KAP 10. Existenz von Nash-Gleichgewichten

- Frage:

  Hat jedes Spiel ein Nash-Gleichgewicht?

- Warum ist diese Frage interessant?

- Häufig sind Spiele zu kompliziert, um N-GG explizit zu bestimmen

  – dennoch will man qualitative Aussagen machen (komparative Statik)

  – dafür muss man aber wissen, dass es ein Nash-GG gibt

- Wenn viele Spiele kein Nash-GG hätten, wäre das Nash–Konzept ...

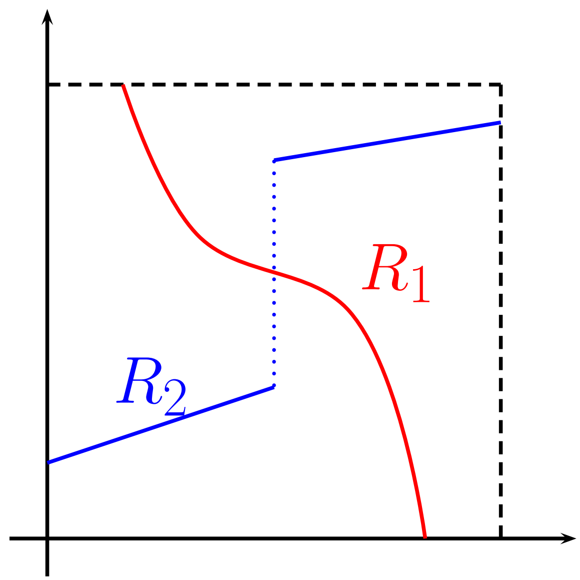
  ... als wissenschaftliche Theorie unbefriedigend

Existenz von Nash-Gleichgewichten

- Es gibt einfache Spiele, die kein Nash-GG haben
  - z.B. wer die grösste Zahl sagt, gewinnt
  - (auch kein GG in gemischten Strategien)
- Wir werden also nicht-triviale mathematische Bedingungen an G formulieren, aus denen wir Existenz eines N-GG ableiten können
  - Dieser Existenzbeweis war der eigentliche Beitrag Nashs
- Die dargestellten Techniken werden auch anderswo verwendet
  - allgemeine Gleichgewichtstheorie, Makro, ...

Grundidee 0

- Wir wissen: N-GG ist Schnittpunkt von Reaktionsfunktionen
- Also: Formuliere hinreichende Bedingungen an G, so dass es einen Schnittpunkt gibt
  - hier gibt's <u>keinen</u>



  - Stetigkeit der Reaktionsfunktion (= keine Sprungstellen) scheint wichtig

Grundidee 1: N-GG als Fixpunkt

- Dynamische Interpretation
  - Angenommen G wird über viele Runden $t = 0, 1, 2, \ldots$ gespielt
  - In jeder Runde t spielt Spieler i eine beste Antwort ...
  - ... gegen die Strategie der Gegenspieler s_{-i}^{t-1} aus der <u>Runde zuvor</u>
- Also: $s_1^t = R_1(s_2^{t-1})$ und $s_2^t = R_2(s_1^{t-1})$
- Beobachtung: N-GG ist ein <u>**RUHE**punkt</u> dieses Prozesses

  ◇ Falls (s_1^{t-1}, s_2^{t-1}) N-GG, dann $(s_1^t, s_2^t) = (s_1^{t-1}, s_2^{t-1})$
- Mathematisch heisst ein solcher Punkt <u>**FIX**punkt</u>

Fixpunkt mathematisch

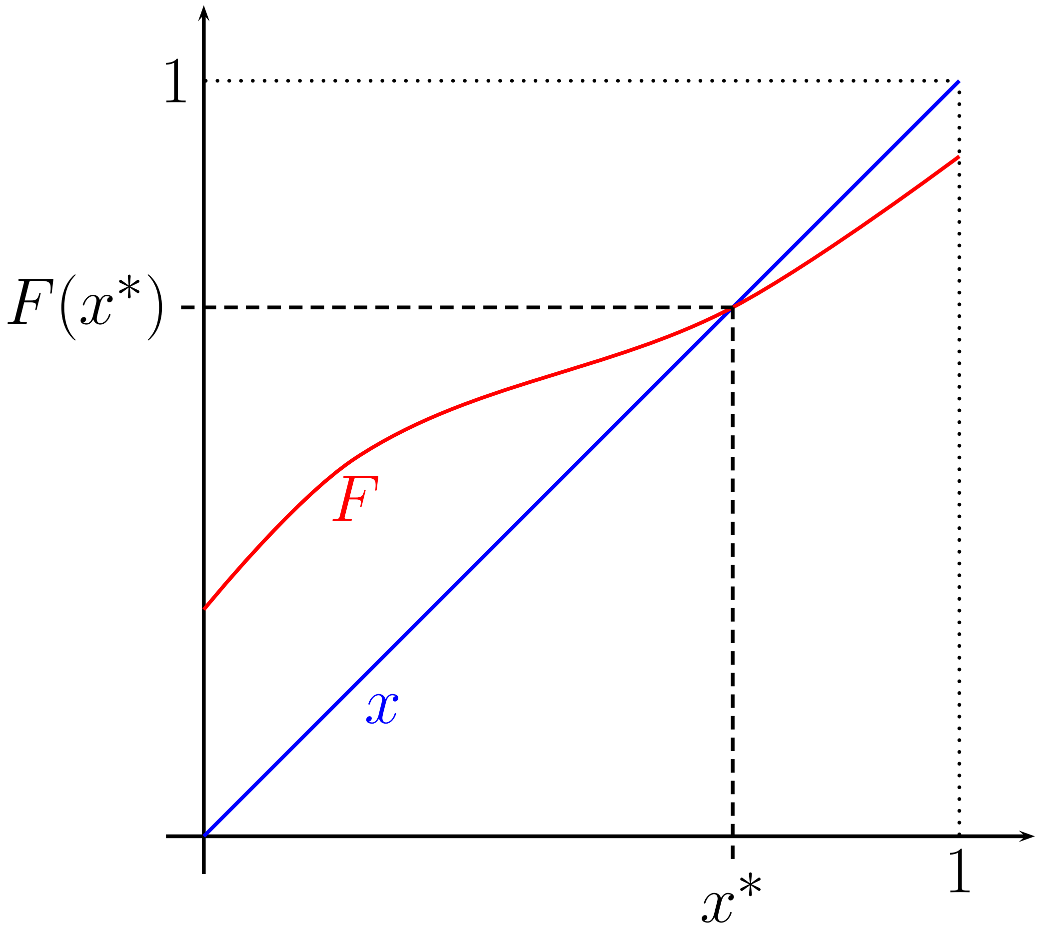
- Sei $F : X \longrightarrow X$ eine Funktion ...
  - ... aus dem Urbildbereich X in den Bildbereich X
- Ein Punkt $x^* \in X$ heisst Fixpunkt von F, wenn

$$F(x^*) = x^*$$

- x^* ist fix, weil er sich durch Anwendung von F nicht bewegt

Eindimensinale Illustration

◇ $X = [0, 1]$



Grundidee 1A: Schnittpunkt als Fixpunkt

- Betrachte nun die folgende <u>mehrdimensionale</u> Funktion
  - nimm ein beliebiges Strategienprofil $s = (s_1, s_2) \in S$
  - und bilde es ab auf das Strategienprofil $(R_1(s_2), R_2(s_1))$
- Formal: Definiere die Funktion $R : S \to S$ mit

$$R(s) = (R_1(s_2),\ R_2(s_1))$$

- R bildet einen Vektor auf einen Vektor ab

Illustration: $R(s) = (R_1(s_2),\ R_2(s_1))$

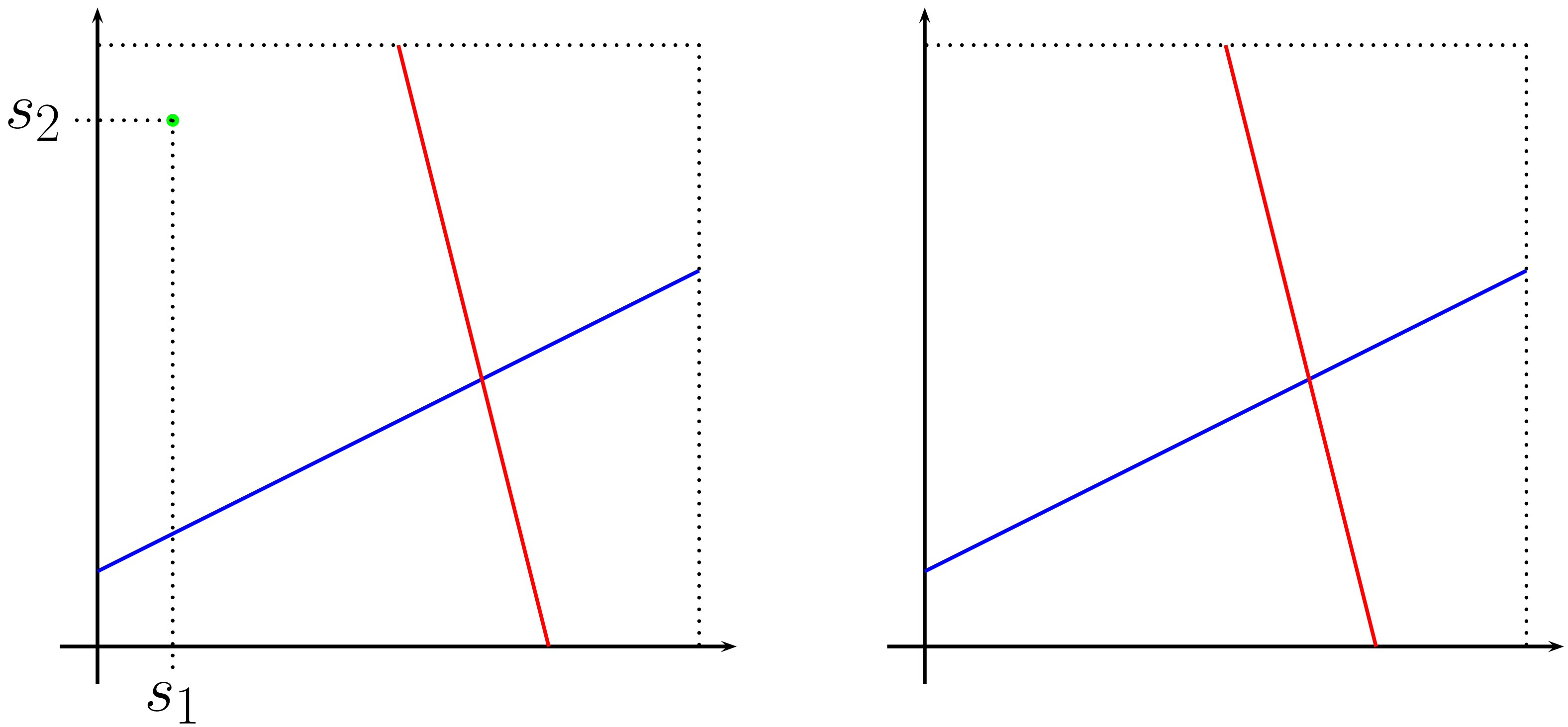


Illustration: $R(s) = (R_1(s_2),\ R_2(s_1))$

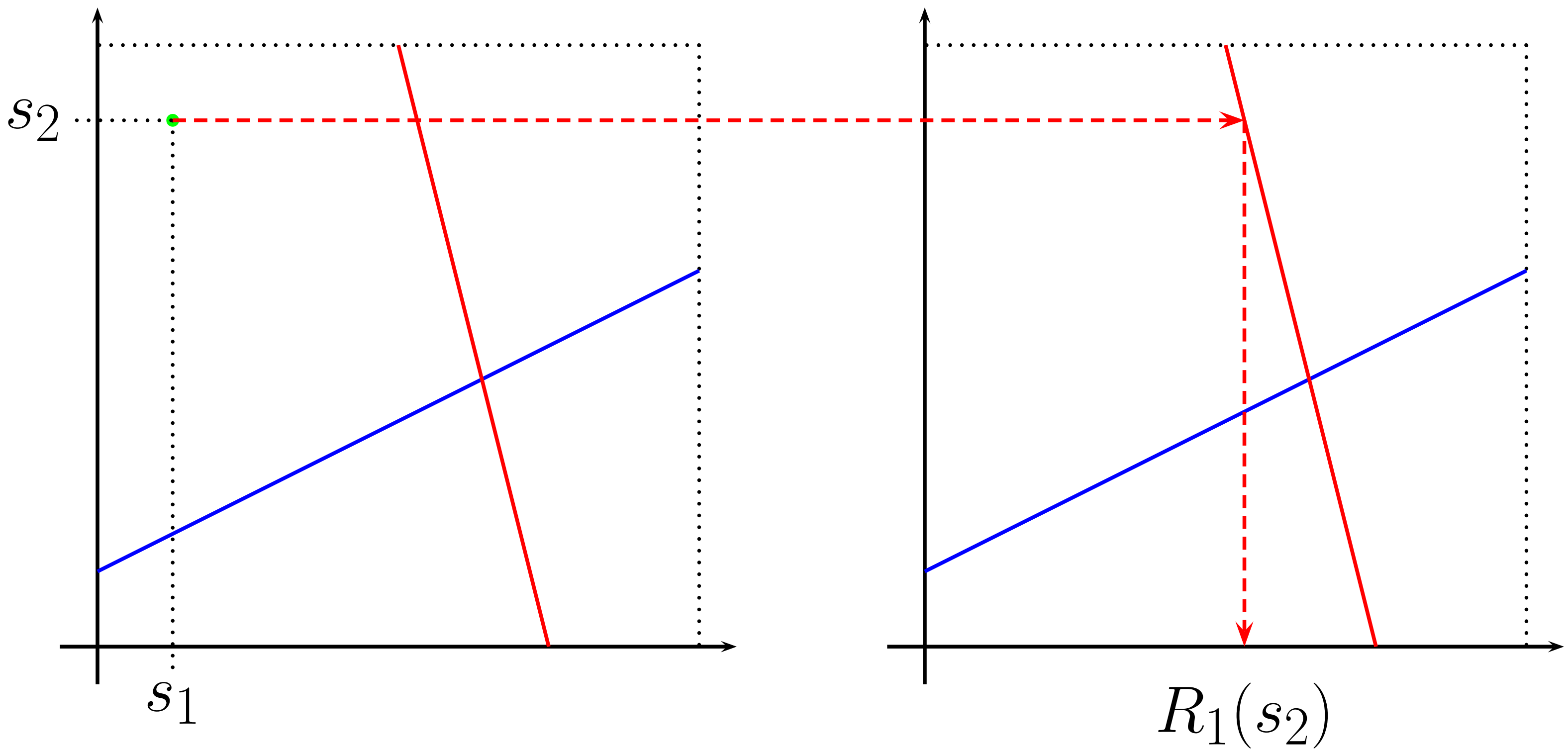


Illustration: $R(s) = (R_1(s_2),\ R_2(s_1))$

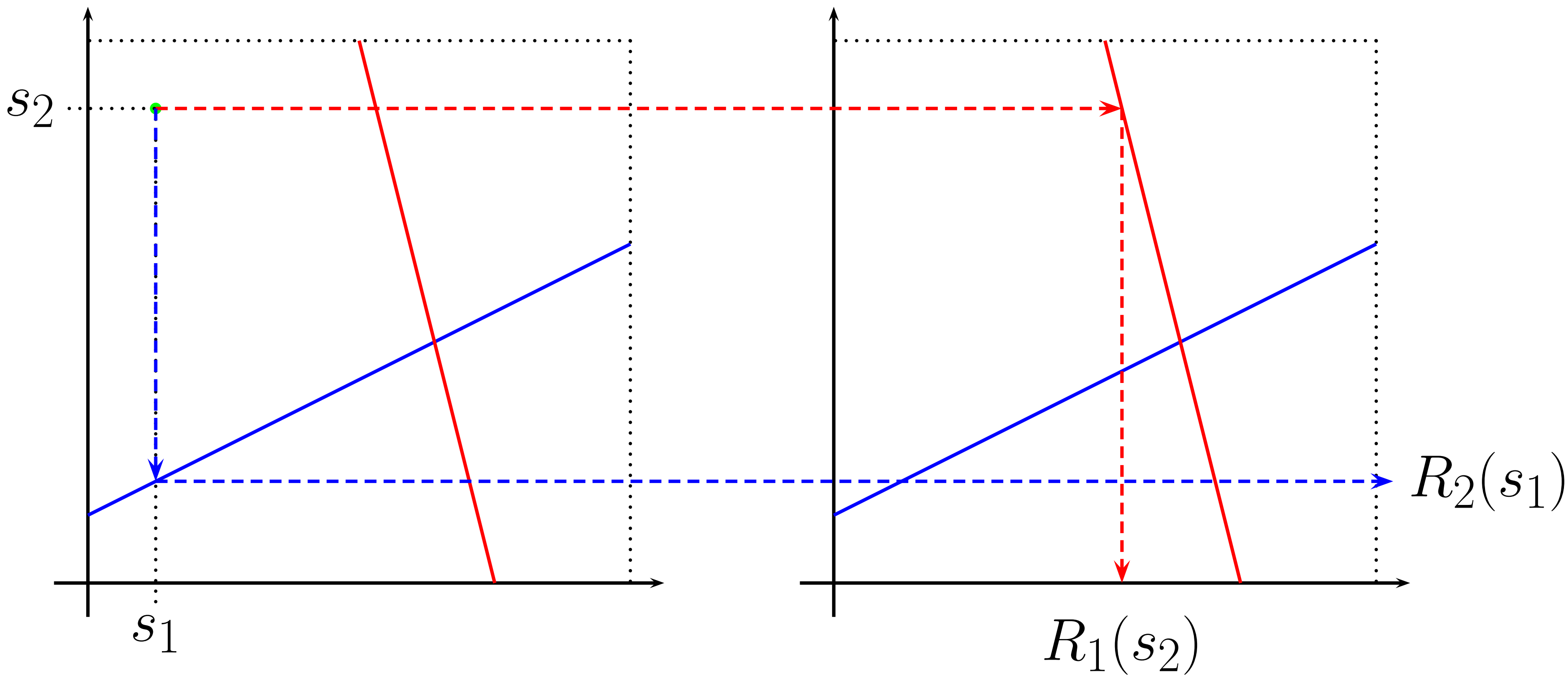
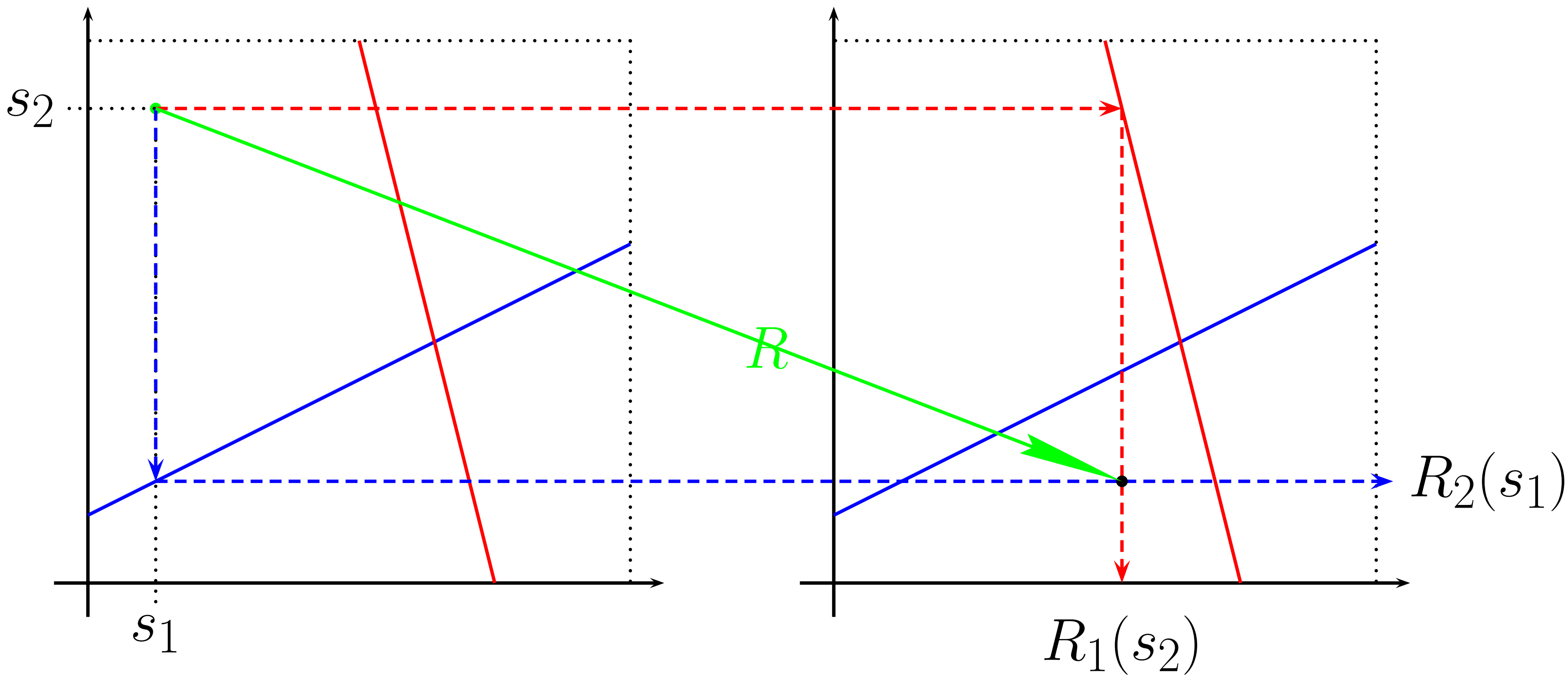


Illustration: $R(s) = (R_1(s_2),\ R_2(s_1))$



- Beobachtung: s^* ist N-GG $\Leftrightarrow$ s^* ist Fixpunkt von R
- Jetzt müssen wir im Prinzip nur noch einen Fixpunktsatz anwenden!

Fixpunktsatz von Brower Sei

(a) $X \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex

(b) $F : X \longrightarrow X$ eine Funktion

(c) F stetig auf X

Dann hat F einen Fixpunkt $x^* \in X$.

- Erläuterung
  - kompakt: beschränkt + Menge enthält ihren Rand
  - konvex: jede Linie zwischen zwei Punkten der Menge ist in der Menge
  - stetig: wird x nur wenig verändert, ...

    ... so verändert sich $F(x)$ auch nur wenig (keine Sprünge)

Idee des Beweises für Existenz eines Nash-GG

- Einfach Fixpunktsatz auf R anwenden!
- Zeige, dass

  (a) $S \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex

  (b) $R : S \to S$ eine Funktion

  (c) R stetig auf S

  Dann existiert ein Nash-GG.

Vorgehensweise

- (a), (b), (c) folgen aus Bedingungen an G
  - (a) kann direkt als Bedingung an S postuliert werden
  - (b) und (c) sind Bedingungen an die Reaktionsfunktionen
- Hauptschwierigkeit: R ist nicht direkt gegeben, ...

  ... sondern ergibt sich als Lösung eines Optimierungsproblems!
- Ob R die Bedingungen (b) und (c) efüllt, ...

  ... hängt von u_i ab !

Existenzsatz:

Sei $G = \{S_i, u_i\}_{i=1}^n$ ein Spiel in Normalform. Für alle i gelte

- S_i ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, kompakt und konvex
- $u_i(\cdot)$ ist stetig auf S
- $u_i(\cdot, s_{-i})$ ist strikt konkav für alle s_{-i}

Dann gibt es ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

– strikt konkav = "Mischungen werden strikt präferiert":

◇ $u_i(\alpha s_i + (1-\alpha)s'_i, s_{-i}) > \alpha u_i(s_i, s_{-i}) + (1-\alpha)u_i(s'_i, s_{-i})$

für alle $\alpha \in (0, 1)$

Verallgemeinerung

- Man kann Strikte Konkavität abschwächen
- Dann ist R_i allerdings nicht mehr eindeutig und damit ...
  - ... ist R eine Korrespondenz anstatt einer Funktion
  - (Korrespondenz = Mengenwertige Funktion)
- In diesem Fall: Fixpunktsatz von Kakutani anwenden!
  - Analogon von Brower für Korrespondenzen

Folgerung: Sei $G = \{S_i, u_i\}_{i=1}^{n}$ ein Spiel in Normalform mit endlichen Strategienräumen $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK_i}\}$.

Dann gibt es ein Nash-Gleichgewicht.

- Möglicherweise gibt es nur ein Nash-GG in gemischten Strategien
- Grund:
  - ◇ S_i <u>nicht</u> konvex!
  - ◇ Aber: Der Strategienraum Σ_i der gemischten Erweiterung Γ <u>ist</u> konvex
- Das ist der Satz von Nash (für Mathematiker trivial)

Steigende Reaktionsfunktionen

- Die genannten Bedingungen sichern Stetigkeit der Reaktionsfunktionen
  – dies impliziert, dass sie sich schneiden <u>müssen</u>
- Die Reaktionsfunktionen <u>können</u> sich aber auch schneiden, wenn sie nicht stetig sind
- In der Tat:
  – wenn die Reaktionsfunktionen <u>ansteigen</u>, gibt es immer einen Schnittpunkt!
- Versuche, Gegenbeispiel zu zeichnen!

Supermodulare Spiele

- Spiele mit steigenden Reaktionsfunktionen heißen supermodular
- Steigende Reaktionsfunktionen sind gewährleistet, wenn die Kreuzableitungen der Nutzenfunktionen positiv sind
- Satz: Seien $S_i \subseteq \mathbb{R}$. Für alle i, j gelte
$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i \partial s_j} \geq 0.$$
  Dann ist R_i wachsend in s_j

Intuition im 2 Spieler Fall

- Betrachte s_2' und s_2'' mit $s_2' < s_2''$
- Sei s_1' eine BA gegen s_2'
  - ◇ Dann ist $\frac{\partial u_1}{\partial s_1} = 0$ an der Stelle (s_1', s_2')
- Positive Kreuzableitung bedeutet
  - ◇ $\frac{\partial u_1}{\partial s_1}$ ist steigend in s_2
- Also: $\frac{\partial u_1}{\partial s_1} > 0$ an der Stelle (s_1', s_2'')
  - ◇ Also: wenn SP2 s_2'' spielt, erhöht sich u_1 wenn SP1 s_1' erhöht
- Also: BA gegen s_2'' ist größer als s_1'
  - ◇ Also: Reaktionsfunktion steigend

Satz über supermodulare Spiele

Sei $G = \{S_i, u_i\}_{i=1}^n$. Gelte für all i, j

- S_i ist kompakt
- u_i ist zwei mal differenzierbar mit

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i \partial s_j} \geq 0$$

Dann gibt es ein reines Nash-Gleichgewicht.

(Beweis: Fixpunktsatz von Tarski)