

Beschreibung und Analyse dynamischer Systeme im Zustandsraum

- **Steuerbarkeit eines dynamischen Systems**
 - **Unterscheidung:** Zustandssteuerbarkeit, Zustandserreichbarkeit
 - **Unterscheidung:** Steuerbarkeit und vollständige Steuerbarkeit
 - **Beispiel:** Parallelschaltung zweier identischer Systeme
- **Steuerbarkeitskriterien**
 - **Kalman-Kriterium** (Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen)
 - **Hautus-Kriterium** (Ermittlung, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind)
- **Beobachtbarkeit eines dynamischen Systems**

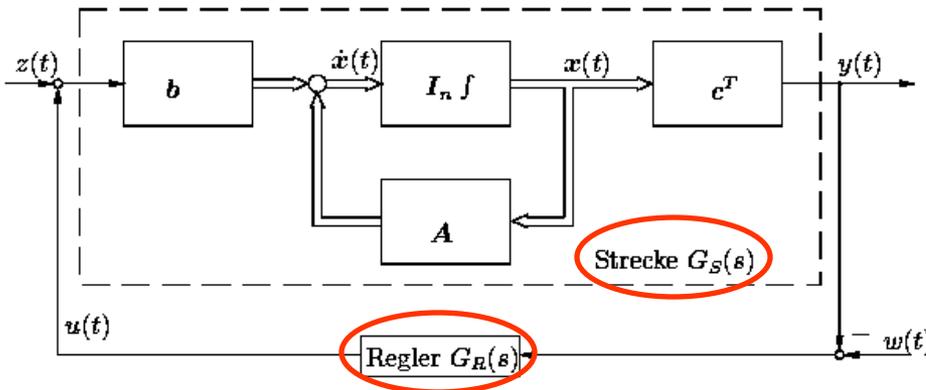
- **Beobachtbarkeitskriterien**
 - **Kalman-Kriterium** (Anzahl der beobachtbaren Zustandsgrößen)
 - **Hautus-Kriterium** (Überprüfung der einzelnen Eigenwerte)
- **Duales System (A^T, c^T, b^T) des Systems (A, b, c) und Dualität von Steuer- und Beobachtbarkeit**
- **Numerische Überprüfung der Steuerbarkeit**
- **Kalman-Zerlegung des Zustandsraummodells.**
- **Numerisch stabile Methode zur Überprüfung der Steuer- und Beobachtbarkeit.**
- **Nicht vollständig steuer- und/oder beobachtbare Systeme haben weniger Pole als Eigenwerte.**

Bei der Art der Rückkopplung kann zwischen

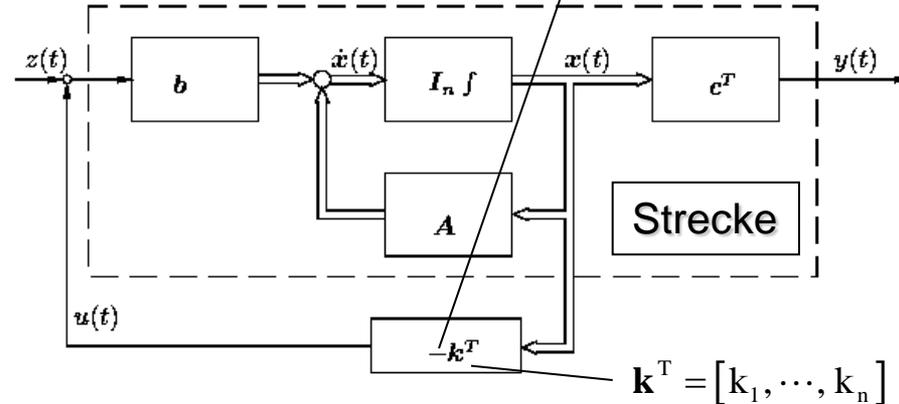
- a) Ausgangsrückführung
- b) Zustandsrückführung

unterschieden werden.

- Rückführung aller Zustandsgrößen
- Statischer Regler: $u(t) = -k^T x(t)$
- Beliebige Platzierung aller Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, wenn (A, b) vollständig steuerbar ist.

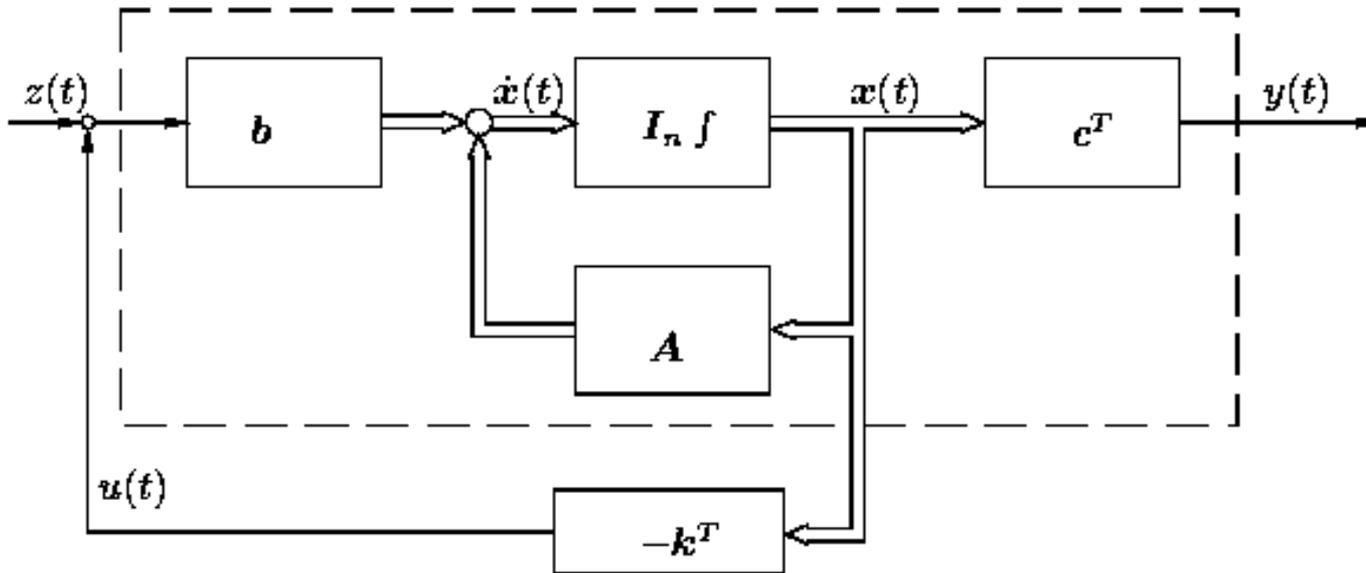


Ausgangsrückführung



Zustandsrückführung





- Eine Zustandsrückführung verändert die Eigendynamik.
- Ist (A,b) **vollständig steuerbar**, so kann die Eigendynamik beliebig eingestellt werden.
- Kein Soll-Ist-Vergleich $(w(t)-y(t))$.
- Stationäre Genauigkeit kann über ein Vorfilter eingestellt werden.



Modell der Regelstrecke:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}[z(t) + u(t)]$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

Durch Einsetzen des Regelgesetzes

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$$

erhält man das Zustandsmodell des geschlossenen Kreises:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \right] \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}z(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

Systemmatrix \mathbf{A}_G des geschlossenen Kreises



Polvorgabe für Eingrößensysteme

- Nach Vorgabe des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises gibt es eine **eindeutige Lösung** für die Elemente des Rückführvektors **k**.
- Anhand der **Regelungsnormalform** können diese Elemente mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs sofort angegeben werden.



Zustandsrückführung und Regelungsnormalform

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_R(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Eingangsvektor \mathbf{b}_R

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_R(t)$$

Systemmatrix \mathbf{A}_R

$$C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$\mathbf{b}_R \tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \tilde{k}_1 & \dots & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix}$$

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises können durch Wahl der Rückführverstärkung $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n$ **beliebig** eingestellt werden !!!!

$$\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_R - \mathbf{b}_R \tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + \tilde{k}_1) & -(a_1 + \tilde{k}_2) & \dots & \dots & -(a_{n-1} + \tilde{k}_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^T = \tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{T}_R^{-1}$$



Probleme bei der Realisierung eines Zustandsreglers:

- **Alle Zustandsgrößen müssen messbar sein!**
- **Man braucht also n Sensoren.**
 - ➡ **Aufwendig, teuer, evtl. unzuverlässig.**
- **Manche Zustandsgrößen können evtl. gar nicht gemessen werden, weil z.B.:**
 - **Umgebungsbedingungen (Temperatur, Druck, Vibrationen, Schmutz, usw.) zu "feindlich".**
 - **Sensoren zu teuer.**
 - **Kontinuierliche Messung nicht möglich.**



Lösung des Problems

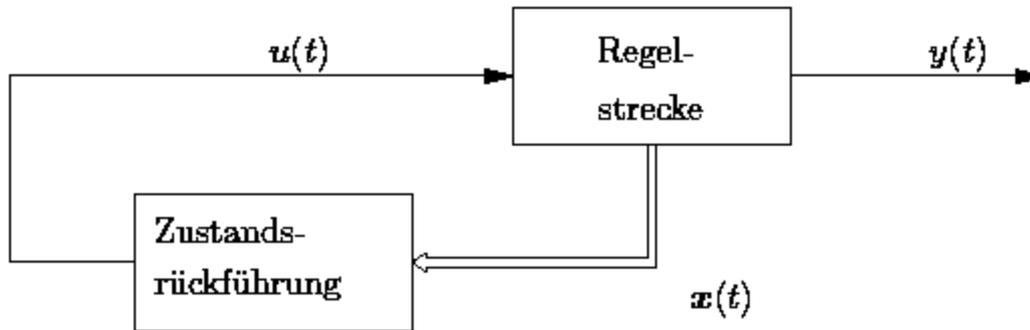
- **Beobachtung (Schätzung) der Zustandsgrößen.**
- **Rückführung der beobachteten Zustandsgrößen anstatt der gemessenen Zustandsgrößen.**
- **Beobachter = virtueller Sensor !**
 - **Die beobachteten Signale werden wie Messwerte verwendet, obwohl sie aus anderen Messsignalen berechnete Größen sind.**

Voraussetzungen

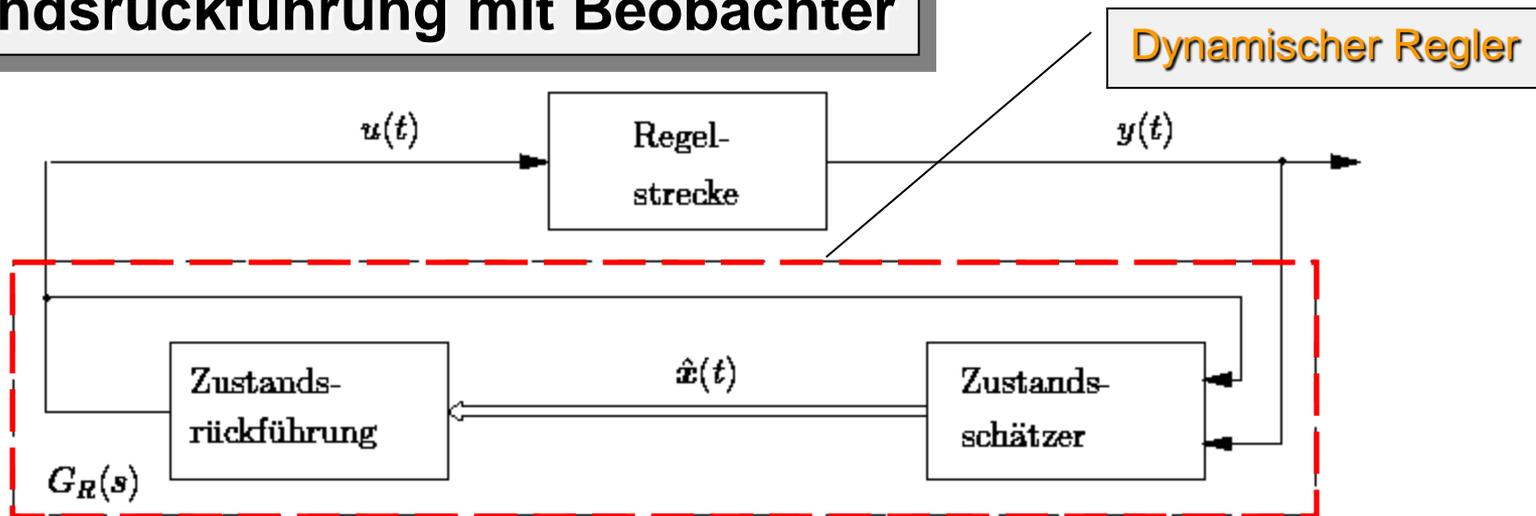
- **Ein gutes Modell der Regelstrecke !!!**
- **Vollständige Beobachtbarkeit des Modells !!!**



Strecke mit Zustandsrückführung

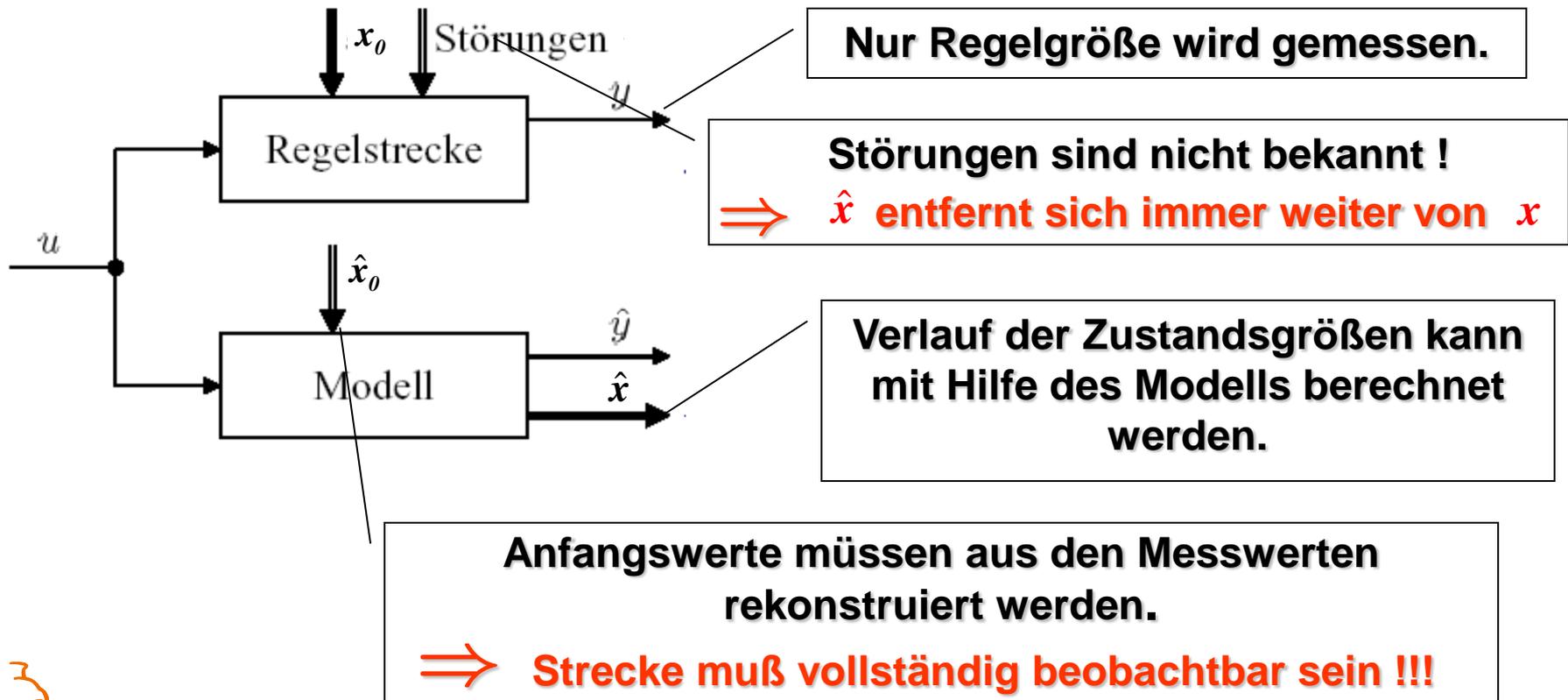


Zustandsrückführung mit Beobachter



Grundidee des Beobachters

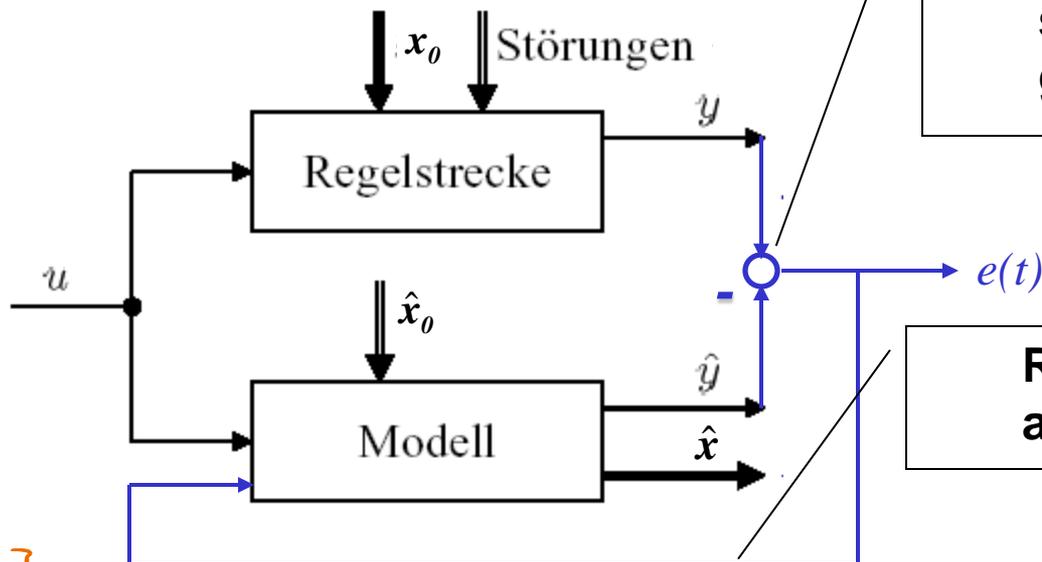
Simulation der Regelstrecke mit Hilfe eines Modells.



Grundidee des Beobachters (2)

Gemessene Regelgröße $y(t)$ wird bisher nur zur Rekonstruktion des Anfangswertes verwendet.

Idee von Luenberger 1964:

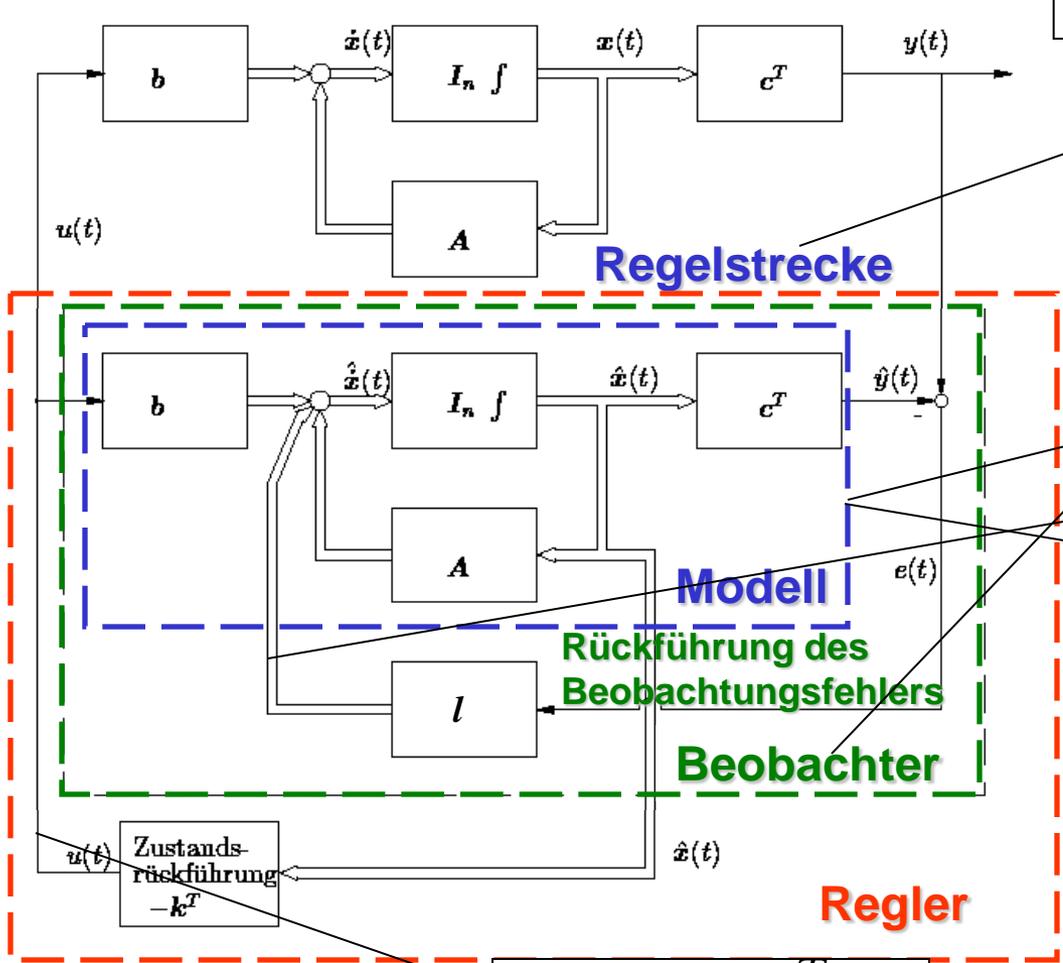


Kontinuierliche Berechnung der Differenz zwischen gemessener und simulierter Regelgröße.

Rückführung dieser Differenz auf den Eingang des Modells.



Luenberger-Beobachter



$$\begin{aligned}
 e(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\
 &= c^T x(t) - c^T \hat{x}(t) \\
 &= c^T (x(t) - \hat{x}(t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\
 y(t) &= c^T x(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + bu(t) \\
 &\quad + lc^T(x(t) - \hat{x}(t)) \\
 \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}(t)
 \end{aligned}$$

Rückführung spielt keine Rolle, wenn x_0 bekannt ist, das Modell exakt ist und keine Störungen auftreten !!!!

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t)$$



Konvergenz des Luenberger-Beobachters

Beobachtungsfehler: $\tilde{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$

Bilden der zeitlichen Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \cancel{\mathbf{b}u(t)} - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \cancel{\mathbf{b}u(t)} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{l}\mathbf{c}^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \\
 &= [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T][\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] = [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T]\tilde{e}(t)
 \end{aligned}$$



Satz 4.1 *Konvergenz der Beobachtungsfehler*

Für den Beobachtungsfehler

$$\tilde{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

eines vollständigen Zustandsbeobachters gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{e}(t)| = 0$$

für beliebige Anfangszustände des Systems und des Beobachters genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$ negativen Realteil haben. \square



Berechnung der Beobachterrückführung

Die Matrix $[A - lc^T]$ hat dieselben Eigenwerte wie die transponierte Matrix

$$[A - lc^T]^T = A^T - cl^T.$$

Die Matrix $[A^T - cl^T]$ ist die Systemmatrix des dualen Systems

$$\dot{\tilde{x}} = A^T \tilde{x}(t) + c\tilde{u}(t)$$

mit der Zustandsrückführung

$$\tilde{u}(t) = -l^T \tilde{x}(t)$$



Festlegung der Beobachtereigenwerte mit Hilfe der Berechnung einer Zustandsrückführung l für das System (A^T, c) .



Konsequenz der Dualität

- Die Dualität zwischen dem Entwurf eines Zustandsreglers und eines Beobachters bedeutet, dass jedes Entwurfsverfahren für Zustandsregler auch für den Entwurf von Beobachtern verwendet werden kann.
- Die Eigenwerte der Matrix $[A - Ic^T]$, die **Beobachter-eigenwerte**, können nur dann beliebig festgelegt werden, wenn das System (A, c) vollständig beobachtbar ist.



Beobachtungsnormalform

- Besonders einfach kann die Beobachterrückführung \mathbf{l} dann berechnet werden, wenn die Regelstrecke in Beobachtungsnormalform vorliegt.

- Der Vektor $\mathbf{l}_B = [a_{B_0} \ a_{B_1} \ \dots \ a_{B_{n-1}}]^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]^T$

$$\mathbf{l}_B = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$$

muss dann so gewählt werden, dass die Matrix

$$\mathbf{A}_B^T - \mathbf{c}_B \mathbf{l}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + l_1) & -(a_1 + l_2) & \dots & \dots & -(a_{n-1} + l_n) \end{bmatrix}$$

die gewünschten Beobachtereigenwerte besitzt.



Frage:

Werden die Eigenwerte des Regelkreises durch den Beobachter beeinflusst ?

Antwort:

**Nein !!!
Es gilt das Separationstheorem.**

Satz 4.2 Separationstheorem

Sofern das offene System $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vollständig steuer- und beobachtbar ist, können die n Eigenwerte der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises (ohne Beobachter) und die n Beobachtereigenwerte separat vorgegeben werden. \square



Beweis des Separationstheorems:

Homogene Zustandsgleichung des Gesamtsystems:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}$$

Mit $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{e}}$ erhält man

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{e}} .$$

Zusammen mit der Differentialgleichung des Beobachtungsfehlers

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T] \tilde{\mathbf{e}}(t)$$

erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}$$

Eigenwerte des Regelkreises

Eigenwerte des Beobachters



Anmerkungen zum Beobachterentwurf

- Im geschlossenen Regelkreis können die Dynamik der Regelstrecke und des Beobachters unabhängig voneinander mit Hilfe der Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{l} eingestellt werden.
- Die Eigenwerte des Beobachters sollten in der linken komplexen Ebene deutlich links von den dominierenden Eigenwerten des Regelkreises liegen.
- Mit einer solchen Wahl ist sichergestellt, dass der Beobachterfehler deutlich schneller abklingt als die Eigendynamik des Systems.
- Damit wird auch gewährleistet, dass der Beobachter die Regelgüte nur wenig verschlechtert im Vergleich zu einem Zustandsregler mit gemessenen Zustandsgrößen.



Anmerkungen zum Beobachterentwurf (2)

- Im Gegensatz zur realen Regelstrecke ist der Beobachter eine reine Simulation. Daher muss man bei der Wahl der Eigenwerte des Beobachters nicht auf Stellgrößenbeschränkungen achten.
- Die Beobachterdynamik darf in der Praxis nicht beliebig schnell gemacht werden !
- Es muß ein Kompromiß zwischen schneller **Beobachterdynamik** und **Rauschempfindlichkeit** gefunden werden.
- Je stärker die Messgröße $y(t)$ verrauscht ist, desto langsamer sollte der Beobachter eingestellt werden.



Entwurf einer Zustandsrückführung und eines Beobachters

Voraussetzung: Die Regelstrecke (A, b, c) ist vollständig steuer- und beobachtbar.

1. Überprüfung, daß die Regelstrecke vollständig steuer- und beobachtbar ist.
2. Entwurf einer Zustandsrückführung

$$u(t) = -k^T x(t),$$

die die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen erfüllt.

3. Anhand der Eigenwerte der Matrix $A - bk^T$ werden die Beobachtereigenwerte festgelegt.
4. Bestimmung des Vektors l der Beobachterrückführung als Zustandsrückführung des dualen Systems (A_B^T, c_B) .
5. Bewertung des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises anhand von Simulationsuntersuchungen.

Ergebnis: Zustandsrückführung k , Beobachter mit Rückführvektor l .

