Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 2

(Besprechung Mo. 4.11.2013)

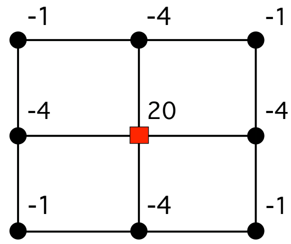
Aufgabe 4 *(Finite Differenzen Methode:* MATLAB*)*
Wir betrachten wie in Aufgabe 3 die Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat. Wir definieren

$$u_{i,j} := u(x_i, y_j).$$

Für alle inneren Punkte verwenden wir in dieser Aufgabe die folgende Approximation des Laplace-Operators:

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{1}{6h^2}(20u_{i,j} - 4(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \\ - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j+1}).$$

$\frac{1}{6h^2}\cdot$



Siehe Abbildung auf der rechten Seite.
Für diesen Differnzenstern kann man folgende Gleichung zeigen:

$$\Delta u(x,y) = \Delta_h u(x,y) - \frac{h^2}{12}\Delta f(x,y) + \mathcal{O}(h^4).$$

(i) Welche Konvergenzordnung erwarten Sie unter Verwendung dieses Differenzensterns?

(ii) Modifizieren Sie das Programm `FDM_Dirichlet`, sodass

- der oben gegebene Differenzenstern verwendet wird.
- inhomogene Dirichletdaten $u_D \not\equiv 0$ berücksichtigt werden.

(iii) Testen Sie ihre Funktion

- am Beispiel von Aufgabe 1. Welche Konvergenzordnung erhalten Sie?
- am Beispiel

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } \Omega \\ u(x,y) &= \cosh(x)\cos(y) && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Welche Konvergenzordnung erhalten Sie?

Aufgabe 5 *(Energie-Funktional/Friedrichsungleichung)*
Zeigen Sie:

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist das Energie-Funktional

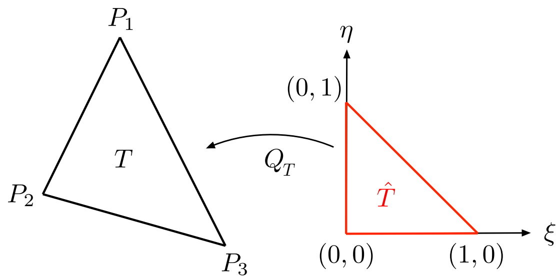
$$I(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)\, u(x)\; dx$$

beschränkt.

(ii) Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{X} := \{f \in H^1(a,b) : f(a) = 0\}$. Dann gilt die Friedrichs-Gleichung

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{1}{2}(b-a)\|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Aufgabe 6 *(Finite Elemente Methode)*



Bei der Finiten Elemente Methode (FEM) wird das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Triangulierung $\mathcal{T}_h$ diskretisiert. Für

$$T := \operatorname{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathcal{T}_h,$$

definieren wir die affine Abbildung Q_T, die das Referenzelement auf das Dreieck T abbildet, durch

$$Q_T : \hat{T} \to T$$

mit $Q_T(0,0) = P_1$, $Q_T(1,0) = P_2$ und $Q_T(0,1) = P_3$ (die Abbildung Q_T ist dadurch eindeutig bestimmt).
Außerdem definieren wir die Basis-Funktionen $\hat{\varphi}_i$ auf dem Referenzelement $\hat{T}$ durch

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1(\eta, \xi) &:= 1 - \xi - \eta \\
\hat{\varphi}_2(\eta, \xi) &:= \xi \\
\hat{\varphi}_3(\eta, \xi) &:= \eta
\end{aligned}$$

und die Basisfunktionen φ_i auf dem Dreieck T durch $\varphi_i := (\hat{\varphi}_i \circ Q_T^{-1})$ $(i = 1, 2, 3)$. Es gilt also $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$.
Berechnen Sie die folgenden Einträge für $i, j = 1, 2, 3$:

(i) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(ii) $\displaystyle\int_T \nabla\varphi_i(x,y)^T \nabla\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(iii) $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i(x,y) d(x,y)$ und $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial y}\varphi_i(x,y) d(x,y)$

(iv) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y) d(x,y)$

Sie können in dieser Aufgabe die Integrale entweder direkt berechnen oder die Transformation auf das Referenzelement verwenden (siehe Vorlesung).