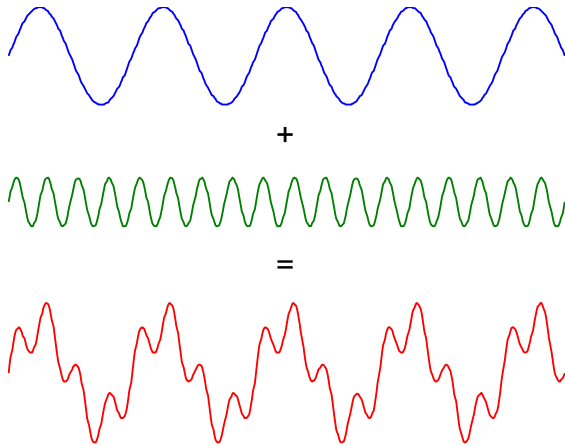


- **Einordnung und Motivation**
- **Grundlegende Definitionen**
  - Kontinuierliches Signal
  - Quantisiertes Signal
  - Zeitdiskretes Signal
  - Digitales Signal
  - Auflösung der A/D- Umsetzer der MicroAutoBox
  - Kontinuierliches System
  - Abtastsystem
  - Diskretes System
- **Schreibweise diskreter Signale**

- **Elementare diskrete Signale**
  - Einheitsimpuls, Impulsfolge
  - Einheitssprung, Sprungfolge
  - Energie- und Leistungssignale
- **Eigenschaften diskreter Systeme**
  - Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität
  - Gewichtsfolge und Faltungssummation
  - Differenzengleichung eines  $PT_1$ -Systems



- **Zerlegung periodischer Funktionen in eine Reihe harmonischer Funktionen.**
- **Bestimmung und Bedeutung des Amplitudenspektrums eines Signals**
- **Bedeutung in den Bereichen**
  - Signalanalyse
  - Schwingungstechnik
  - Akustik



➤ Eine periodische Funktion kann in eine Funktionenreihe aus **Sinus-** und **Kosinusfunktionen** zerlegt werden.

■ Reelle Fourier-Reihe  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

reelle Koeffizienten

■ Komplexe Fourier-Reihe  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

i.a. komplex

■ Betrag-Phasen-Darstellung  $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

reell



## Fourier-Transformation versus Laplace-Transformation

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

- Die Fourier-Transformation ist wie die Laplace-Transformation eine **Integraltransformation**.
- Für Funktionen  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  entspricht die Laplacetransformierte von  $f(t)$  der Fouriertransformierten von  $f(t)e^{-\sigma t}$ .
- Bereits einfache Funktionen wie z.B. die **Sprungfunktion**  $1(t)$  erfüllen die Konvergenzbedingung der Fourier-Transformation nicht.
- Die **Fourier**-Transformation ist besser für die **Analyse** von **Signalen** geeignet.
- Die **Laplace**-Transformation ist besser für die **Analyse** und die Beschreibung von **Systemen** geeignet.



## Was ist das Spektrum eines kontinuierlichen Signals ?

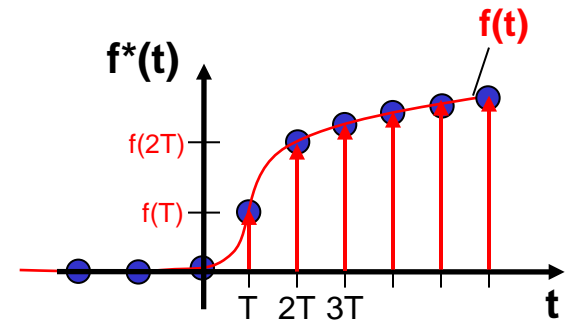
- Das **Spektrum**  $F(j\omega)$  ist die Fourier-Transformierte der Zeitfunktion  $f(t)$ .
- Das **Spektrum** gibt an, welche Frequenzen in einem Signal vorkommen und welches Gewicht sie haben.
- Einem **periodischen** Signal kann über die Fourier-Reihenentwicklung ein **diskretes Amplitudenspektrum** zugeordnet werden.
- Das **Spektrum** (Amplitudendichte, Phase) eines **nichtperiodischen** Signals ist kontinuierlich.
- Die Fourier-Transformation ist nur für kontinuierliche Zeitfunktionen  $f(t)$  definiert.



Gesucht ist eine kontinuierliche Darstellung eines zeitdiskreten Signals  $f(kT)$

Darstellung eines zeitdiskreten Signals  $f(kT)$  mit Hilfe einer Folge von Deltaimpulsen:

$$\begin{aligned}
 f^*(t) &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)
 \end{aligned}$$



Periodische Zeitfunktion

Ersetzen der Dirac-Impulsfolge durch die komplexe Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T}$$



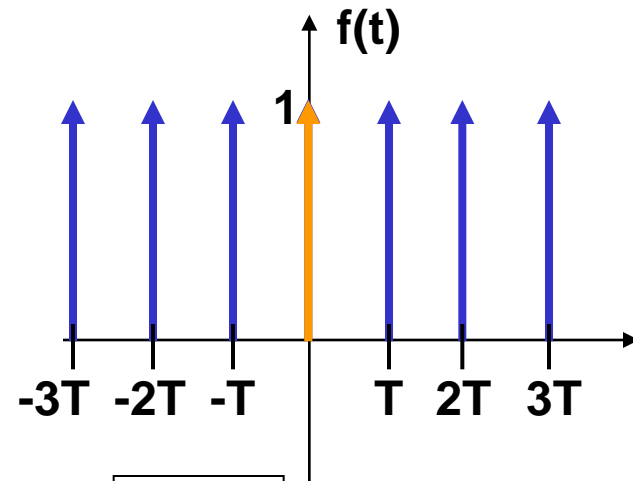
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

**Gesucht:**

**Komplexe Fourier-Reihe**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



**Fourier-Koeffizienten:**

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$



Aus der **Ausblendeigenschaft** des Deltaimpulses folgt:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 \cdot 0} = \frac{1}{T}$$



**Fourier-Reihe der Folge von Deltaimpulsen:**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

**liefert:**

$$f^*(t) = f(t) \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}.$$

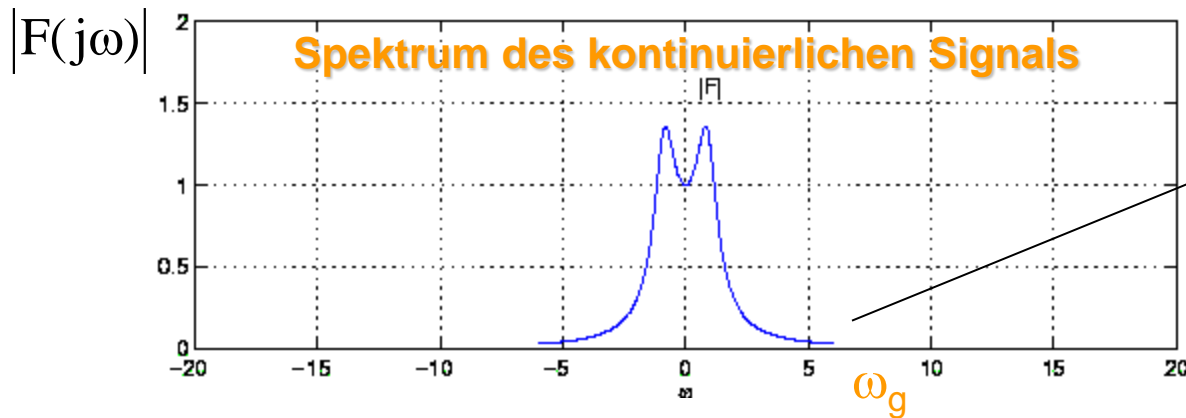
**Hierauf wird jetzt die Fourier-Transformation angewendet:**

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)e^{j\nu\omega_A t}\}.$$

**Mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes erhält man:**

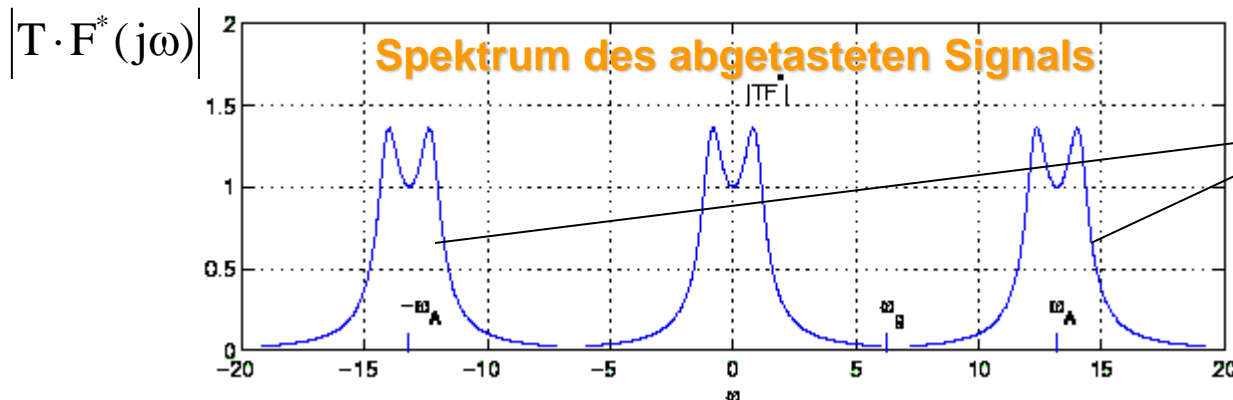
$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - \nu\omega_A)).$$





bandbegrenzt  
kontinuierliches  
Signal

$$F^*(j\omega) = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{v=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - v\omega_A)) .$$



Seitenbänder

**Spektrum eines zeitdiskreten Signals ist periodisch mit der Periode  $\omega_A = 2\pi/T$  und mit  $1/T$  gewichtet**



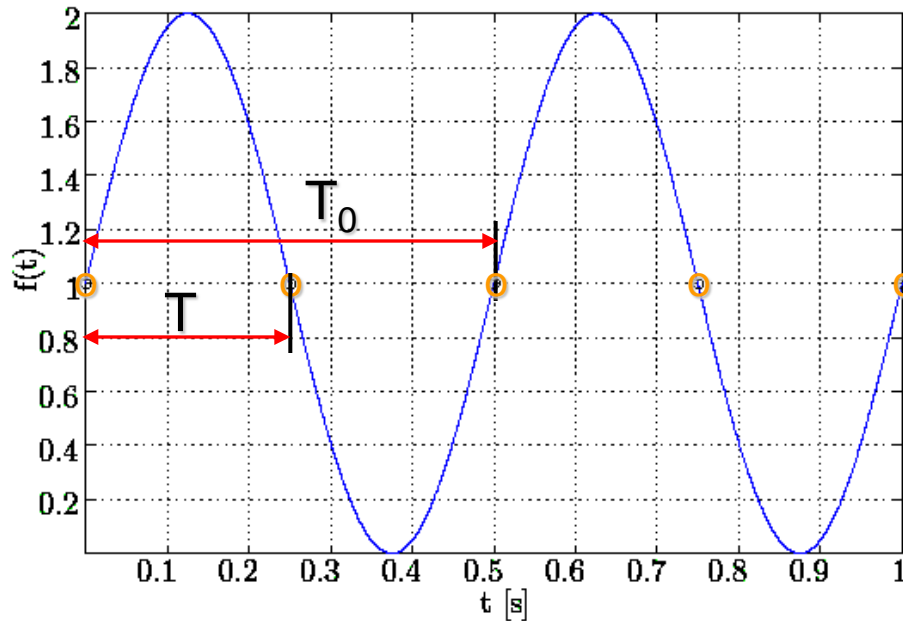


Bild 2.16: Abgetastetes Sinussignal

Periodendauer:  $T_0 = 0,5 \text{ s}$

Frequenz:  $f_0 = 2 \text{ Hz}$

Abtastintervall:  $T = 0,25 \text{ s}$

Abtastfrequenz:  $f_A = 4 \text{ Hz}$



**Die abgetasteten Werte des Sinussignals sind von einem Gleichspannungssignal nicht zu unterscheiden, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch ist, wie die Frequenz des Sinussignals.**



## Satz 2.1 Abtasttheorem von Shannon

- a) Ein kontinuierliches, **bandbegrenztes** Signal  $f(t)$  dessen Fouriertransformierte

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.29)$$

außerhalb des Intervalls  $(-\omega_g, \omega_g)$  verschwindet, ist eindeutig durch die äquidistanten Abtastwerte bestimmt, wenn für die Abtast(kreis)frequenz  $\omega_A = 2\pi f_A$  gilt:

$$\omega_A > 2\omega_g. \quad (2.30)$$

- b) Das kontinuierliche Signal  $f(t)$  kann dann aus der Abtastfolge  $f(k)$  mittels der *Shannon'schen Interpolationsformel* berechnet werden:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_A(t - kT)/2}{\omega_A(t - kT)/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_g(t - kT)}{\omega_g(t - kT)}. \quad (2.31)$$



## Beispiel: Audio-CD

**Frequenzbereich:** 5 Hz – 20 kHz

**Abtastfrequenz:** 44,1 kHz

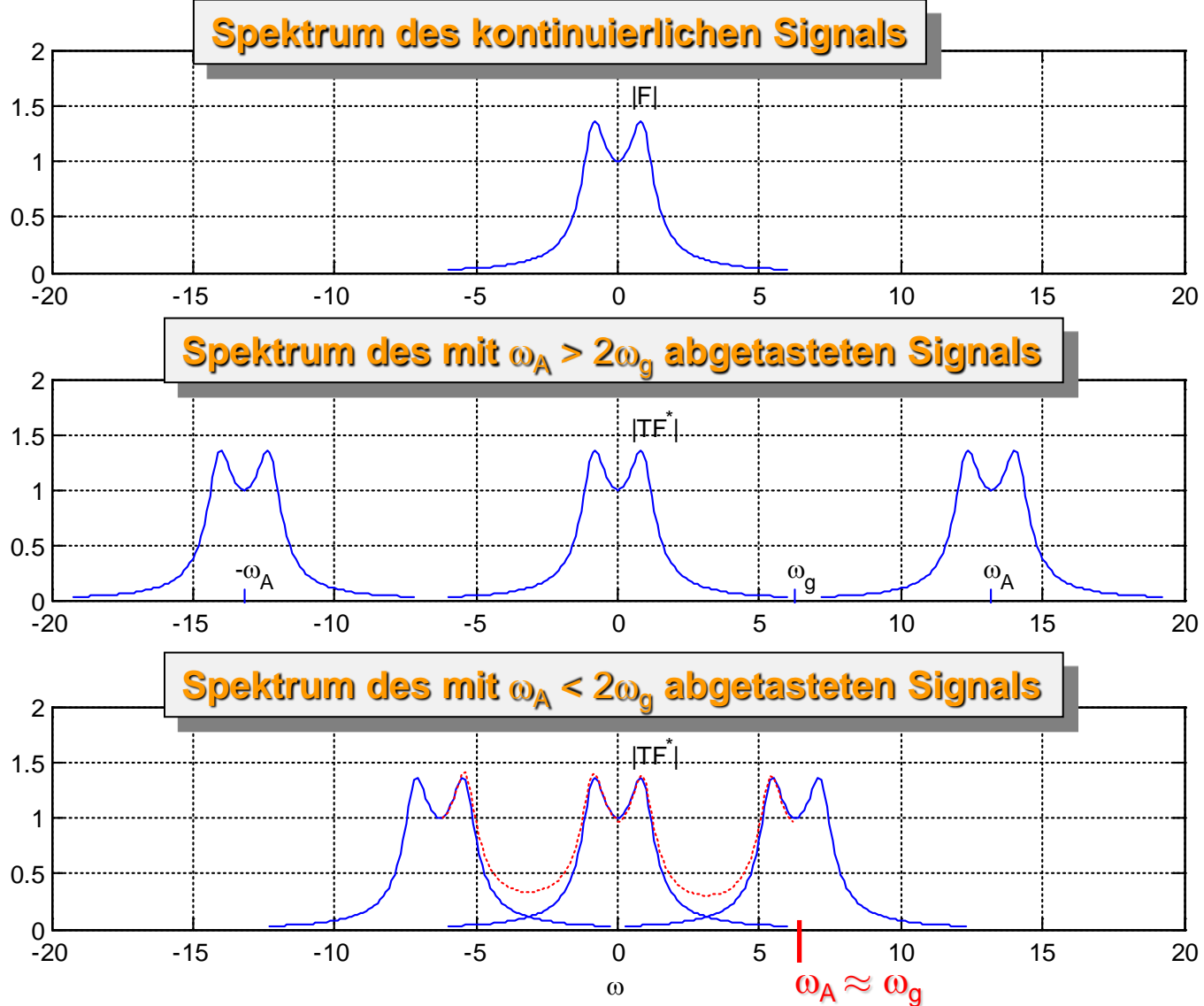
**Nyquistfrequenz**  $f_A/2$  liegt 10 %  
über der Grenzfrequenz 20 kHz

**Amplitudenauflösung:** 16 bit ( $1/32767=0,00003$ )



**Speicherbedarf:**  $16 \text{ bit} \cdot 2 \cdot 44100 \text{ Hz} / 8 = 176,4 \text{ KByte} / \text{s}$

$\Rightarrow 176,4 \text{ KByte} / \text{s} \cdot 60 \text{ s} = 10,6 \text{ MByte} / \text{Minute}$



Die Spektren des **kontinuierlichen** und des **diskreten** Signals stimmen offensichtlich im Intervall  $(-\omega_A/2 \leq \omega \leq \omega_A/2)$  überein, wenn die folgenden Forderungen eingehalten werden:

- $F(j\omega)$  muß **bandbegrenzt** sein, also im Frequenzbereich  $|\omega| \geq \omega_g$  identisch verschwinden.
- Die Abtastkreisfrequenz  $\omega_A = 2\pi f_A = 2\pi/T$  muß mindestens doppelt so groß sein, wie die maximale Frequenz  $\omega_g$  von  $F(j\omega)$ .



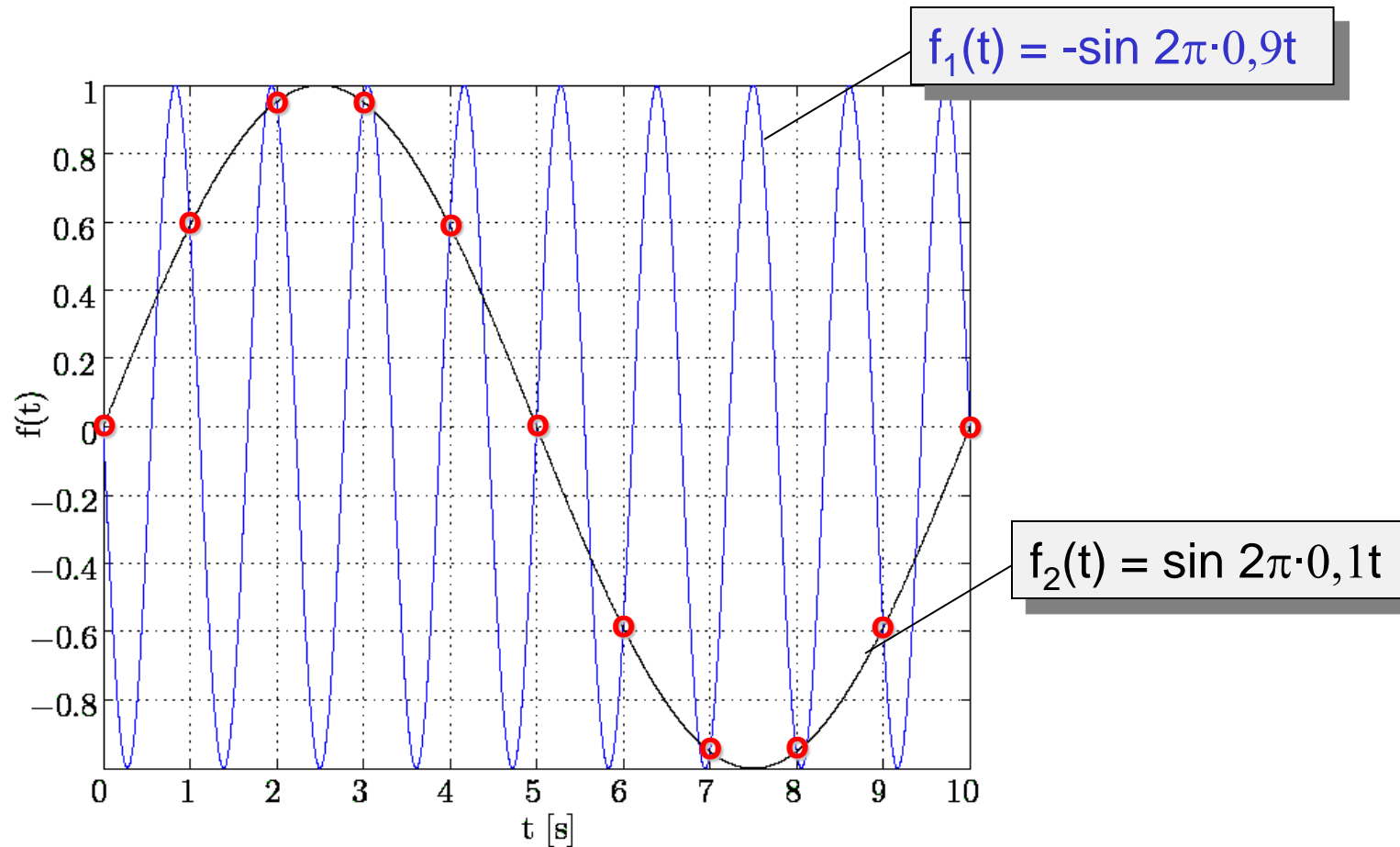
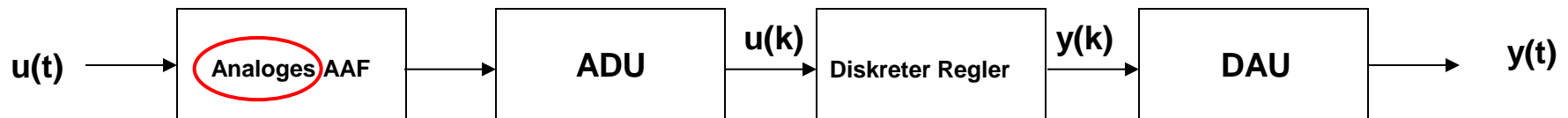


Bild 2.18: Zwei periodische Signale mit den Frequenzen 0,1 Hz bzw. 0,9 Hz, die bei einer Abtastperiode  $T = 1$  die gleichen abgetasteten Werte haben.

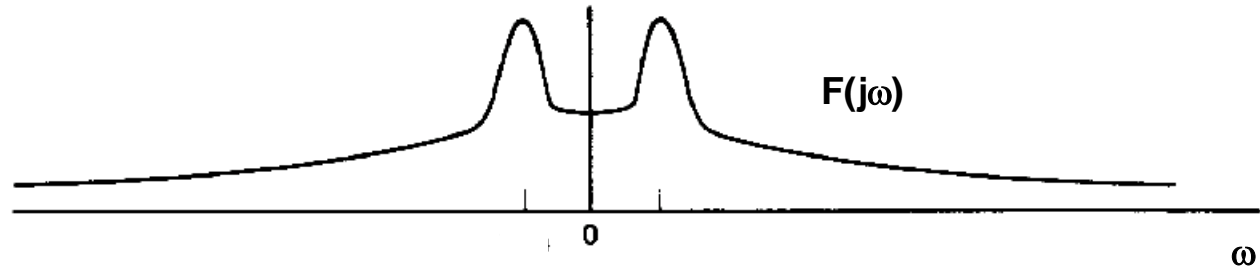


## Verhinderung der Frequenzfaltung

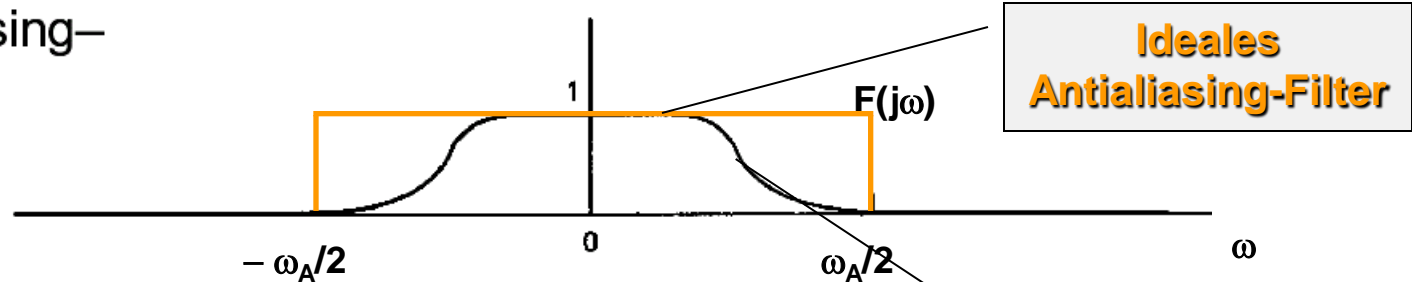
- Bei **nicht**-bandbegrenzten Signalen muss man **vor** der Abtastung mit Hilfe eines **Tiefpasses** (**Anti-Aliasing-Filter**) Frequenzanteile ab der **halben Abtastfrequenz** unterdrücken oder am besten vollständig verschwinden lassen.
- Bei **bandbegrenzten** Signalen muss die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der höchsten, im Signal vorkommenden Frequenz sein. Wenn nicht möglich, Einsatz eines Anti-Aliasing-Filters.



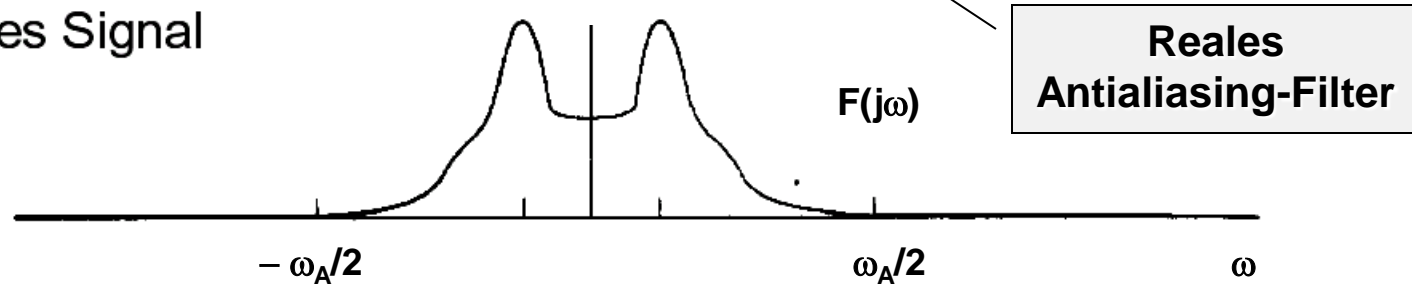
Original



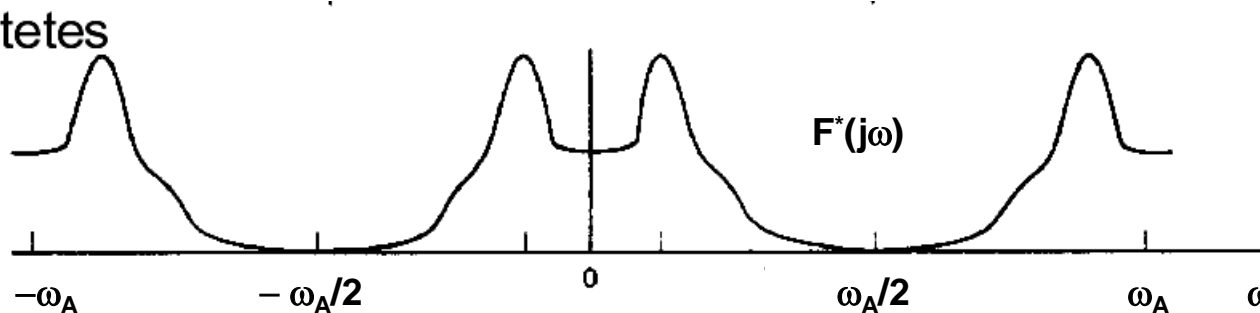
Antialiasing-Filter



Gefiltertes Signal



Abgetastetes Signal



	<b>Abtastfrequenz</b>
<b>Regelkreise im Kraftfahrzeug</b>	<b>100 – 150 Hz</b>
<b>Regelkreise im Flugzeug</b>	<b>50 – 100 Hz</b>
<b>Regelkreise in der Verfahrenstechnik</b>	<b>1 – 10 Hz</b>
<b>CD-Audio-Aufzeichnung</b>	<b>44,1 kHz</b>
<b>Signalverarbeitung mit Mikrocontroller</b>	<b>bis 50 MHz</b>

## Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels  
Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} u(t)$$

Beschreibung durch Über-  
gangsfunktion  $h(t)$  und  
Gewichtsfunktion  $g(t)$

## Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels  
Differenzgleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j)$$

Beschreibung durch  
Übergangsfolge  $h(k)$  und  
Gewichtsfolge  $g(k)$

Gegeben ist die DGL eines  $PT_1$ -Systems

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Abtastperiode

Ersetzen der Differentiation durch Differenzenquotienten liefert:

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \quad \text{mit} \quad a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}, \quad b_0 = \frac{T}{T_1 + T}$$

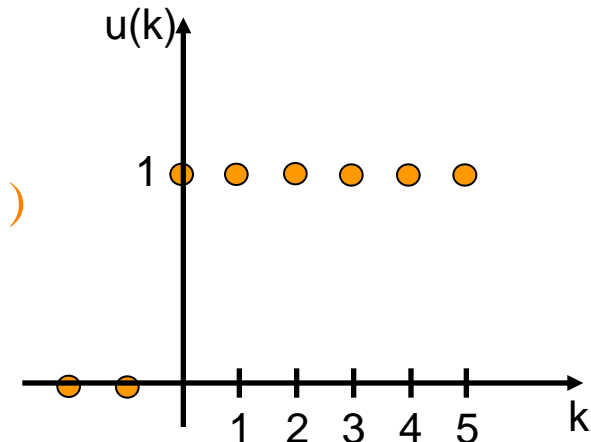
Gesucht die Antwort auf  $u(k) = 1(k)$ , ( $y(k) = 0$  für  $k \leq 0$ )

$$k = 0: \quad y(0) = 0$$

$$k = 1: \quad y(1) = -a_1 y(0) + b_0 u(1) = b_0$$

$$k = 2: \quad y(2) = -a_1 y(1) + b_0 u(2) = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1 - a_1)$$

$$k = 3: \quad y(3) = -a_1 y(2) + b_0 u(3) = b_0 - a_1 b_0(1 - a_1) = b_0(1 - a_1 + a_1^2)$$



$$y(k) = b_0 \sum_{i=1}^k (-a_1)^{i-1}$$

## Übergangsfolge

$$h(k) = b_0 \sum_{i=1}^k (-a_1)^{i-1}$$

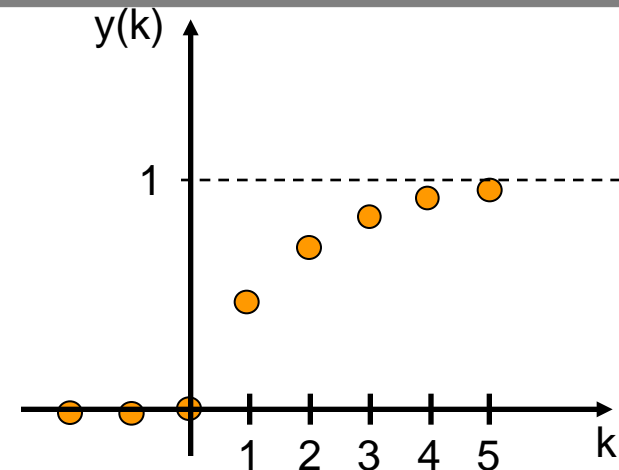
$$a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}$$

$|a_1| < 1$  für  $T > 0$   
immer erfüllt !

konvergiert für  $|a_1| < 1$  .

Für  $T_1 = T = 1$  erhält man  $a_1 = -0,5$  und  $b_0 = 0,5$  und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(k) &= h(k) \\ &= \{0; 0,5; 0,75; 0,875; \dots \} \end{aligned}$$



## Übergangsfolgen für verschiedene Abtastperioden $T$

$$y(k) = 0,5 \cdot y(k-1) + 0,5 \cdot u(k-1) \text{ für } T = T_1 = 1$$

