Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Klausur zur Linearen Algebra 2

18. Juli 2016; Bearbeitungszeit 120 Minuten; 90 Punkte insgesamt

1. Welche der folgenden komplexen Matrizen sind diagonalisierbar, welche sogar unitär diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antworten. (18)

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ \frac{4}{3} & 0 & 3 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim V = 7$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Wenn $\dim \operatorname{Ker} f = 3$ und $M_f = t^2(t-1)^3$, welche Jordansche Normalform muss f dann haben? Begründen Sie Ihre Antwort. (Wie üblich bezeichnet M_f das Minimalpolynom von f.) (6)

3. Sei A eine komplexe Matrix, welche die Blockdiagonalmatrix (12)

$$\tilde{A} = \operatorname{diag}(J_2(2\pi i + 1), J_2(-2\pi i + 1), J_3(1), J_1(1))$$

als Jordansche Normalform hat. Lesen Sie folgende Größen und Objekte ab (Begründung nicht erforderlich):

(a) $\dim \operatorname{Ker}(A - E_8)$

(b) $\operatorname{Spur}(A)$

(c) das Minimalpolynom M_A

(d) $\sigma(A)$

(e) $\operatorname{Rang}\big(A(A-E_8)^5(A-(2\pi i+1)E_8)\big)$

(f) $\det(\operatorname{Exp}(A))$

4. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ durch (20)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Verfahren Sie nun wie folgt:

(1) Bestimmen Sie invertierbare Matrizen S und T in $\mathbb{R}^{5\times 5}$ derart, dass $S^{-1}AS$ und $T^{-1}BT$ Jordansche Normalform haben.

(2) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B über $\mathbb{R}$ ähnlich sind.

(3) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $C^{-1}AC = B$.

5. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim V = 3$, $f \in \mathcal{L}(V)$ und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ seien zwei Basen von V. Zudem seien (10)

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Basis $\mathcal{G}$ von V gibt mit $[f]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}'} = E_3$ und bestimmen Sie $[\mathrm{id}]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}$.

6. Zeigen Sie: Wenn $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal und eine obere Dreiecksmatrix ist, dann ist A bereits eine Diagonalmatrix. (10)

7. (a) Sei V ein endlichdimensionaler Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{L}(V)$ mit $f^* = -f$. Zeigen Sie, dass dann f unitär diagonalisierbar ist und $\sigma(f) \subset i\mathbb{R}$ gilt. (6)

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^* = -A$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $u \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$ mit $u'(t) = Au(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein $C > 0$ existiert, für das $|u_k(t)| \le C$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt. (8)