Elemente der Algebra: Blatt 3

A1. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Für $a \in G$ ist $\mathrm{ord}(a) := \min\{k \in \mathbb{N} : a^k = 1\}$ die *Ordnung* von a.

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in G$ gilt: $a^k = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}(a) \mid k$.[1] (7)

(b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in G$ gilt: Sind a, b konjugiert, dann ist $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$. (7)

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sich die Aussage der vorigen Teilaufgabe nicht umkehren lässt. (6)

A2. (a) Betrachten Sie analog zum 15er Puzzle das 9er Puzzle. Finden Sie eine Lösung zu folgender Anfangssituation: (10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & \cdot \end{pmatrix}$$

Finden Sie also eine Sequenz von Zügen, die das Puzzle in den folgenden Zustand bringt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \cdot \end{pmatrix}$$

Geben Sie Ihre Lösung als Sequenz der freien Felder an, wenn die Felder von 1 bis 9 nummeriert sind; ihre Lösung sollte also mit 9 beginnen und enden.

(b) Zusatzaufgabe: Wir bestimmen unter allen Lösungen diejenigen, die die wenigsten Schritte benötigen. Ist Ihre Lösung unter diesen Abgaben, erhalten Sie 10 Bonuspunkte. (+10)

Abgabe bitte nur zu zweit am Montag, 4.11.2013 in der Übung. Beschriften Sie ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer beider Studenten.

[1] Das bedeutet $\mathrm{ord}(a)$ teilt k, d.h. es gibt eine ganze Zahl m mit $k = \mathrm{ord}(a) \cdot m$.