Tutorium 5 - Aufgaben

5 Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

5.1 Eigenwerte: Definition und Berechnung

Aufgabe 1: Es sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeige, dass A^k den Eigenwert λ^k besitzt

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, falls $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$ Was lässt sich über das Spektrum einer nilpotenten Matrix sagen?

Aufgabe 2: Berechne für die folgenden Matrizen die Eigenwerte sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ \alpha & -1-\alpha & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Diagonalisierbarkeit

Aufgabe 3: Welche der Matrizen A und F ist diagonalisierbar? Diagonalisiere diese und bestimme für die andere Matrix M eine unitäre Matrix U und eine obere Dreiecksmatrix D mit $D = U^*MU$. Berechne außerdem A^{10}.

5.3 Cayleigh-Hamilton

Berechne mithilfe des Satzes von Cayleigh-Hamilton nochmals die Inverse von
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$