2.8 Der große Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt werden wir den großen Riemannschen Abbildungssatz beweisen. Wichtige Zutaten für dessen Beweis sind die Lösung des Dirichlet-Problems, der Anulus-Satz, und der „kleine“ Riemannsche Abbildungssatz. Hinzu kommt der sogenannte Satz von Koebe, eine erweiterte Version des Satzes von Montel, der die Konvergenz von injektiven holomorphen Funktionen charakterisiert; solche Funktionen nennt man manchmal auch *schlichte Funktionen**.

Zur Erinnerung:

2.34 Aussage. (Satz von Montel.) Sei $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Familie von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ oder einer Riemannschen Fläche X. Dann ist $\mathcal{F}$ *normal*, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

2.35 Satz. (Satz von Koebe.) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $x_0 \in G$. Dann ist die Menge $\mathcal{F}$ aller injektiven holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$ kompakt, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in $\mathcal{F}$ liegt.

Wir bereiten den Beweis des Satzes von Koebe durch die folgenden beiden Lemmata vor:

2.36 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C} \setminus G$ innere Punkte enthält, und $x_0 \in G$. Dann besitzt jede Folge von holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to G$ mit $f(0) = x_0$ eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$ ein innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Dann wird durch $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ das Gebiet G biholomorph auf ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ abgebildet. Also folgt die Aussage aus dem Satz von Montel (Aussage 2.34). □

2.37 Lemma. Die Menge $\mathcal{F}$ der injektiven holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist kompakt, d.h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in $\mathcal{F}$ liegt.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{F}$. Zu zeigen ist, dass (f_n) eine Teilfolge besitzt, die kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion in $\mathcal{F}$ konvergiert.

Nach dem Satz vom offenen Bild ist für $n \in \mathbb{N}$ jeweils $f_n[\mathbb{D}]$ offen in $\mathbb{C}$ und es gilt $0 \in f_n[\mathbb{D}]$. Daher erfüllt der maximale Radius r_n, so dass $B(0, r_n) \subset f_n[\mathbb{D}]$ ist, $r_n > 0$. Wir behaupten, dass andererseits $r_n < 2$ gilt: Wäre $r_n \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wäre $B(0, 2) \subset f_n[\mathbb{D}]$, also ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto f_n^{-1}(2z)$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit $g(0) = 0$ und $|g(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{D}$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt $|g(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, und folglich $|f_n^{-1}(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$ für alle $z \in B(0, 2)$. Daraus folgt $|(f_n^{-1})'(0)| \leq \frac{1}{2}$ und somit $|f_n'(0)| \geq 2$ im Widerspruch zu $f_n'(0) = 1$.

Wegen der Maximalität von r_n ist $\partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}] \neq \varnothing$, und wir wählen ein $a_n \in \partial B(0, r_n) \setminus f_n[\mathbb{D}]$. Wir setzen $g_n = \frac{1}{a_n} \cdot f_n$. Dann gilt $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$, aber $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$. Weil $g_n[\mathbb{D}]$ einfach

*Manchmal ist mit einer „schlichten Funktion“ allerdings auch eine biholomorphe Funktion, oder eine biholomorphe Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, oder ein ähnliches Konzept gemeint. In englischsprachigen Texten sieht man gelegentlich “schlicht function”.

zusammenhängend ist, existiert auf diesem Gebiet eine „Quadratwurzel“ aus $z-1$, d.h. es existiert genau eine holomorphe Funktion $\psi_n : g_n[\mathbb{D}] \to \mathbb{C}$ mit $\psi_n^2 = z-1$ und $\psi_n(0) = i$. Für die holomorphe Funktion $h_n := \psi_n \circ g_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ gilt dann $h_n^2 = g_n - 1$ und $h_n(0) = i$.

Wir behaupten nun, dass $h_n[\mathbb{D}] \cap (-h_n[\mathbb{D}]) = \varnothing$ gilt. Das liegt daran, dass mit f_n auch g_n injektiv ist. Gäbe es nun $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ mit $h_n(z_1) = -h_n(z_2)$, so wäre $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = h_n(z_2)^2 + 1 = g_n(z_2)$ und somit $z_1 = z_2$. Daraus folgt $h_n(z_1) = 0$ und somit $g_n(z_1) = h_n(z_1)^2 + 1 = 1$ im Widerspruch zu $1 \notin g_n[\mathbb{D}]$.

Wegen $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$ ist $U := \psi_n[\mathbb{D}] \subset h_n[\mathbb{D}]$ und somit folgt $(-U) \cap h_n[\mathbb{D}] = \varnothing$. Wegen Lemma 2.36 besitzt (h_n) eine Teilfolge (h_{n_k}), die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion h konvergiert. Es gilt $f_n = a_n \cdot (h_n^2 + 1)$ mit $|a_n| = r_n \leq 2$; deshalb hat auch (f_n) eine Teilfolge $(f_{\tilde{n}_k})$, die kompakt gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion f konvergiert. Wegen $f_n(0) = 0$ und $f_n'(0) = 1$ ist $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Weil die f_n injektiv sind, ist f wegen dem „nullstellenzählenden Integral“ entweder injektiv oder konstant; hier kann f jedoch wegen $f'(0) = 1$ nicht konstant sein. Also ist $f \in \mathcal{F}$. □

Beweis des Satzes von Koebe (Satz 2.35). Wir verwenden eine ähnliche Beweisidee, wie sie häufig auch für den Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli verwendet wird. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{F}$ gegeben. Zu zeigen ist, dass es eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) gibt, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Wir wählen eine dichte Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in G, zum Beispiel kann (x_m) eine Abzählung von $G \cap \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ sein. Weil nach Lemma 2.36 insbesondere für jedes $x \in G$ eine Teilfolge von $(f_n(x))$ gibt, die gegen ein $y \in \mathbb{C}$ konvergiert, lässt sich induktiv eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) konstruieren, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_{n_k}(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_m \in \mathbb{C}$ konvergiert; mehr noch: für alle $k \geq m$ gilt jeweils $|f_{n_k}(x_m) - y_m| \leq \frac{1}{k}$. Wir behaupten, dass diese Teilfolge (f_{n_k}) kompakt gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$ konvergiert.

Als „Kreiskette mit Anfangspunkt x_0“ bezeichnen wir eine endliche Folge von Kreisscheiben $B_1, \ldots, B_\ell$, so dass $x_0 \in B_1$ ist, und jeweils $\bar{B}_j \subset G$, $B_j \cap B_{j+1} \neq \varnothing$ und $B_j \cap B_{\tilde{j}} = \varnothing$ für $\tilde{j} \neq j, j+1$ gilt. Lemma 2.37 gilt offensichtlich *mutatis mutandis* für beliebige Kreisscheiben an Stelle von $\mathbb{D}$, und daher auch für Kreisketten mit Anfangspunkt x_0. Wegen der Konstruktion der Teilfolge (f_{n_k}) gilt dabei die Aussage des Lemmas jeweils für diese feste Teilfolge, unabhängig von der Wahl der Kreiskette, d.h. auf jeder Kreiskette konvergiert (f_{n_k}) gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$.

Ist nun eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subset G$ gegeben, so kann diese durch endlich viele Kreisketten mit Anfangspunkt x_0 überdeckt werden. Daher konvergiert (f_{n_k}) auch auf K gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{F}$. □

Die folgende Aussage ist eine Anwendung des Satzes von Koebe auf Riemannsche Flächen (statt auf Gebiete in $\mathbb{C}$):

2.38 Aussage. Sei X eine Riemannsche Fläche, und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine „Ausschöpfung“ von X durch offene, zusammenhängende Mengen U_n, d.h. es gilt

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X\,.$$

Weiter gebe es jeweils eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet $G_n \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es auch eine biholomorphe Abbildung $f : X \to G$ auf ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $U_1 \neq \varnothing$. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U_1$ und eine holomorphe Karte $(\tilde{U}_1, z)$ von X mit $\tilde{U}_1 \subset U_1$ und $z(x_0) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, so dass für die biholomorphe Funktion

$$g_n(x) = a_n \cdot f_n(x) + b_n$$

gilt:

$$g_n(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}z}(x_0) = 1 \,.$$

(Es gilt nämlich $\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}z}(x_0) \neq 0$, und deshalb ist $a_n = \left(\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}z}(x_0)\right)^{-1}$ und $b_n = -a_n \cdot f_n(x_0)$.)

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten für $n \geq 1$ die injektiven holomorphen Funktionen $h_n := g_{m+n} \circ g_m^{-1}$, die das Gebiet $V_m := g_m[U_m] \subset \mathbb{C}$ jeweils auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abbilden. Offensichtlich gilt

$$0 \in V_m \,, \quad h_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad h_n'(0) = 1 \,.$$

Der Satz von Koebe (Satz 2.35) zeigt deshalb, dass es eine Teilfolge (h_{n_k}) der (h_n) gibt, die auf V_m kompakt gleichmäßig gegen eine injektive, holomorphe Funktion konvergiert. Wir setzen $\tilde{g}_n = g_n$ für $n \leq m$ und $\tilde{g}_n = h_{n_{n-m}}$ für $n > m$.

Wir schließen nun induktiv: Wir führen die Konstruktion des obigen Absatzes zunächst mit $m = 1$ aus, und ersetzen dann die Folge (g_n) durch $(\tilde{g}_n)$. So erhalten wir eine auf U_1 kompakt gleichmäßig konvergente Folge (g_n). Nachdem die Konstruktion für $1, \ldots, m-1$ durchgeführt wurde, führen wir sie für m durch, und ersetzen wieder (g_n) durch $(\tilde{g}_n)$, so dass wir Konvergenz von U_m haben. Induktiv erhalten wir eine Funktionenfolge (g_n), die auf ganz $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m = X$ gegen eine biholomorphe Abbildung f konvergiert. □

Mit dem folgenden Satz beweisen wir schon die erste „Hälfte" des großen Riemannschen Abbildungssatzes:

2.39 Satz. Jede kompakte planare Riemannsche Fläche X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Wir wählen eine Koordinatenumgebung von X und darin eine zu $\mathbb{D}$ biholomorphe, offene Teilmenge $D \subset X$. Wir identifizieren wieder D mit $\mathbb{D}$. Weiter wählen wir $a, b \in D$ mit $a \neq b$ und betrachten für (hinreichend großes) $n \in \mathbb{N}$ die offene, zusammenhängende Menge $U_n = X \setminus (B(a, \frac{1}{n}) \cup B(b, \frac{1}{n}))$. Damit gilt offenbar $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \setminus \{a, b\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Anulus-Satz (Satz 2.30) eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf ein Gebiet (nämlich einen Anulus) in $\mathbb{C}$. Nach Aussage 2.38 existiert daher eine injektive holomorphe Abbildung $f : X \setminus \{a, b\} \to \mathbb{C}$.

Wir zeigen, dass sich f in a bzw. b zu einer injektiven meromorphen Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt: Ist f in der Nähe von a beschränkt, so lässt sich f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in a zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. Ist f in der Nähe von a nicht beschränkt, so kann f bei a keine wesentliche Singularität haben: dies folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstraß wegen der Injektivität von f. Also hat f bei a dann einen Pol. Wegen der Injektivität von f muss dieser Pol von erster Ordnung sein. Also lässt sich f durch $f(a) = \infty$ in a meromorph fortsetzen. Dieselben Argumente treffen natürlich auch auf b zu. So erhalten wir eine meromorphe Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$. Weil diese in einer Umgebung von a bzw. b alle Werte aus einem kleinen Ball um $f(a)$ bzw. $f(b)$ annimmt, ist die fortgesetze Funktion f weiterhin injektiv. Ihr Bild $f[X]$ ist einerseits nach dem Offenheitssatz offen in $\widehat{\mathbb{C}}$, andererseits mit X kompakt und deshalb abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}}$. Also folgt $f[X] = \widehat{\mathbb{C}}$, und somit ist $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph. $\square$

Wir arbeiten jetzt nur noch am Riemannschen Abbildungssatz für nicht-kompakte, planare Riemannsche Flächen X.

2.40 Lemma. Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Ausschöpfung $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X durch offene Mengen O_n (d.h. es gilt $O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \dots$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$) mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\bar{O}_n$ ist kompakt, und die Zusammenhangskomponenten von ∂O_n besitzen einen „Kragen", letzteres bedeutet: Für jede Zusammenhangskomponente B von ∂O_n gibt es einen Homöomorphismus, der eine Umgebung von B in O_n auf $S^1 \times (0,1)$ und B auf $S^1 \times \{1\}$ abbildet.

(b) ∂O_n besitzt in allen seinen Punkten eine Barriere.

Beweis. Wie schon im Beweis des Satzes 1.18 über die Zerlegung der Eins verwenden wir, dass es eine abzählbare, offene Überdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X durch Kartenumgebungen U_n zu holomorphen Karten ϕ_n gibt, die so beschaffen sind, dass die Bilder $\phi_n[U_n] = B(0, r_n)$ Bälle von gewissen Radien $r_n > 0$ sind, dass aber umgekehrt schon $(\phi_n^{-1}[B(0, r_n/2)])_{n\in\mathbb{N}}$ ganz X überdeckt. Wir werden zeigen, dass mit einer geeigneten Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Radien mit $0 < \frac{r_n}{2} \leq R_n < r_n$ die offenen Mengen

$$O_n = \bigcup_{k=1}^{n} \phi_k^{-1}[B(0, R_k)] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die geforderten Eigenschaften erfüllt. Jedenfalls ist (O_n) offensichtlich eine Ausschöpfung von X und $\bar{O}_n$ ist jeweils kompakt.

Um die Barrieren-Bedingung zu erfüllen, wählen wir die Radien R_n induktiv aus. Seien also die Radien $R_1, \dots, R_n$ bereits gewählt. Wir wählen den Radius $R_{n+1} \in (\frac{r_{n+1}}{2}, r_{n+1})$ so aus, dass der Rand $\partial\phi_{n+1}^{-1}[\overline{B(0, R_{n+1})}]$ die Ränder der vorherigen Mengen $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$ (bezüglich einer beliebigen Karte) transversal schneidet. Dies führt einerseits dazu, dass O_{n+1} die Bedingung aus Lemma 2.27 erfüllt, und deshalb in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt. Andererseits folgt, dass jede Zusammenhangskomponente von ∂O_{n+1} einen Kragen besitzt.

Die Realteile der logarithmischen Koordinaten $\ln(\phi_{n+1})$ sind die Logarithmen der Abstände zu $\phi_{n+1}^{-1}(0) \in U_{n+1}$. Weil der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist, sind die Funktionen auf den Rändern der obigen Mengen reellanalytisch. Deshalb gibt es höchstens endliche viele kritische Werte von dieser reell analytischen Funktion auf $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \dots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$, und damit auch ein $\frac{r_{n+1}}{2} \leq R_{n+1} < r_{n+1}$ mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

2.41 Satz. Sei X eine nicht-kompakte, planare Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Beweis. Nach Lemma 2.40 gibt es eine Ausschöpfung (O_n) von X durch offene Mengen mit den dort genannten Eigenschaften. Wir zeigen, dass jedes O_n biholomorph zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Nach Aussage 2.38 ist dann auch X selbst biholomorph zu einem Gebiet in $\mathbb{C}$.

Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, dass O_n zusammenhängend ist. Weil $\bar{O}_n$ kompakt ist, ist sein Rand ∂O_n homöomorph zu S^1. Außerdem besitzt O_n einen Kragen $K \subset X$, dieser ist homöomorph zu $S^1 \times [0,1)$, wobei $\partial O_n \subset K$ der Teilmenge $S^1 \times \{0\}$ entspricht. Nach dem Anulus-Satz in der Version von Korollar 2.33 existiert eine biholomorphe Abbildung g von K auf einen Anulus $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$ mit einem geeigneten $R > 1$. Dabei kann g so gewählt werden, dass $g[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Weil O_n in jedem Randpunkt eine Barriere besitzt, ist nach Satz 2.26 das Dirichlet-Problem zu $u|_{\partial O_n} = \mathrm{Re}(g)|_{\partial O_n}$ lösbar, d.h. es existiert eine Funktion $u : \bar{O}_n \to \mathbb{R}$, so dass $u|_{O_n}$ harmonisch ist und $u|_{\partial O_n} = \mathrm{Re}(g)|_{\partial O_n}$ gilt. Weil X planar ist, besitzt die geschlossene 1-Form $\mathrm{d}u + i * \mathrm{d}u$ eine Stammfunktion $f : \bar{O}_n \to \mathbb{C}$, und diese ist nach Aufgabe 2.32(c) holomorph. Dabei kann die Integrationskonstante für f so gewählt werden, dass f eine Fortsetzung von g ist, und deshalb $f[\partial O_n] = \partial \mathbb{D}$ ist. Die Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum auf ∂O_n an, also gilt $|f| \leq 1$. Wegen des Satzes von der Gebietstreue gilt damit $f[O_n] \subset \mathbb{D}$. Somit bildet f das Gebiet O_n biholomorph auf ein Gebiet in $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ab. □

Der Riemannsche Abbildungssatz zählt in den Worten von Felix Klein zu den tiefsten und größten Erkenntnissen, die in der Mathematik je erwachsen sind. Jetzt ist es endlich soweit:

2.42 Theorem. Für eine Riemannsche Fläche X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Jede geschlossene, glatte 1-Form auf X ist exakt.

(b) X ist entweder biholomorph zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{C}$, oder zu $\mathbb{D}$.

(c) X ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Zu (a) $\Longrightarrow$ (b). Eine Riemannsche Fläche X, die (i) erfüllt, ist insbesondere planar. Ist X kompakt, so ist X nach Satz 2.39 biholomorph zu $\widehat{\mathbb{C}}$. Ist X nicht kompakt, so ist X nach Satz 2.41 biholomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Ist $G \neq \mathbb{C}$, so ist nach dem „kleinen" Riemannschen Abbildungssatz (Theorem B.1) G und damit X biholomorph zu $\mathbb{D}$.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c). Da $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend sind, ist auch jede Riemannsche Fläche, die zu einem dieser Gebiete biholomorph ist, einfach zusammenhängend.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a). Wir können jede Homotopie auf einer Riemannschen Fläche aus endlich vielen Homotopien innerhalb des Definitionsbereichs einer Karte zusammensetzen. Deshalb gilt der Monodromiesatz auch auf Riemannschen Flächen. Insbesondere ist auf einer einfach zusammenhängendend Riemannschen Fläche X jede geschlossene 1-Form exakt. □

2.9 Der Uniformisierungssatz

Als direkte Folge des großen Riemannschen Abbildungssatzes erhalten wir nun auch eine ziemlich weitgehende Übersicht über alle (auch nicht einfach zusammenhängende) Riemannsche Flächen. Dies ist der sogenannte *Uniformisierungssatz*.

2.43 Theorem. (Uniformisierungssatz.) Jede Riemannsche Fläche X gehört zu einer der folgenden Klassen:

(a) X ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist biholomorph zu $\mathbb{C}$. In diesem Fall ist X selbst biholomorph zu einer der folgenden Riemannschen Flächen:

  (i) $\mathbb{C}$

  (ii) $\mathbb{C}^*$

  (iii) ein komplexer Torus $\mathbb{C}/\Gamma$, siehe Beispiele 1.28(c) und 1.34.

(c) Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist biholomorph zu $\mathbb{D}$. In diesem Fall ist X biholomorph zu einer Riemannschen Fläche $\mathbb{D}/\Gamma$, wobei Γ eine auf $\mathbb{D}$ frei operierende Untergruppe der Automorphismengruppe

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) &= \left\{ z \mapsto e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0\, z} \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{D} \right\} \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$

ist.

Ein Wermutstropfen bleibt bei diesem schönen Ergebnis: Es ist leider nicht möglich, die auf $\mathbb{D}$ frei operierenden Untergruppen Γ in ähnlicher Weise explizit anzugeben, wie wir das für die auf $\mathbb{C}$ frei operierenden Untergruppen in Abschnitt 1.5 getan haben. Es ist aber nicht verwunderlich, dass dieser Fall kompliziert ist: alle kompakten, orientierbaren, zusammenhängenden, reell-2-dimensionale Flächen können als Riemannsche Flächen aufgefasst werden, und ist ihr Geschlecht ≥ 2, so ist ihre universelle Überlagerung biholomorph zu $\mathbb{D}$. Alle diese Flächen gehen also aus dem Fall (c) des Uniformisierungssatzes hervor.

Beweis des Uniformisierungssatzes Theorem 2.43. Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung der gegebenen Riemannschen Fläche X. Sie existiert nach Satz 1.45 und ist wegen Korollar 1.44 bis auf biholomorphe Äquivalenz eindeutig. Sei Γ die Gruppe der Decktransformationen von π; sie ist eine Untergruppe der biholomorphen Abbildungen $\tilde{X} \to \tilde{X}$, die nach Satz 1.37(a) auf $\tilde{X}$ frei operiert. Die Überlagerung π ist nach Aufgabe 1.35(b) regulär. Deshalb ist nach Satz 1.37(c) die Riemannsche Fläche X biholomorph äquivalent zu $\tilde{X}/\Gamma$.

Die Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ ist wegen der Definition der universellen Überlagerung einfach zusammenhängend. Nach dem großen Riemannschen Abbildungssatz (Theorem 2.42) ist $\tilde{X}$ entweder zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zu $\mathbb{C}$ oder zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalent.

Ist $\tilde{X}$ zu $\widehat{\mathbb{C}}$ biholomorph äquivalent, so gilt $\Gamma = \{\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}$ nach Aussage 1.41. Also liegt der Fall (a) vor.

Ist $\tilde{X}$ zu $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent, so hat Γ eine der drei Formen (T), (Z), (E) aus Aussage 1.39. Nach der Diskussion, die in Abschnitt 1.5 auf Aussage 1.39 folgt, entsprechen diese drei Fällen jeweils komplexen Tori, der punktierten Ebene $\mathbb{C}^*$ und der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, und somit den Fällen (b)(iii), (b)(ii), (b)(i) aus dem Uniformisierungssatz.

Es bleibt der Fall, dass $\tilde{X}$ zu $\mathbb{D}$ biholomorph äquivalent ist. Nach Korollar B.3 ist die Automorphismengruppe von $\mathbb{D}$ tatsächlich wie in (c) angegeben, und deshalb liegt nach dem zuvor gesagten der Fall (c) aus dem Uniformisierungssatz vor. □