Seminar Gegenbeispiele in der Wahrscheinlichkeitstheorie

-

Zentraler Grenzwertsatz und diverse Grenzwertsätze

Klaus Kuchler

07. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Notationen, Bedingungen und Sätze

Notationen

Sei $\{X_n, n \geq 1\}$ *eine Folge* **unabhängiger** *ZVen auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Dann bezeichne*

- $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *die Summe der ersten* n *ZVen,*
- $\sigma_k^2 = \operatorname{Var} X_k$ *die Varianz der ZV* X_k *und*
- $s_n^2 = \operatorname{Var} S_n = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ *die Varianz der Summe* S_n.

Zentraler Grenzwertsatz

Die obige Folge $\{X_n\}$ *erfüllt den* **Zentralen Grenzwertsatz**, *wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}S_n)/s_n \leq x] = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h. die Verteilungsfkt. von $(S_n - \mathbb{E}S_n)/s_n$ *für* $n \to \infty$ *konvergiert punktweise bzw. sogar gleichmäßig in* x *gegen* $\mathcal{N}(0,1)$.

Notationen, Bedingungen und Sätze

Bedingungen

F_k Verteilungsfkt. von X_k und o.B.d.A. sei $\mathbb{E}X_k = 0 \ \forall k \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|u|\geq\varepsilon s_n} u^2 \,\mathrm{d}F_k(u) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \qquad \text{(Lindeberg-Bed.)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0 \qquad \text{(Fellersche Bed.)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \qquad \text{(u.a.n. Bed.)}$$

Notationen, Bedingungen und Sätze

Lindeberg Theorem

(Lindeberg-Bed.) $\Rightarrow$ Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)
(hinreichende Bedingung)

Lindeberg-Feller Theorem

Wenn (Fellersche Bed.) *oder* (u.a.n. Bed.) *erfüllt ist, dann gilt*

$$\text{(Lindeberg-Bed.)} \Longleftrightarrow \text{(ZGWS)}$$

Beispiel 1: ZGWS ist nicht erfüllt

$\{X_k, k \geq 1\}$ unabh. ZVen mit Verteilung

- $\mathbb{P}[X_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$ und
- für $k \geq 2,\ \ c \in (0,1)$ gilt $\mathbb{P}[X_k = 0] = (1 - \frac{1}{k^2})c$,
  $\mathbb{P}[X_k = \pm 1] = \frac{1}{2}(1-c),\ \ \mathbb{P}[X_k = \pm k] = \frac{1}{2k^2}c$

Lindeberg-Bedingung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|u| \geq \varepsilon s_n} u^2 \,\mathrm{d}F_k(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2 \, \mathbb{1}\{|X_k| \geq \varepsilon \sqrt{n}\}] \neq 0$$

$\Rightarrow$ Lindeberg-Bedingung ist nicht erfüllt

Beispiel 1: ZGWS ist nicht erfüllt

Ist nun der ZGWS erfüllt oder nicht?
u.a.n. Bedingung:

$$\mathbb{P}[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] = \mathbb{P}[|X_k| \geq \varepsilon\sqrt{n}] = \begin{cases} 0, & k < \lceil \varepsilon\sqrt{n} \rceil \\ \frac{1}{k^2}c, & k \geq \lceil \varepsilon\sqrt{n} \rceil \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}[|X_k/s_n| \geq \varepsilon] \ \leq \max_{\lceil \varepsilon\sqrt{n} \rceil \leq k \leq n} \frac{1}{k^2}c \ \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n}c \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ u.a.n. Bedingung ist erfüllt (auch Fellersche Bed.)

Annahme: ZGWS gilt $\overset{\text{Linde.}-\text{Fell. Theo.}}{\Rightarrow}$ Lindeberg-Bed. gilt $\lightning$

$\Rightarrow$ ZGWS ist nicht erfüllt

Beispiel 2: Definitionsbereich für Normal-Konvergenz

$\{X_k, k \geq 1\}$ u.i.v. ZVen, die den ZGWS erfüllen und
$F_n(x) = \mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}S_n)/s_n \leq x]$.
Die gleichmäßige Konvergenz von $F_n(x) \to \Phi(x)$ auf $\mathbb{R}$ schließt gleichmäßige Konv. von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1 \qquad (\star)$$

auf irgendeinem endlichen Intervall von $\mathbb{R}$, z.B. $[0, a]$, $a = const.$, ein. Solche Intervalle sind Definitionsbereiche der Normal-Konvergenz.
Jedoch gilt $(\star)$ nicht auf allen endlichen Intervallen $[0, a_n]$, $a_n \to \infty$!

Beispiel 2: Definitionsbereich für Normal-Konvergenz

Betrachte $\{X_k, k \geq 1\}$ u.i.v. ZVen, $X_1 \sim Ber(p),\ p \in (0,1)$

$\Rightarrow \{X_k, k \geq 1\}$ erfüllen den ZGWS und $\mathbb{E}S_n = np,\ s_n^2 = np(1-p)$

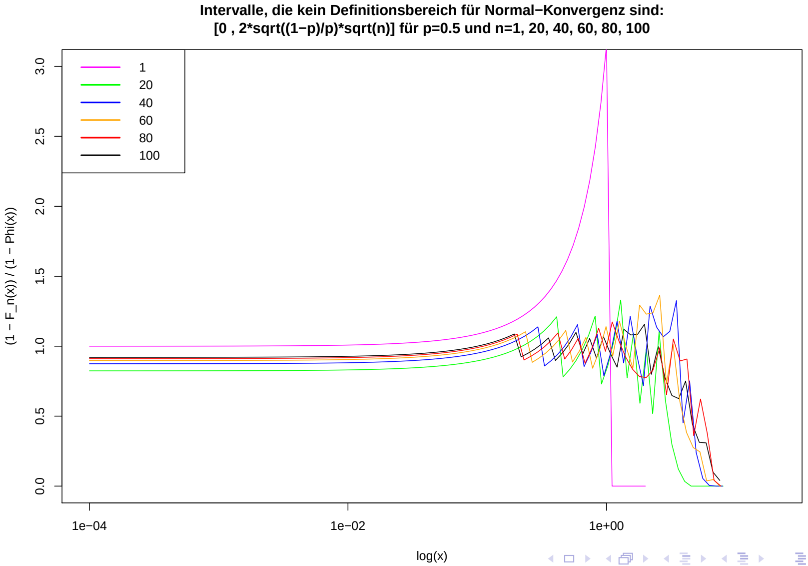
$$\Rightarrow \quad 1 - F_n(x) = \mathbb{P}[\tfrac{(S_n - np)}{\sqrt{np(1-p)}} > x] = \mathbb{P}[S_n > x\sqrt{np(1-p)} + np]$$

$$\Rightarrow \qquad (1 - F_n(x))/(1 - \Phi(x)) = 0 \text{ für } x > \sqrt{\tfrac{n(1-p)}{p}}$$

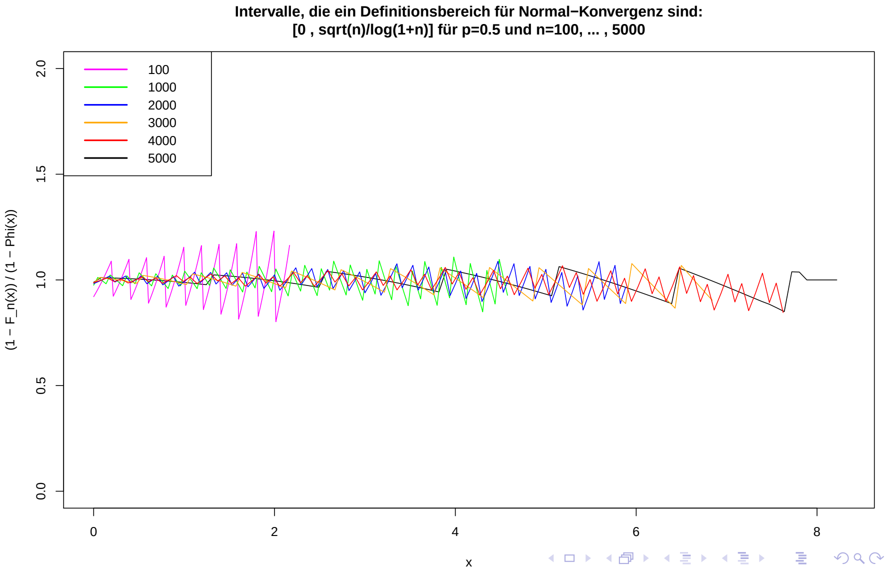
$\Rightarrow (\star)$ gilt nicht für alle Intervalle der Form $[0, \mathcal{O}(\sqrt{n})]$,
insbesondere nicht für $[0, c(p)\sqrt{n}]$ mit $c(p) > \sqrt{\frac{(1-p)}{p}}$

$\Rightarrow (\star)$ gilt jedoch für alle Intervalle der Form $[0, o(\sqrt{n})]$, z.B. für $[0, \sqrt{n}/\log(1+n)]$ $\Rightarrow$ Definitionsbereich für Normal-Konv.

Beispiel 2: Definitionsbereich für Normal-Konvergenz



Beispiel 2: Definitionsbereich für Normal-Konvergenz



Beispiel 3: $F_n \to \Phi \stackrel{?}{\Rightarrow} f_n \to \varphi$

Frage: Folgt aus (i) $F_n \to \Phi$ auch die Konv. von (ii) $f_n \to \varphi$?
(f_n Dichte von $(S_n - \mathbb{E}S_n)/s_n$ und φ Dichte von $\mathcal{N}(0,1)$)

Antwort: Während i.A. aus (ii)$\Rightarrow$(i) (Satz von Scheffé), gilt aus (i)$\Rightarrow$(ii) i.A. nicht!

Dazu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:

Sei X eine ZV mit Dichte $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \mathrm{e}^{-1} \\ \frac{1}{2|x| \log^2 |x|}, & |x| < \mathrm{e}^{-1}, x \neq 0 \end{cases}$

und $\{X_n,\ n \geq 1\}$ u.i.v. Kopien von X.

$\Rightarrow \{X_n\}$ erfüllt (i)

Beispiel 3: $F_n \to \Phi \overset{?}{\Rightarrow} f_n \to \varphi$

Wir betrachten nun die Dichte $g_2(x)$ der Summe $S_2 = X_1 + X_2$:

$$g_2(x) = \int_{-\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^{-1}} f(u) f(x-u) \,\mathrm{d}u$$

Gesucht: Untere Schranke für $g_2(x)$ auf $0 < x < \mathrm{e}^{-2} = \operatorname{argmin} f(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g_2(x) \geq \quad & \textstyle\int_{-x}^{x} f(u) f(x-u) \,\mathrm{d}u && \geq \int_{-x}^{x} f(x) f(x-u) \,\mathrm{d}u \\
= \quad & \tfrac{1}{2x \log^2 x} \textstyle\int_{-x}^{x} \tfrac{1}{2(x-u)\log^2(x-u)} \,\mathrm{d}u && = \frac{1}{2x \log^2 x} \left(\frac{-1}{2 \log 2x} \right) \\
\geq \quad & \tfrac{1}{2x \log^2 x} \left(\tfrac{-1}{2 \log x} \right) && = \frac{1}{4x |\log^3 x|}
\end{aligned}$$

Beispiel 3: $F_n \to \Phi \overset{?}{\Rightarrow} f_n \to \varphi$

Ähnlich folgt für die Dichte $g_n(x)$ der Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:

$$g_n(x) \geq \frac{c_n}{x|\log^{n+1} x|} \text{ für } c_n = const > 0,\ 0 < x < \mathrm{e}^{-n}$$

Daraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} s_n\, g_n(xs_n) \overset{1}{=} \infty \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$$

$\Rightarrow f_n(x)$ konvergiert nicht gegen $\varphi(x)$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz außerhalb einer Nullmenge

[1] x geht schneller gegen 0, als $|\log^{n+1} x|$ gegen ∞

Inhaltsverzeichnis

Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov

Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov

Sei $\{X_n, n \geq 1\}$ *eine Folge* **unabhängiger** *ZVen und* $X_n^{(c)} := X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq c\}$ *für ein* $c > 0$. *Eine* <u>*notwendige*</u> *Bedingung für die* $\mathbb{P}$*-f.s. Konvergenz der zufälligen Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *ist, dass die drei Reihen*

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n^{(c)}]$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n^{(c)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq c]$

für jedes $c > 0$ *konvergieren.*
Eine <u>*hinreichende*</u> *Bedingung ist die Konvergenz der drei Reihen für ein* $c > 0$.

Beispiel 1: Zufällige harmonische Reihe

$\{X_n, n \geq 1\}$ unabh. ZVen und $X_n = \pm\frac{1}{n}$ jeweils mit Wkt. $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Wähle $c = 1$ im Drei-Reihen-Satz von Kolmogorov und es folgt die Konvergenz der drei Reihen

$\Rightarrow$ f.s. Konvergenz der zufälligen harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \pm\frac{1}{n}$, wohingegen ja die deterministische harmonische Reihe divergiert!

QUIZFRAGE:
Gilt die f.s. Konvergenz auch für

- $\sum_{n=1}^{\infty} \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ mit $X_n = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ für $p = \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \pm\frac{1}{n}$ mit $\begin{cases} X_n = -\frac{1}{n} \text{ für } p \in (0, \frac{1}{2}) \\ X_n = \frac{1}{n} \text{ für } 1 - p \end{cases}$

Beispiel 2: Rolle der Unabhängigkeit im Drei-Reihen-Satz

Aus dem Drei-Reihen-Satz erhalten wir direkt folgenden Satz:

Zwei-Reihen-Satz

Sei $\{X_n, n \geq 1\}$ *eine Folge* **unabhängiger** *ZVen und die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n$ *sind konvergent, dann konvergiert die zufällige Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ $\mathbb{P}$*-f.s..*

Wie verhält es sich jedoch bei Abhängigkeit der ZVen?

Dazu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:

Sei ξ eine nicht degenerierte ZV mit $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = b^2$.
Definiere $X_n := \xi/n$, $n \geq 1$, d.h. die ZVen X_n sind abhängig.

Beispiel 2: Rolle der Unabhängigkeit im Drei-Reihen-Satz

Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n] = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n = b^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$.

Was ist nun mit $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$?

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) = \xi(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \forall \omega \in \Omega \\ \Rightarrow & \text{konvergent auf} & A := \{\omega : \xi(\omega) = 0\} \text{ mit Wkt. } \mathbb{P}[A] = p \in [0,1) \\ \Rightarrow & \text{divergent auf} & A^c := \{\omega : \xi(\omega) \neq 0\} \text{ mit Wkt. } \mathbb{P}[A^c] = 1 - p \end{array}$$

Allgemein gilt bei Abhängigkeit der X_n:

$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ konv.}] = p \in [0,1)$

Beispiel 3: Erwartungswert $\longleftrightarrow$ unendl. Summation

Es gilt: Wenn $\{X_n, n \geq 1\}$ ZVen sind mit $X_n \geq 0 \ \forall n$, dann ist folgendes möglich:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n$$

Frage: Doch was ist, wenn $X_n \geq 0$ <u>nicht</u> gilt?

Antwort: Die obige Gleichung ist falsch, selbst bei Konv. von $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$!

Beispiel 3: Erwartungswert $\longleftrightarrow$ unendl. Summation

Dazu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:

$\{\xi_n, n \geq 1\}$ u.i.v. ZVen mit $\mathbb{P}[\xi_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$ und eine Stoppzeit $\tau = inf\{n \geq 1 : \sum_{k=1}^{n} \xi_k = 1\}$ mit $inf\{\emptyset\} = \infty$.
Definiere nun $X_n := \xi_n \mathbb{1}\{\tau \geq n\}$.

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \mathbb{1}\{\tau \geq n\} = \sum_{n=1}^{\tau} \xi_n = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = 1$$

$$\underset{\text{unabh.}}{\overset{\xi_n, \mathbb{1}\{\tau \geq n\}}{\Rightarrow}} \qquad \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\xi_n \mathbb{E}\mathbb{1}\{\tau \geq n\} = 0 \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n = 0$$