Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2015/2016
Blatt 8
04.12.2015

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 11.12.2015, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 22 Theorie- und 18 Matlab-Punkte, sowie 9 Theorie- und 8 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 8) bei 70 Theoriepunkten und 75 Matlabpunkten.

Aufgabe 30 *(explizite Runge-Kutta-Verfahren)* (4T+3T Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heun (zweiter Ordnung) aus Aufgabe 26, Teil h) von Übungsblatt 6 ein zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren ist. Geben Sie die Funktionen $k_l(t, y)$, die Werte für die Parameter α_r, β_{rl} und γ_l sowie die Verfahrensfunktion $F(f, t, h, y)$ an. Stellen Sie dieses Verfahren durch ein Butcher-Tableau dar.

b) Zeigen Sie mit Satz 3.4.5, dass das Verfahren von Heun zweiter Ordnung genau die Konsistenzordnung 2 hat.

Aufgabe 31 *(Aufgabe 29 und explizite Runge-Kutta-Verfahren)* (2T+4T+3T+6T+3T*+1T* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, ob die Verfahren aus Aufgabe 29 vom letzten Übungsblatt explizite Runge-Kutta-Verfahren sind und, falls ja, welche Konsistenzordnung sie haben.

a) Geben Sie für das Verfahren aus Aufgabe 29, Teil a) die Verfahrensfunktion an.

b) Überprüfen Sie für das Verfahren aus Aufgabe 29, Teil a) den Ansatz auf Seite 78 des Skripts. Geben Sie dazu die Quadraturpunkte $s_1, \ldots, s_m$ sowie die Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ an. Wie lauten die Funktionen $k_1(t, y), \ldots, k_m(t, y)$ und die Parameter $\beta_{i,j}$? Wie müssen Sie die Werte für $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ wählen? Stellen Sie dieses Verfahren durch ein Butcher-Tableau dar und geben Sie die Stufenanzahl m dieses Verfahrens an?

c) Berechnen Sie mit Satz 3.4.5 die Konsistenzordnung dieses Verfahrens. Welche Konvergenzordnung hat dann dieses Verfahren aus Aufgabe 29, Teil a)? Stimmen Ihre theoretischen Überlegungen mit den numerischen Ergebnissen aus Aufgabe 29 überein?

d) Überprüfen Sie analog zum obigen Aufgabenteil b) auch für die Verfahren aus Aufgabe 29, Teil f), Teil k) und Teil m), ob sie Runge-Kutta-Verfahren sind.

   i) Sie brauchen dabei nur die Größen anzugeben, die sich gegenüber dem Verfahren aus Aufgabe 29, Teil a) geändert haben.

   ii) Geben Sie die jeweilige Verfahrensfunktion und das jeweilige Butcher-Tableau an.

   iii) Welche Konsistenzordnung ergibt sich jeweils aus den Bedingungen von Satz 3.4.5?

   iv) Stimmt jeweils die theoretisch bestimmte Konvergenzordnung mit dem numerischen Ergebnis aus Aufgabe 29 überein?

e) Untersuchen Sie nun das Verfahren aus Aufgabe 29, Teil n). Handelt es sich dabei um ein Runge-Kutta-Verfahren? Falls ja, geben Sie das Butcher-Tableau und die Stufenanzahl dieses Verfahrens an.

f) Welche Ordnung kann ein Verfahren mit der Stufenanzahl des Verfahrens aus Aufgabe 29, Teil n) höchstens haben?

Aufgabe 32 *(Programmieraufgabe: explizite Runge-Kutta-Verfahren)* (6M+2M+2M+6M*+2M* Punkte)

a) Schreiben Sie analog zu Aufgabe 26 und Aufgabe 29 eine Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)`, die für einen gegebenen Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y^0$$

mit einem Runge-Kutta-Verfahren berechnet. Die Parameter sind dabei wie in Aufgabe 26: `f` ist die Funktion f als *function handle*, `y0` ist der Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ und `tk` ist ein Gitter mit den diskreten Zeitpunkten t_k. Der Rückgabewert `yk` ist der Vektor der einzelnen Näherungswerte y^k.

Ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)` soll den Algorithmus eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens unabhängig von den konkreten Werten für α, β und γ realisieren. Die konkreten Werte für α, β und γ, also das Butcher-Tableau, soll ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)` über den Parameter `bt` erhalten. `bt` soll dabei eine Struktur mit den Komponenten

i) `bt.m` für die Stufenanzahl des Runge-Kutta-Verfahrens,

ii) `bt.alpha` für den Spaltenvektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ des Runge-Kutta-Verfahrens,

iii) `bt.beta` für die Matrix $\beta = (\beta_{i,j})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ des Runge-Kutta-Verfahrens und

iv) `bt.gamma` für den Zeilenvektor $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ des Runge-Kutta-Verfahrens

sein. Die Matrix β soll dabei auf und oberhalb der Diagonalen nur Werte $\beta_{i,j} = 0$ enthalten.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `bt = rKa29a()`, die das Butcher-Tableau des Verfahrens aus Aufgabe 29 a) zurück gibt. Der Rückgabewert `bt` soll also vom Typ der oben beschriebenen Struktur mit den Komponenten `bt.m`, `bt.alpha`, `bt.beta` und `bt.gamma` sein.

c) Testen Sie Ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)`. Sie können dazu Ihre Matlabskripte `vergleichESV` oder `konvergenzESV` und/oder Teile davon verwenden.

d) Schreiben Sie weitere Matlabfunktionen `bt = rKa29f()`, `bt = rKa29k()` und `bt = rKa29m()`, die die Butcher-Tableaus der Verfahren aus Aufgabe 29, Teil f), Teil k) und Teil m) zurück geben. Testen Sie Ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)` auch mit diesen Butcher-Tableaus.

e) Schreiben Sie auch für das Verfahren aus Aufgabe 29 n) eine Matlabfunktionen `bt = rK4()`. Bei diesem Verfahren handelt es sich um das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4. Testen Sie auch mit diesem Verfahren Ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)`.

Aufgabe 33 *(Programmieraufgabe: explizite Runge-Kutta-Verfahren und Zeemann's Herzschlagmodell)* (8M Punkte)

Haben Sie in der vorigen Aufgabe 32 darauf geachtet, dass Ihre Matlabfunktion `yk = rungeKutta(f, y0, tk, bt)` auch für Systeme von Differentialgleichungen geeignet ist? Testen Sie dies mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 am Zeemann'schen Herzschlagmodell aus Aufgabe 27 von Blatt 6.

Aufgabe 34 *(Wahr oder falsch?)* (5T* Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn eine Verfahrensfunktion F eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann kann man mit dem entsprechenden Einschrittverfahren jede Anfangswertaufgabe lösen, da der Diskretisierungsfehler klein bleibt.

b) Bei jedem Einschritt-Verfahren kann man durch Verkleinerung der Schrittweite einen beliebig kleinen Diskretisierungsfehler erhalten.

c) Jedes m-stufige Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung m.

d) Für jede gewünschte Konsistenzordnung m kann man ein m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit dieser Ordnung konstruieren.

e) Auch bei Runge-Kutta-Verfahren mit mehr als 3 Stufen gilt "Konsistenzordnung = Konvergenzordnung"

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Matlab-Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt08** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.