Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

SoSe 2017
Blatt 09
16.06.2017

Angewandte Numerik 1

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 26.06.2017 bis 30.06.2017

Für dieses Übungsblatt gibt es 14 Theorie- und 17 Matlab-Punkte, sowie 7 Theorie- und 8 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 60-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 09) bei 103,8 Theoriepunkten und 84,6 Matlabpunkten.

Aufgabe 36 *(Programmieraufgabe: Konvergenzordnung Newtonverfahren)* (5M+2T+3T* Punkte)

In den Aufgaben 34 und 35 des letzten Übungsblatts 8 haben wir die Konvergenzordnung der verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen nichtlinearer Funktionen untersucht.

a) Untersuchen Sie analog zu den Aufgaben 34 und 35 die Konvergenz des Bisektions-, des Sekanten- und des Newtonverfahrens für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = (x-1)^2.$$

Plotten Sie dazu wieder zu jedem Iterationsschritt (x-Achse) den jeweiligen Fehler (y-Achse). Verwenden Sie für den Fehler eine logarithmische Skala. Wählen Sie als Startintervall für das Bisektionsverfahren das Intervall $[-0.1, 3]$. Verwenden Sie für das Sekantenverfahren die Startwerte -0.1 und 3, sowie den Startwert 3 für das Newtonverfahren. Den Parameter `tol` für die geforderte Genauigkeit der Näherungslösung können Sie auf 10^{-14} setzen.

Sie dürfen Ihre Funktionen vom letzten Übungsblatt verwenden.

b) Interpretieren Sie das Ergebnis. Liegt Konvergenz vor? Falls ja, welche Konvergenzordnung haben die jeweiligen Verfahren? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Wie passen die beobachteten Ergebnisse zu den Aussagen aus der Vorlesung, insbesondere zu Bemerkung 5.1.2, Satz 5.3.1 und Satz 5.4.1?

Aufgabe 37 *(Programmieraufgabe: Konvergenzbereich Newtonverfahren)*
(4M+2T+3M+4M+1M+2T+5M*+3M*+2T* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir für das Newton- und das Sekanten-Verfahren die Abhängigkeit der Konvergenz von den Startwerten untersuchen.

a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `konvergenzBereiche.m`, welches für das Newton-Verfahren und für die Funktion f mit $f(x) = \arctan x$ die Abhängigkeiten der Anzahl der durchgeführten Iterationen vom Startwert veranschaulicht. Wählen Sie dazu 200 Startwerte $x_0 \in [-10, 10]$ und bestimmen Sie für jeden Startwert die Anzahl der Iterationen. Visualisieren Sie die Ergebnisse mittels einer Grafik (x-Achse: Startwert, y-Achse: Anzahl der Iterationen). Verwenden Sie `tol = 1e-10`.

b) Was fällt auf? Wie interpretieren Sie die Anzahl der Iterationen für betragsmäßig große Startwerte. Erklären Sie beispielhaft an einigen Startwerten den jeweiligen Verlauf der Iteration.

c) Überlegen Sie sich, wie Sie für jeden Startwert überprüfen können, ob das Newtonverfahren mit der vorgegebenen Toleranz und innerhalb der maximalen Iterationen konvergiert sowie einen Näherungswert für die Nullstelle liefert. Visualisieren Sie den Konvergenzbereich in Ihrem Schaubild.

d) Untersuchen Sie analog zu Aufgabenteil a) auch das Sekanten-Verfahren. Wählen Sie als zweiten Startwert $x_1 = -5$, falls $x_0 \geq 0$, und $x_1 = +5$, falls $x_0 < 0$. Visualisieren Sie den Konvergenzbereich des Sekantenverfahrens analog zu Aufgabenteil c).

e) Vertauschen Sie die Startwerte des Sekantenverfahrens. Wählen Sie also $x_0 = \pm 5$ und $x_1 \in [-10, 10]$.

f) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Für welche Startwerte konvergiert das Sekantenverfahren? Unterscheiden sich die Ergebnisse des Aufgabenteils d) und des Aufgabenteils e)? Falls ja, warum?

g) Zur Lösung eines Nullstellenproblems ist es durchaus üblich, verschiedene Verfahren für die näherungsweise Berechnung von Nullstellen zu kombinieren. Einerseits würde das Bisektionsverfahren für die in dieser Aufgabe betrachtete Funktion f mit $f(x) = \arctan x$ mit den Startwerten aus Aufgabenteil d) oder Aufgabenteil e) immer zu einer Näherungslösung finden. Andererseits würde beispielsweise das Sekantenverfahren, falls es konvergiert, die Näherungslösung schneller ermitteln.

Das *Dekker*–Verfahren ist ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen, welches die Vorteile des Bisektionsverfahrens und des Sekantenverfahrens vereint. Der Algorithmus des Dekkerverfahrens lautet:

Algorithm 1 Dekker-Method

Require: $I = [a, b]$ and $f \in C(I)$ with $f(a)f(b) < 0$, `tol` > 0.

$a_0 = a$ and $b_0 = b$ and $b_{-1} = a_0$
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  Compute $s = b_k - \frac{b_k - b_{k-1}}{f(b_k) - f(b_{k-1})} f(b_k)$ and $m = \frac{a_k + b_k}{2}$.
  if s between b_k and m **then**
    $b_{k+1} = s$
  else
    $b_{k+1} = m$
  end if
  if $|f(b_{k+1})| \leq$ `tol` **then**
    `STOPP`
  end if
  if $f(b_{k+1})f(a_k) < 0$ **then**
    $a_{k+1} = a_k$
  else
    $a_{k+1} = b_k$
  end if
end for

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `xk = dekker(f, a, b, tol, maxIt)`, die das Dekkerverfahren implementiert. Die Parameter und der Rückgabewert sollen den Parametern und dem Rückgabewert der Matlab-Funktion `sekanten` entsprechen.

h) Untersuchen Sie analog zu Aufgabenteil a) und Aufgabenteil d) auch das Dekker-Verfahren. Wählen Sie die Startwerte wie beim Sekantenverfahren. Vertauschen Sie die Startwerte wieder. Visualisieren Sie den Konvergenzbereich des Dekkerverfahrens analog zu Aufgabenteil c).

i) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Für welche Startwerte konvergiert das Dekkerverfahren? Wie viele Iterationen benötigt das Dekkerverfahren im Vergleich zum Sekantenverfahren?

Aufgabe 38 *(Banachscher Fixpunktsatz)* (6T+2T+2T* Punkte)

Gegeben sei nun die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I := [0,1]$, mit $f(x) = x^3 + x - 1$. Gesucht ist ein iteratives Verfahren, um das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ zu lösen.

a) Zeigen Sie, dass das Nullstellenproblem durch das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \left(1 + (x^{(k)})^2\right)^{-1}$$

gelöst werden kann und weisen Sie für jeden Startwert $x^{(0)} \in I$ die Konvergenz des Verfahrens nach.

Hinweis: Im Beweis zu Folgerung 5.6.3 sehen Sie, wie Sie die Kontraktionseigenschaft der Fixpunktiteration Φ nachweisen können und wie Sie die Konstante L wählen können.

b) Wie viele Iteration benötigt dieses Iterationsverfahren höchstens, um mit dem Startwert $x_0 = 0$ eine Genauigkeit von 10^{-10} zu erreichen?

c) Geben Sie eine weitere Iterationsvorschrift an, die das Nullstellenproblem lösen könnte. (Sie brauchen keine Aussage zur Konvergenz dieser Iterationsvorschrift zu machen.)

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein. Senden Sie **spätestens 24 Stunden vor Ihrem Tutorium** alle Matlab-Files und alle Ergebnisse in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt09** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de**.