also umgekehrt B symmetrisch. Damit ist $B \subset B^*$. Weil aber B bereits auf ganz H definiert ist, impliziert dies $B = B^*$.

(c) Sei B selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $A + B$ ebenfalls selbstadjungiert ist. (3)

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $A+B$ symmetrisch ist. Folgern Sie, dass $\pm i(A+B)$ dissipativ ist und verwenden Sie den Störungssatz 5.1 um zu zeigen, dass $\pm i(A+B)$ m-dissipativ ist.

Lösung: Für jedes $x \in D(A) = D(A + B)$ gilt

$$\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle = \langle x, (A+B)x\rangle,$$

also ist $A + B$ symmetrisch. Dies impliziert aber für jedes $x \in D(A)$ die Gleichung

$$\langle i(A+B)x, x\rangle = \bar{i}\langle (A+B)x, x\rangle = \bar{i}\langle x, (A+B)x\rangle = \bar{i}\,\overline{\langle (A+B)x, x\rangle} = -\overline{\langle i(A+B)x, x\rangle}.$$

Also ist $\mathrm{Re}\langle i(A+B)x, x\rangle = 0$ für alle $x \in X$ und somit sind die beiden Operatoren $i(A+B)$ und $-i(A+B)$ dissipativ.

Nach dem Theorem von Stone erzeugt iA eine C_0-Gruppe auf H, also erzeugen iA und $-iA$ jeweils C_0-Halbgruppen auf H. Aus Satz 5.1 folgt nun, dass auch $iA+iB$ und $-iA-iB$ stark stetige Halbgruppen auf H erzeugen. Für genügend großes $\lambda \in \mathbb{R}$ sind deshalb $\lambda - i(A+B)$ und $\lambda - (-i)(A+B)$ invertierbar und damit insbesondere surjektiv. Dies zeigt, dass $i(A+B)$ und $-i(A+B)$ m-dissipativ sind. Also ist $A+B$ selbstadjungiert.

29. Sei H ein separabler Hilbertraum und sei A ein abgeschlossener und selbst-adjungierter Operator auf H mit nichtleerer Resolventenmenge und kompakter Resolvente.

(a) Zeigen Sie für jedes $\mu \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$, dass auch $\mathrm{R}(\mu, A)$ selbst-adjungiert ist. Folgern Sie, dass es eine Orthonormalbasis $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ von H gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. (4*)

Lösung: Weil $\mathrm{R}(\mu, A) \in \mathcal{L}(H)$ ist, müssen wir laut Aufgabe 28 (b) nur zeigen, dass $\mathrm{R}(\mu, A)$ symmetrisch ist: Sei also $x \in H$. Wegen $\mu \in \mathbb{R}$ ist mit A auch $\mu - A$ symmetrisch ist, also gilt

$$\langle \mathrm{R}(\mu, A)x, x\rangle = \langle \mathrm{R}(\mu, A)x, (\mu - A)\,\mathrm{R}(\mu, A)x\rangle = \langle (\mu - A)\,\mathrm{R}(\mu, A)x, \mathrm{R}(\mu, A)x\rangle = \langle x, \mathrm{R}(\mu, A)\rangle.$$

Also ist $\mathrm{R}(\mu, A)$ selbstadjungiert.

Nach dem Spektralsatz über kompakte, selbstadjungierte Operatoren aus der Funktionalanalysis ist das (Punkt-)Spektrum von $\mathrm{R}(\mu, A)$ abzählbar und erfüllt $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\}$. Weil $\mathrm{R}(\mu, A)$ injektiv ist, gilt sogar $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{R}(\mu, A))$. Alle Eigenräume von $\mathrm{R}(\mu, A)$ sind endlich-dimensional, stehen senkrecht aufeinander und ihr Aufspann liegt dicht in H. Wenn wir in jedem Eigenraum eine Orthonormalbasis wählen, erhalten wir insgesamt abzählbar viele Eigenvektoren e_n von $\mathrm{R}(\mu, A)$ derart, dass die Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H bildet. Wie im Beweis von Aufgabe 21 (a) zeigt man, dass die e_n auch Eigenvektoren von A sind. Dies zeigt die Behauptung.

(b) Sei $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H, die aus Eigenvektoren von A besteht und sei $\lambda = (\lambda_n)$ die Folge der zugehörigen Eigenwerte. Zeigen Sie: (3*)

$$D(A) = \{x \in H : (\lambda_n \langle e_n, x\rangle) \in l^2\} \quad \text{und} \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n \quad \forall x \in D(A).$$

Lösung: Sei $x \in H$ derart, dass die Folge $(\lambda_n \langle e_n, x\rangle)$ quadratisch summierbar ist. Dann konvergiert $y := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n$ in H. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei $x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n$ und $y_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n$. Dann gilt $y_N \to y$ und $x_N \to x$. Außerdem ist $x_N \in D(A)$ und $Ax_N = y_N$. Wegen der Abgeschlossenheit von A folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Sei nun $x \in D(A)$. Dann liegt die Folge der Fourierkoeffizinten von Ax in l^2, und diese Folge ist gegeben durch $(\langle e_n, Ax\rangle) = (\langle Ae_n, x\rangle) = (\lambda_n \langle e_n, x\rangle)$.

(c) Nach dem Satz von Stone erzeugt iA eine unitäre Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in H$ gilt: (3*)

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\lambda_n t} \langle e_n, x\rangle e_n.$$

Tipp: Verwenden Sie den Hilbertraum-Isomorphismus $U : H \to l^2 := l^2(\mathbb{N})$, der jedem Vektor $x \in H$ die Folge seiner Fourierkoeffizienen zuordnet.

Lösung: Sei $M_\lambda \in \mathcal{L}(l^2)$ der Multiplikationsoperator zur Folge $\lambda = (\lambda_n)$ aus Teilaufgabe (b). Weil alle λ_n reell sind, erzeugt iM_λ laut Beispiel 7.11 (i) die C_0-Gruppe $(M_{\exp(i\lambda t)})_{t\in\mathbb{R}}$ auf l^2 (wobei wir die Notation $\exp(i\lambda t) := (\exp(i\lambda_n t))$ verwendet haben). Zugleich gilt laut Teilaufgabe (b), dass $D(A) = U^{-1}(D(M_\lambda))$ und $A = U^{-1}M_\lambda U|_{D(A)}$ ist, woraus $D(iA) = U^{-1}(D(iM_\lambda))$ und $iA = U^{-1}iM_\lambda U|_{D(iA)}$ folgt.

Man beachte nun, dass alle Äquivalenzen aus Aufgabe 23 (b) offensichtlich auch für C_0-Gruppen gelten. Damit folgt $T(t) = U^{-1}M_{\exp(i\lambda t)}U$ und dies zeigt die behauptete Formel.

30. Sei $H = L^2(0, 2\pi)$, sei $D(A) := \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$ und sei $A : D(A) \to H$, $f \mapsto f''$. Es ist A ein abgeschlossener Operator und man kann (mit Hilfe eines Sobolevschen Einbettungssatzes) zeigen, dass A kompakte Resolvente besitzt.

(a) Zeigen Sie: A ist symmetrisch und es gilt $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass A selbstadjungiert ist. (3)

Lösung: Sie $f \in D(A)$. Dann gilt

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f''} f = \overline{f'} f|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \overline{f'} f' = -\int_0^{2\pi} \overline{f'} f' = -\overline{f} f'|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \overline{f} f'' = \langle f, Af\rangle.$$

Also ist A symmetrisch. Weil A kompakte Resolvente beesitzt, besteht das Spektrum von A nur aus Eigenwerten. Ist aber λ ein Eigenwert von A mit (normiertem) Eigenvektor x, so folgt

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \lambda\overline{\langle x, x\rangle} = \lambda.$$

Also haben wir $\lambda \in \mathbb{R}$ gezeigt. Aus $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ folgt $\pm i \in \rho(A)$, also ist $\pm i + A$ bijektiv und somit insbesondere surjektiv. Damit ist A selbstadjungiert.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor u von A zweimal stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie das Spektrum von A und finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. (4)

Lösung: Wir benutzen den Hinweis zwischen den Aufgaben 19 und 20 auf Blatt 3: Sei u ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann ist $u'' = \lambda u$, also ist u'' stetig. Es gilt aber $u'(t) = \int_0^t u''(s)\,\mathrm{d}s + u'(0)$, also ist u' einmal stetig differenzierbar und wegen $u(t) = \int_0^t u'(s)\,\mathrm{d}s$ ist u zweimal stetig differenzierbar.

Die einzigen zweimal stetig differenzierbaren Lösungen der Differentialgleichung $u'' = \lambda u$ sind aber von der Form $u(t) = c_1 \exp(\omega x) + c_2 \exp(-\omega x)$ (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$), wobei ω und $-\omega$ die beiden Lösungen der Gleichung $\omega^2 = \lambda$ sind (man beachte, dass $\lambda \neq 0$ gilt, weil u ansonsten ein Polynom höchstens erstens Grades sein müsste - im Widerspruch zu den Randbedinungen; also sind ω und $-\omega$ verschieden). Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Im ersten Fall ist $\lambda > 0$. Dann sind ω und $-\omega$ reell und die Funktion $u(x) = c_1 \exp(\omega x) + c_2 \exp(-\omega x)$ hat höchstens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$. Somit kann aber nicht $u \in D(A)$ gelten. Also hat A keine positiven Eigenwerte.

Im zweiten Fall ist $\lambda < 0$. Dann können wir $u(t)$ auch schreiben als

$$u(t) = \tilde{c}_1 \sin(\tilde{\omega} x) + \tilde{c}_2 \cos(\tilde{\omega} x),$$

wobei wir $\tilde{\omega} = |\omega|$ gesetzt haben. Aus der Bedingung $u(0) = 0$ folgt, dass $c_2 = 0$ gelten muss. Damit $u(t)$ Eigenvektor ist, muss also $c_1 \neq 0$ sein. Die Bedingung $u(2\pi) = 0$ ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $\tilde{\omega} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ist, und dies ist äquivalent zu $\lambda = -\frac{n^2}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Also sind alle Eigenwerte von A durch $\lambda_n = -\frac{n^2}{4}$ gegeben, mit zugehörigen Eigenvektoren $u_n(x) = c_n \sin(\frac{n}{2}x)$. Um die u_n zu normieren, setzen wir noch $c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (denn ist ist $\int_0^{2\pi} \sin^2(\frac{n}{2}x)\,\mathrm{d}x = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Man beachte, dass die u_n paarweise orthogonal aufeinander stehen (weil sie alle Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind).

Damit ist $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{n}{2}\cdot), n \in \mathbb{N}\}$ unsere gesuchte Orthonormalbasis von H.

(c) Geben Sie die Lösung des Cauchy-Problems (2)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\cdot) = iAu(\cdot), \\ u(0,x) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(x) \end{cases}$$

explizit an.

Lösung: Wir können Aufgabe 29 c) verwenden: Mit $u_0 := u(0,\cdot) = \sqrt{\pi}(u_1 + u_2)$ folgt

$$u(t,\cdot) = T(t)u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\lambda_n t}\langle u_n, u_0\rangle u_n = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{2} e^{-i\frac{n^2}{4}t}\langle u_n, u_n\rangle u_n = e^{-i\frac{1}{4}t}u_1 + e^{-it}u_2.$$

Also gilt $u(t,x) = e^{-i\frac{1}{4}t}\sin(\frac{x}{2}) + e^{-it}\sin(x)$.