Mischverteilung

Voraussetzung und verwandte Themen

Für diese Beschreibungen sind Grundlagen der Statistik und insbesondere der statistischen Verteilungen vorteilhaft. Weiterführende Themen sind:

www.versuchsmethoden.de/Normalverteilung.pdf

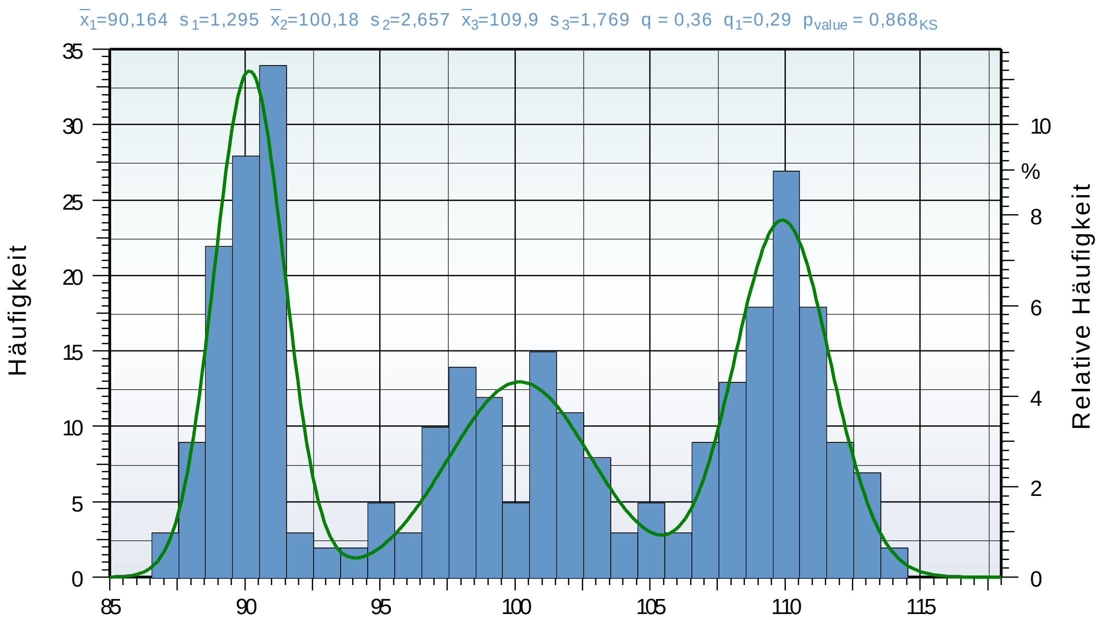
www.versuchsmethoden.de/Weibull-Analysen.pdf

www.versuchsmethoden.de/Verteilungstests.pdf

www.versuchsmethoden.de/Prozessfähigkeit.pdf

Einführung

Überlagern sich verschiedene Verteilungen, so spricht man von einer Mischverteilung. Im Falle einer 2-fach Mischverteilung nennt man diese auch bimodal. Häufige Ursachen sind etwa Fertigungschargen mit unterschiedlichen Mittelwerten, die vermengt sind. Letztlich sind beliebig viele Vermengungen möglich. Folgende Darstellung zeigt eine Mischverteilung mit mindestens 3 Bereichen.



Geht es um Lebensdaueruntersuchungen, so ist es möglich, dass unterschiedliche Schädigungsgründe vorliegen (konkurrierende oder alternative Ausfallmechanismen).

Ziel und Nutzen

Mischverteilungen sind insbesondere bei der Bestimmung einer Prozessfähigkeit wichtig. Durch die Anwendung von Mischverteilungen erhält man meist eine bessere Prozessfähigkeit, auch wenn man dann nicht mehr von einem stabilen Prozess redet. Insgesamt ist die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mit der Mischverteilung exakter, denn es gibt immer mehr oder weniger „Unregelmäßigkeiten“. Allerdings sollte man die Mischverteilung nur anwenden, wenn der Test auf die erwartete Verteilung abgelehnt wird.

Mischverteilung

Grundlagen

Mehrparametrige Normalverteilung

4-parametrige Normalverteilung

Die 4-parametrige Normalverteilung wird z.B. für konkurrierende Bruchursachen angewendet. Beispielsweise ist die eine Bruchursache ein Lunker und die andere eine Kerbwirkung an der Oberfläche. Die Versuche sind dabei in der Regel statisch, z.B. Biege- oder Zugversuche mit x = Kraft. Hier werden die kumulativen Verteilungsfunktionen zweier Normalverteilungen mit ihrem jeweiligen Mittelwert und der Standardabweichung miteinander kombiniert:

$$\boldsymbol{H_{(t)} = \Phi_{x;\,\bar{x}1;\,s1} + \Phi_{x;\,\bar{x}2;\,s2} - \Phi_{x;\,\bar{x}1;\,s1} \cdot \Phi_{x;\,x2;\,s2}}$$

mit $\Phi_{x;\,\bar{x};\,s}$ Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Das Produkt beider Verteilungen wird nochmal abgezogen, da hier davon ausgegangen wird, dass nicht beide Bruchursachen gleichzeitig auftreten.

5-parametrige Normalverteilung

Eine bimodale Verteilung mit alternativen Ausfallursachen liegt vor, wenn in einer Stichprobe z.B. zwei Chargen mit verschiedenen Versagensmechanismen vermischt vorliegen. Unter Belastung versagt jede Einheit nach ihrem jeweilig eigenen Mechanismus. Der Anteil der Charge 1 und 2 ist über q bzw. $1\text{-}q$ definiert:

$$\boldsymbol{H_{(t)} = q\,\Phi_{x;\,\bar{x}1;\,s1} + (1-q)\,\Phi_{x;\,\bar{x}2;\,s2}}$$

mit $\Phi_{x;\,\bar{x};\,s}$ Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Wie bei der 4-parametrigen Normalverteilung sind hier die Versuche in der Regel statisch, z.B. Biege- oder Zugversuche mit x = Kraft.

Die 4 oder 5 Parameter müssen iterativ gelöst werden. Es besteht die Möglichkeit nach bekannter Methode der kleinsten Abweichungsquadrate zu optimieren, oder nach der Max-Likelihood-Methode. Dabei wird die jeweilige Dichtfunktion partiell nach den Parametern abgeleitet und zu 0 gesetzt. Die dabei entstehenden Formeln sind sehr komplex. Alternativ kann man numerisch für alle Ausfallpunkte xi das Maximum $\prod \mathrm{h}_{(\mathrm{xi})}$ für Variationen der Parameter suchen. Man lässt zunächst den ersten Parameter $\bar{x}_1$ einem zu erwartenden Bereich durchlaufen und merkt sich die Stelle mit dem größten Wert für $\prod \mathrm{h}_{(\mathrm{xi})}$. Danach folgen die anderen Parameter. Diesen Vorgang muss man iterativ solange wiederholen, bis sich die Parameter nicht mehr wesentlich ändern. Als Startbedingung der Iteration verwendet man eine abschnittsweise Aufteilung in zwei Geradenabschnitte mit zwei 2-parametrigen Verteilungen (jeweils vordere und hintere Hälfte).
Die für das Produkt $\prod \mathrm{h}_{(\mathrm{xi})}$ notwendigen Dichtfunktionen sind im folgendem dargestellt:

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion **4-parametrig Normal:**

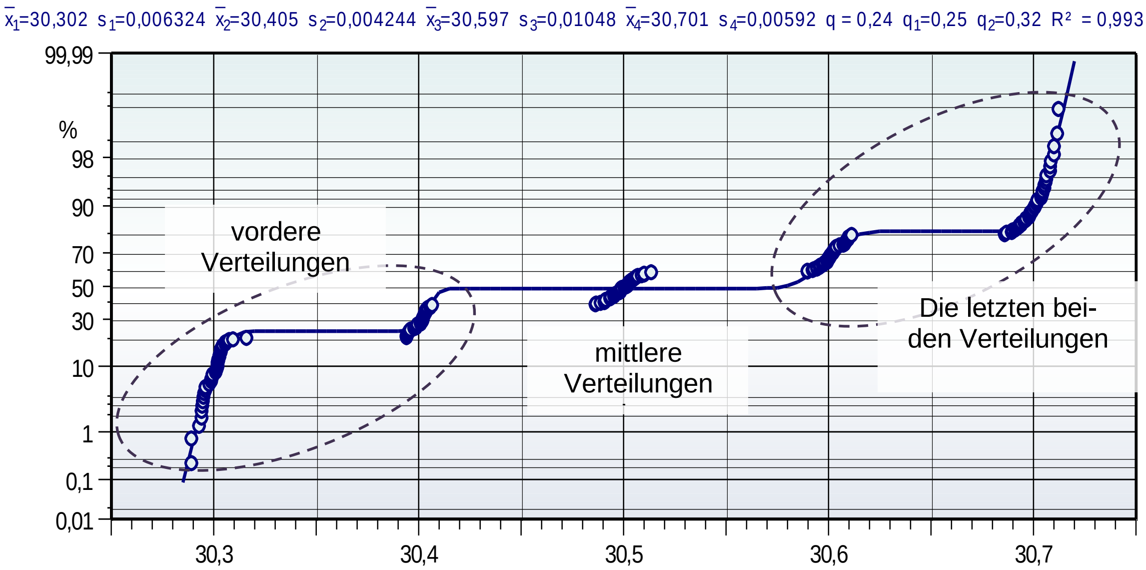
$$h_{(t)} = \left(1-\Phi_{x;\bar{x}_1;s_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_2}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\bar{x}_2)^2}{2s_2^2}\right)}\right) + \left(1-\Phi_{x;\bar{x}_2;s_2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_1}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\bar{x}_1)^2}{2s_1^2}\right)}\right)$$

Mischverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion **5-parametrig Normal:**

$$h_{(t)} = q\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_1}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\bar{x}_1)^2}{2s_1^2}\right)}\right) + (1-q)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_2}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\bar{x}_2)^2}{2s_2^2}\right)}\right)$$

Die Erweiterung auf eine 3-fach Mischverteilung ergibt eine 8-parametrige Normalverteilung usw. Da die Berechnung der Parameter iterativ erfolgen muss, wird spätestens die Berechnung einer 5-fach Mischverteilung problematisch. In der Produktion mit vielen Formnestern oder parallelen Fertigungsanlagen kann diese jedoch vorkommen. Es wird hier deshalb vorgeschlagen ab mehr als 4 Verteilungen nur die Randbereiche zu betrachten. Dies ist insbesondere für die Prozessfähigkeit von Bedeutung bezüglich der Toleranzgrenzen:



Mehrparametrige Weibull-Verteilungen
4- und 5-parametrige Weibull-Verteilung

Auch bei Weibull-Verteilung gibt es Mischverteilungen. Weibull wird in der Regel für Lebensdauerfragen angewendet. Im Gegensatz zu statischen Versuchen, für die die Normalverteilung zu Grunde zu legen ist, werden hier dynamische Versuche untersucht, z.B. Biegewechseltests. Die Mischverteilung entsteht hier durch verschiedene Ausfallursachen. Für den Fall von zwei Ausfallursachen spricht man auch hier von sogenannten bimodalen Verteilungen. Man unterscheidet:

1. Konkurrierende Ausfallmechanismen
2. Alternative Ausfallmechanismen

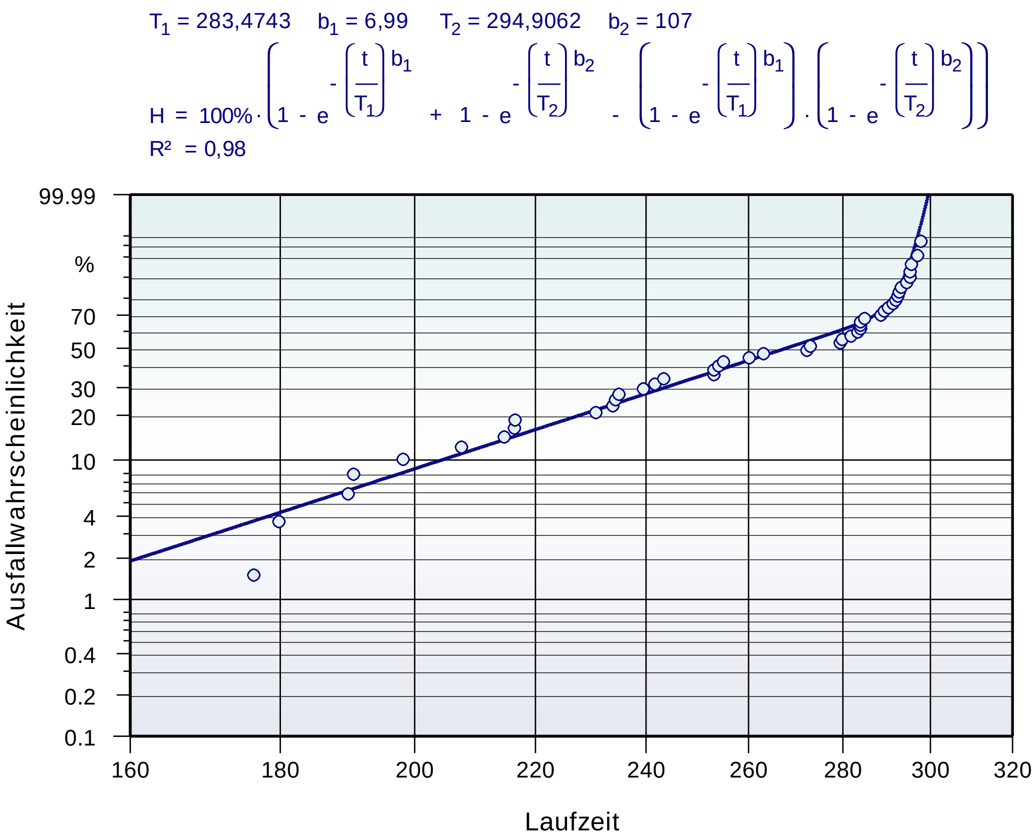
Man geht von konkurrierenden Ausfallmechanismen aus, wenn z.B. in einer Komponente unterschiedliche Bauteile defekt sind. Das Verhalten ist analog zum Prinzip des „schwächsten Gliedes in der Kette“ mit den Ausfällen am Anfang. Die Defekte des zweiten Bauteils kommen deutlich später. Oft handelt es sich bei dem ersten Abschnitt um Frühausfälle, also um Qualitätsprobleme durch die Fertigung. Konkurrierende Ausfallmechanismen werden durch die 4-parametrige Weibull-Verteilung beschrieben:

4-parametrige Weibull-Verteilung (konkurrierend Ausfallmechanismen)

Die entsprechende Variante in der Weibull-Verteilung ergibt:

$$\boldsymbol{H_{(t)}} = \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_1}\right)^{b_1}}\right) + \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)^{b_2}}\right) - \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_1}\right)^{b_1}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)^{b_2}}\right)$$

Für sprödbrechende Materialien (Gläser, Keramiken, etc.) leitet sich die Weibull-Verteilung aus der Theorie der minimalen Extremwert-Verteilungen ab (Analogie: Schwächstes Glied in einer Kette). Ein anderer Sachverhalt ist z.B. der Ausfall unterschiedlicher Bauteile innerhalb eines Systems oder einer Komponente.
Im folgenden Beispiel gibt es einen eindeutigen Knick zu einer steileren Steigung im hinteren Bereich. Aufgrund des zunächst fast geraden Anfangsverlaufes kann die 3-parametrige Weibull-Verteilung die Punkte nicht ausreichend erfassen. Das spricht für eine eindeutige Mischverteilung.



5-parametrige Weibull-Verteilung (alternative Ausfallmechanismen)

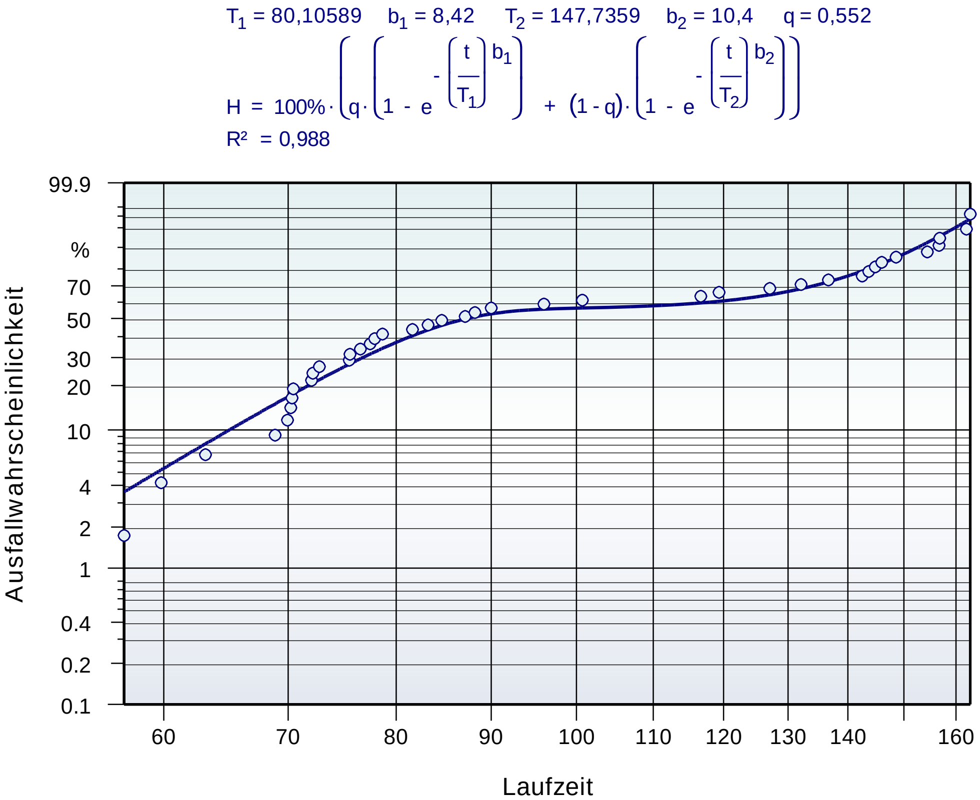
Von alternativen Ausfallmechanismen spricht man, wenn z.B. ein und dasselbe Bauteil evtl. sogar mit einem Schadensbild ausfällt, aber die Ursache hierfür unterschiedlich sein kann. Beispiel: Ein Kunststoffring in einer Kraftübertragung bricht, weil eine Gummientkopplung zu steif ist, um die Kräfte zu dämpfen, oder weil er thermisch überbeansprucht wird. Oft lässt sich nicht klar bestimmen, ob nicht auch durch unterschiedliche Anwendungen, das Bauteil unterschiedlich belastet wird (Kundenverhalten).
Alternative Ausfallmechanismen werden durch die 5-parametrige Weibull-Verteilung beschrieben, die die klassische Form einer Mischverteilung darstellt:

Mischverteilung

$$H_{(t)} = q\left(1-e^{-\left(\frac{t}{T_1}\right)^{b_1}}\right) + (1-q)\left(1-e^{-\left(\frac{t}{T_2}\right)^{b_2}}\right)$$

q : relativer Anteil der jeweiligen Verteilung 0..1

Im folgenden Beispiel gibt es einen eindeutigen Wechsel von einer Rechts- auf eine Linkskrümmung. Dies ist ein klares Indiz für eine Mischverteilung. Die ersten 3 Punkte fallen aus der vorderen Gruppe zudem etwas ab (3. Ausfallursache, z.B. wegen einer Vorschädigung).



Das Prinzip der 5-parametrigen Verteilung kann auch auf 8 Parameter erweitert werden und man erhält eine 3-fach Mischverteilung.

Ungeachtet der Frage nach konkurrierenden oder alternativen Ausfallursachen wird man sich bei nicht bekanntem Sachverhalt auf Basis des Bestimmtheitsmaßes für die 4- oder 5-parametrige Form entscheiden. Auch die statistischen Tests können Hilfestellung für die Auswahl der einen oder anderen Verteilung geben.

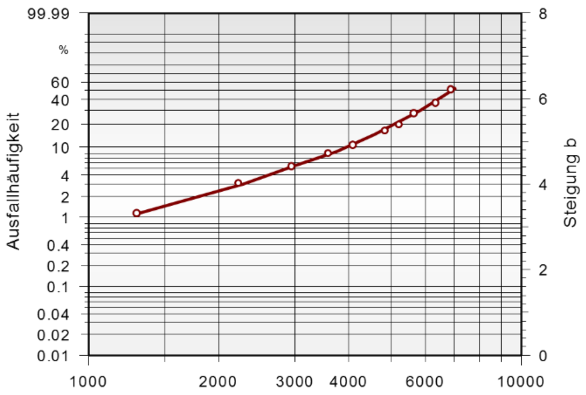
Die Parameter der Weibull-Verteilungen ab 4 Parameter müssen iterativ gelöst werden. Es besteht die Möglichkeit nach bekannter Methode der kleinsten Abweichungsquadrate zu optimieren, oder nach der Max-Likelihood-Methode. Dabei wird die jeweilige Dichtfunktion partiell nach den Parametern abgeleitet und zu 0 gesetzt. Als Startbedingung der Iteration verwendet man eine abschnittsweise Aufteilung in zwei Geradenabschnitte mit zwei 2-parametrigen Verteilungen (jeweils vordere und hintere Hälfte).

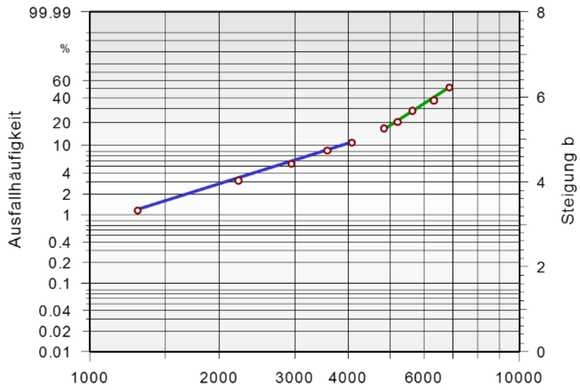
Vereinfachter Test auf Mischverteilung

Anstelle einer mehrparametrigen Weibull-Verteilung können vereinfacht die unterschiedlichen Verläufe aufgeteilt werden.

Mischverteilung

In der linken Darstellung ist der ursprüngliche Verlauf zu sehen, der nicht einer Geraden entspricht. Im rechten Bild wurde der vordere und der hintere Bereich so aufgeteilt, dass die Teilgeraden jeweils ein möglichst maximales Bestimmtheitsmaß aufweisen.





Für den folgenden Test auf Mischverteilung wird zunächst eine Nullhypothese H_0 definiert. Diese lautet: Die Ausfälle gehören einer gemeinsamen Weibull-Verteilung an (linkes Bild). Die Alternativhypothese H_1 lautet entsprechend: Die Ausfälle gehören nicht einer gemeinsamen Weibull-Verteilung an (rechtes Bild).
Ausgehend von H_0 werden Vertrauensbereiche für die Gesamtgerade b_{ges} und T_{ges} gebildet.

$$T_{ges} = e^{\frac{\ln(T_1)\,+\ln(T_2)}{2}} \qquad b_{ges} = (b_1 + b_2)/2$$

Für den Parameter b ist z.B. folgender Vertrauensbereich anwendbar (Literatur Mock, Methoden zur Datenhandhabung in Zuverlässigkeitsanalysen):

$$b_{ges}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1,4}{n}}} \le b \le b_{ges}\left(1+\sqrt{\frac{1,4}{n}}\right)$$

Hinweis:
Faktor 1,4 gilt nur für Vertrauensbereich 90%. Andere Bereiche siehe Tabelle rechts

Vertrauensb.	
90%	$1+\sqrt{1,4/n}$
95%	$1+\sqrt{2,0/n}$
99%	$1+\sqrt{3,4/n}$

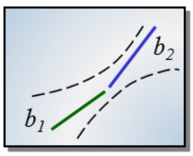
Für die charakteristische Lebensdauer T empfiehlt sich folgende Beziehung (Literatur Bertsche, Zuverlässigkeit im Fahrzeug. und Maschinenbau):

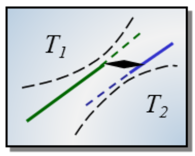
$$T_{ges}\left(\frac{2n}{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}\right)^{1/b} \le T \le T_{ges}\left(\frac{2n}{\chi^2_{2n,\alpha/2}}\right)^{1/b}$$

Vertrauensbereich 90% ⇨ α = 10%
$\alpha/2$ = 5 %
$1-\alpha/2$ = 95 %

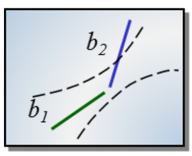
Geprüft wird nun ob b_1 und b_2 bzw. T_1 und T_2 innerhalb der Vertrauensbereiche der Parameter der mittleren Verteilung liegen.

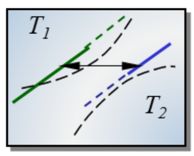
Ja : ⇨ Die Nullhypothese, dass Verteilungen gleich sind, wird nicht verworfen.





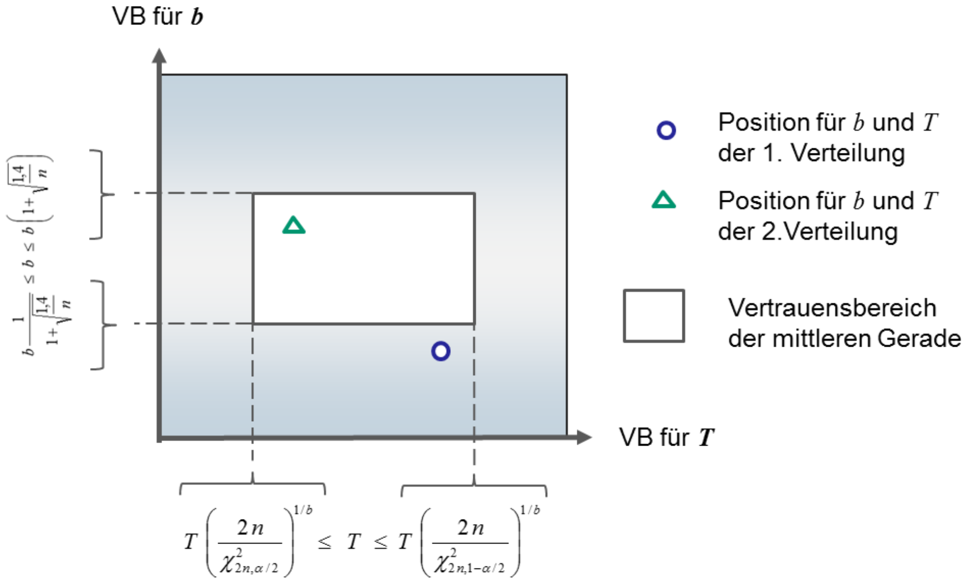
Nein : ⇨ Die Nullhypothese wird verworfen – Verteilungen sind unterschiedlich.
Hinweis: Es reicht aus, wenn b oder T außerhalb liegen.





Mischverteilung

In der folgenden Grafik lässt sich die Situation gesamthaft darstellen. In der Ordinate werden die Vertrauensbereiche des Formparameters aufgetragen, in der Abszisse die der charakteristischen Lebensdauer.



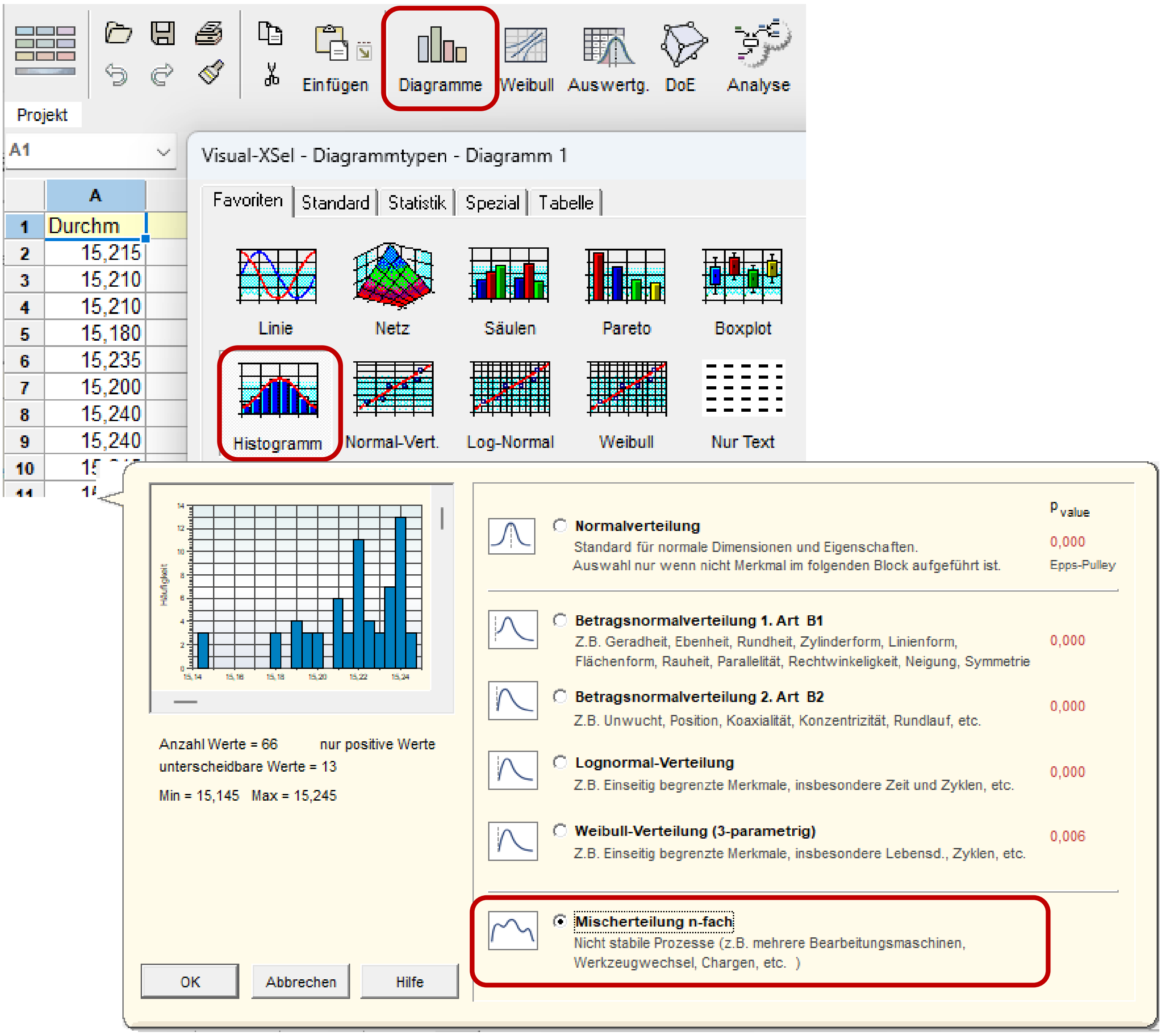
Um H_o bestätigen zu können, müssen beide Punkte der einzelnen Abschnitte innerhalb der Vertrauensgrenzen liegen. Die Steigung des ersten Abschnittes ist jedoch flacher, als die untere Vertrauensgrenze für *b*. Die Nullhypothese ist somit abzulehnen und man muss von einer Mischverteilung ausgehen.

Das gleiche Prinzip ist anwenderbar für die Normalverteilung. Hier werden die Parameter Mittelwert und Standardabweichung anstelle von b und T getestet.

Anwendung in Visual-XSel

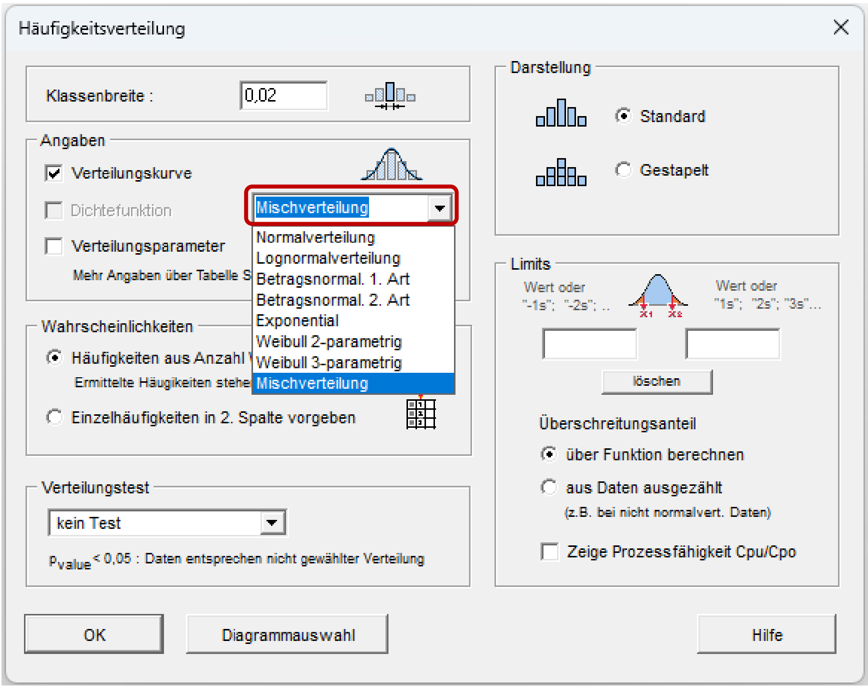
In Visual-XSel wird in der Auswahldialog für ein Histogramm und dem Wahrscheinlichkeitsnetz nicht zwischen 2- und 3-fach Mischerteilung unterschieden. Bei der allgemeinen Auswahl Mischverteilung wird automatisch festgestellt, um welche es sich handelt, wobei generisch die Parameter bis zu einer 4-fach Mischverteilung ermittelt werden. Gibt es z.B. in einem Fertigungsprozess wegen verschiedener Formnester mehr als 4 Verteilungen, so werden nur die Randbereiche betrachtet. Dies ist insbesondere für die Prozessfähigkeit von Bedeutung bezüglich der Toleranzgrenzen.
Bei mehr als 50 Daten erscheint eine Vorauswahl der Verteilung, wie beim Leitfaden für die Prozessfähigkeit (Ikone Auswertung / Fähigkeit / Leitfaden …). Hier wird ein statistischer Test der Verteilungen durchgeführt. Ist der p_{value} (rechts außen) < 0,05, so ist die entsprechende Verteilung nicht geeignet.

Mischverteilung

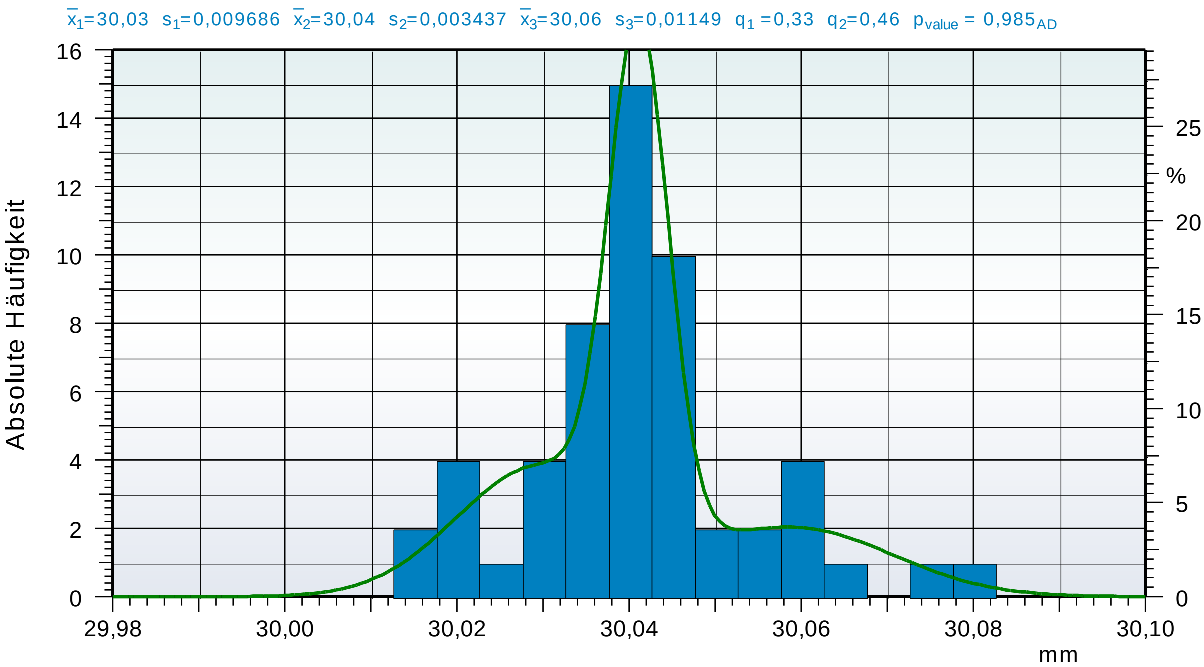


Ist ein Diagramm erstellt worden, können Verteilung und weitere Optionen jederzeit über die Ikone Diagramm geändert werden:

Mischverteilung

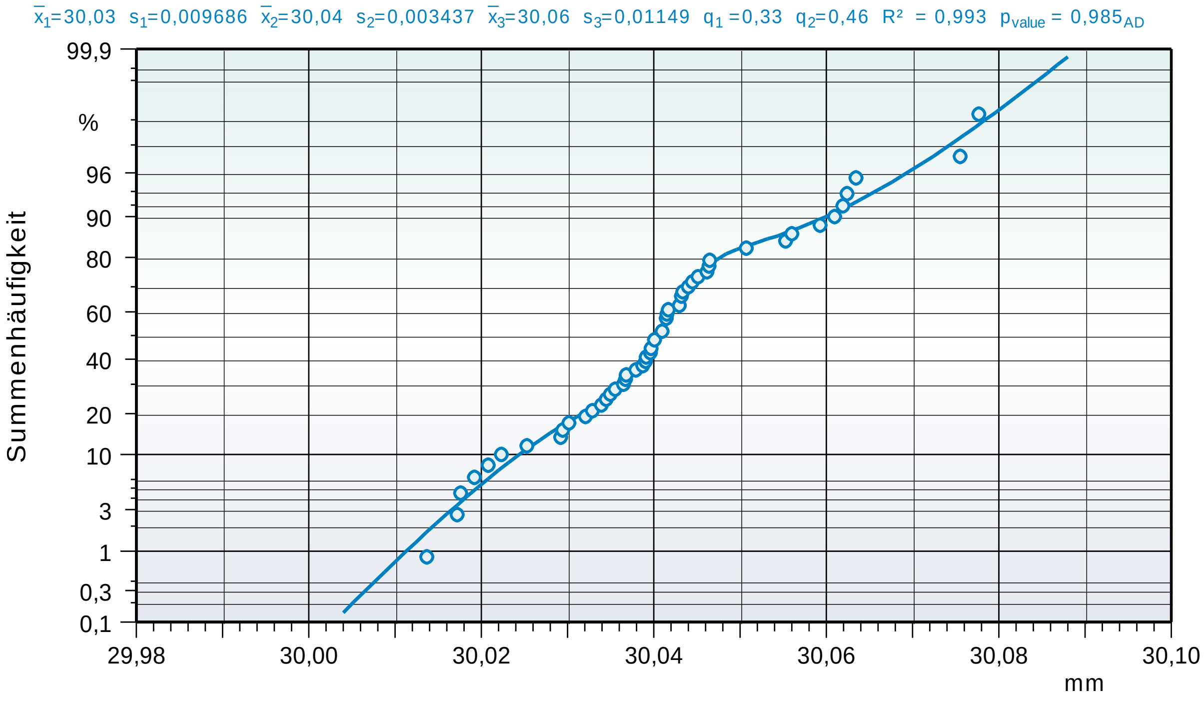


Folgendes Beispiel zeigt eine 3-fach-Mischverteilung mit 8 Parametern:



Als Wahrscheinlichkeitsnetz mit einer 8-parametrigen Normalverteilung sieht das gleiche Beispiel folgendermaßen aus:

Mischverteilung



Der vereinfachte Test auf **Mischverteilung** über die getrennten Geradenabschnitte kann mit Hilfe des Templates *Weibull_Mischverteilung.vxg* durchgeführt werden. Hierzu ist der Menüpunkt *Datei/Templates/Weibull/* aufzurufen und die entsprechende Datei zu öffnen. Folgen Sie den Sprechblasen, um Ihre Daten einzufügen und die Berechnung über das Makro mit F9 zu starten.

Software – Literatur – Consulting – Schulungen

Software

Unsere Software **Visual-XSel** ist ein leistungsfähiges Tool für alle wichtigen statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden. Nicht umsonst ist diese Software in vielen großen Firmen im Einsatz – crgraph.de/Referenzen.

Weitere Informationen zum aktuellen Thema finden Sie auf den nächsten Seiten oder unter crgraph.de/Versionen

Eigene Literatur

Unser **Taschenbuch der statistischen Qualitäts- und Zuverlässigkeitsmethoden** beinhaltet weiterführende Themen, z.B. zu Systemanalysen, Weibull- und Zuverlässigkeitsmethoden, Versuchsplanung und Datenauswertung, sowie zur Mess-System-Analyse und Prozessfähigkeit.

Weitere Informationen finden Sie unter crgraph.de/Literatur

Consulting & Schulungen & Six Sigma

Bei unseren Inhouse- oder Online-Schulungen wird die praxisnahe Anwendung von statistischen Methoden vermittelt. Wir haben über 20 Jahre Erfahrung, insbesondere in der Automobilindustrie und unterstützen Sie bei Ihren Problemstellungen, führen Auswertungen für Sie durch, oder erstellen firmenspezifische Auswertevorlagen.

Weitere Informationen finden Sie unter crgraph.de/Schulungen

Hotline

Haben Sie noch Fragen, oder Anregungen? Wir stehen Ihnen gerne zur Verfügung:

Tel. +49 (0)8151-9193638

e-mail: info@crgraph.de

Besuchen Sie uns auf unserer Home-Page: www.crgraph.de