



Prof. Dr. S. Zacher

Viele Gesichter des PID-Reglers

Darstellungsformen, Übertragungsfunktionen und Sprungantworten von PID-Reglern

“Zur Realisierung einer PID-Regleinrichtung gibt es viele Möglichkeiten, z. B. durch parallele Erzeugung des P-, I- und D-T₁-Anteils mittels der Schaltung nach Bild 4.11, 4.19 sowie 4.30 und Addition der Ausgangsgrößen durch einen Summierer (Bild 4.8).“

S. Zacher, M. Reuter: *Regelungstechnik für Ingenieure*,
Seite 137, Springer Vieweg Verlag, 14. Auflage, 2014

Abstract, Urheberrechts- und Haftungshinweis

PID-Regler gehört zu den meist verbreiteten Industrieregler. Laut Literaturangaben [1] ca. 90% aller Regler sind PID-Regler. Zwar sind sie seit 1911 bekannt und seitdem vielseitig untersucht worden, bleibt dieses Thema immer noch aktuell. Beispielweise wurde ein ganzer IFAC-Workshop [2] mit ca. 100 Vorträgen den digitalen PID-Reglern gewidmet.

Beim Studium werden PID-Regler bei vielen verschiedenen Pflichtfächern behandelt. Trotzdem bleiben bei Studierenden manchmal einige Fragen wegen Vielfalt von Formen der PID-Regler offen. Die Implementierung von theoretisch richtig und rechnerisch korrekt eingestellten Kennwerten kann bei Industrieregler oder bei der Simulation verfälscht werden, wenn z.B. die Umrechnung der Kennwerten aus multiplikative in die additive Form vernachlässigt wird.

Nachfolgend werden die bekannten Formen der Standard-PID-Regler (multiplikative, additive, ideale, reale) sowie neue Formen (mit Gewichtskoeffizienten und getrennten Regeldifferenzen) beschrieben, simuliert und an Beispielen ausgewertet.

-
- [1] *Ang K.H., Chong G., Li Y.* PID control system analysis, design, and technology. IEEE Trans. on Control Syst. Tech., vol.13, N 4, July 2005.
 - [2] Digital control: past, present and future of PID control, in Proc. IFAC Workshop, J. Quevedo and T. Escobet, Eds., Terrassa, Spain, Apr. 5-7, 2000.
-

Die vorliegende Publikation unterliegt der Urheberrecht. **Alle Rechte sind bei S. Zacher vorbehalten.** Die Weiterentwicklung oder Nutzung der Publikation ohne Referenz auf Urheber ist nicht zugelassen.

Für die Anwendung der vorliegenden Publikation in der Industrie, im Laborbetrieb und in anderen praktischen Fällen sowie für eventuelle Schäden, die aus unvollständigen oder fehlerhaften Angaben über das dynamische Systeme ergeben können, übernimmt der Autor **keine Haftung.**

INHALT:

1. Einführung	Seite 4
2. Geschichte	Seite 5
3. Grundlagen (Übersicht)	Seite 6
4. Multiplikative Form des idealen PID-Reglers	Seite 13
5. Additive Form des idealen PID-Reglers.....	Seite 17
6. Umrechnung von Kennwerten aus multiplikative in die additive Form	Seite 18
7. Multiplikative Form des realen PID-Reglers	Seite 22
8. Additive Form des realen PID-Reglers.....	Seite 24
9. PID-Regler mit Gewichtskoeffizienten für PI- und PD-Anteile.....	Seite 28
10. PID-Regler mit gewichteten Regeldifferenzen	Seite 31
11. Stellgrößenbeschränkung	Seite 32
12. Zusammenfassung	Seite 35

1 Einführung

Ein Regler, der aus drei Anteilen besteht, nämlich P-, I- und D-Anteil, heißt PID-Regler:

P – proportional wirkend

I – integrierend wirkend

D – differenzierend wirkend

Nach einer kurzer Literaturübersicht werden folgende Beschreibungsformen von PID-Reglern behandelt:

- **ideale PID-Regler**

- multiplikative Form
(serielle Form)

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n}$$

- additive Form
(parallele Form)

$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{PR}}{sT_n} + sK_{PR}T_v$$

- **reale PID-Regler bzw. PID-T1-Regler**

- multiplikative Form
(serielle Form)

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n(1 + sT_R)}$$

- additive Form
(parallele Form)

$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{PR}}{sT_n} + \frac{sK_{PR}T_v}{1 + sT_R}$$

K_{PR} – Proportionalbeiwert

T_n – Nachstellzeit

T_v – Vorhaltezeit

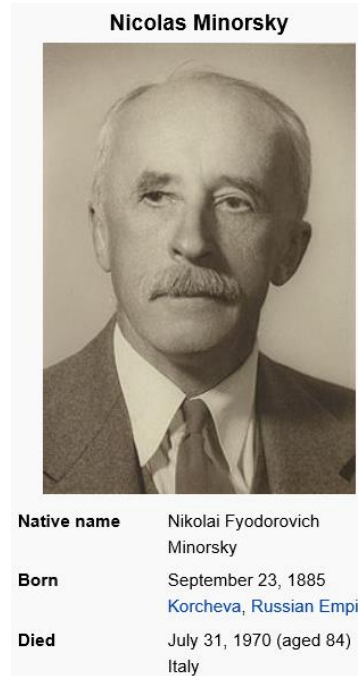
T_R – Realisierungszeitkonstante

Die Realisierungszeitkonstante ist kein Entwurfsparameter, sondern der Freiheitsgrad, um den PID-Regler in der Praxis implementieren zu können.

2 Geschichte

Als Erfinder der PID-Regelung werden *Elmer Sperry* (1911) und *Nicolas Minorsky* (1922) genannt.

Quelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Regelungstechnik>



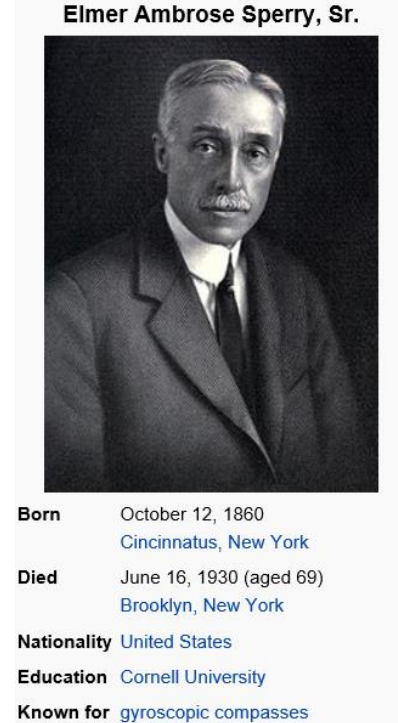
Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Minorsky

Weitere Links zur PID-Geschichte

<http://ieeecss.org/CSM/library/1984/nov1984/w10-15.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller

<http://www.becklaser.de/heinbeck/sperry1.html>



Quelle

https://en.wikipedia.org/wiki/Elmer_Ambrose_Sperry

[/Elmer_Ambrose_Sperry](https://en.wikipedia.org/wiki/Elmer_Ambrose_Sperry)

In the history, the first person that incorporated PID control was Elmer Sperry (1911) who devised automatic ship steering mechanism which automatic gain adjustment to compensate for the disturbances such like wind, wave or other situations. Then, in 1922, Nicholas Minorsky (1885-1970) presented a clear analysis of the control involved in position control systems and formulated a control law that we now refer to as PID control. His paper is also basing on the research of ship steering problem. This section introduces the basic problem and analysis done by N. Minorsky to see how he worked the theorem out step by step.

http://137.148.142.85/cactwiki/index.php5/PID_controller,From_where_Minorsky_started

3 Grundlagen (Übersicht)

Spezialgebiete der Steuer- und Regelungstechnik WS 2008/2009
PID - Einstellregeln

Boulent Bate

Spezialgebiete der Steuer- und Regelungstechnik

WS 2008/09

FH Dortmund

Schriftliche Ausarbeitung

Thema:

PID - Einstellregeln

Verfasser: Boulent Bate

Betreuer: Dr.-Ing. Jörg Kahlert

Quelle:

http://www.kahlert.com/web/download/pid_einstellregeln.pdf

1.2 Der PID – Regler

Der PID – Regler ist einer der wichtigsten und häufig eingesetzten Standardregler. Dieser besteht aus den folgenden drei parallel miteinander geschalteten Anteilen:

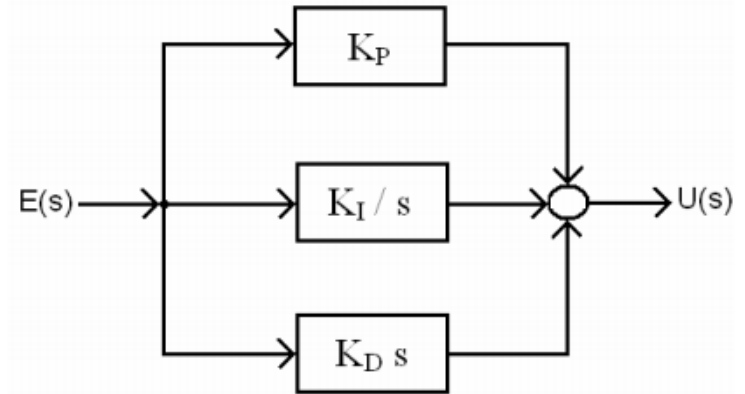


Abbildung 2 : Strukturbild eines PID - Reglers

P – Anteil mit Übertragungsfunktion K_P

I – Anteil mit Übertragungsfunktion K_I / s

D – Anteil mit Übertragungsfunktion $K_D s$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} K_{PID}(s) &= K_P + K_I / s + K_D s \\ &= K_P (1 + 1 / T_N s + T_V s) \end{aligned}$$

mit $K_I = K_P / T_N$ und $K_D = K_P * T_V$

Quelle: http://www.kahlert.com/web/download/pid_einstellregeln.pdf

T_N wird hierbei als Integral oder Nachstellzeit bezeichnet und legt den Einfluss des I-Anteiles fest. T_V wird als Differential oder Vorhaltezeit bezeichnet und bestimmt den Einfluss des D-Anteiles an der Regelung.

Folglich werden die drei Größen K_P (auch oft als K_R bezeichnet), T_N und T_V als Einstellwerte des Reglers bezeichnet.

Der proportional wirkende Anteil hilft hier bei einer Regelabweichung schnell zu reagieren, kann aber die Abweichung nicht vollständig eliminieren. Deshalb wird noch ein integral wirkender Anteil hinzugezogen. Solange eine Regelabweichung auftritt und gemessen wird, wird die Stellgröße auch verändert. Der differential wirkende Anteil bewertet außerdem noch die Regelabweichung und berechnet so deren Änderungsgeschwindigkeit, so dass der Regler schon bei Ankündigungen von Veränderungen reagieren kann.

PID – Regler sind daher sehr beliebt, da sie die Vorteile der einfachen Reglertypen kombinieren, wie z.B. schnelle Reaktion und exakte Ausregelung.



4.3 Zeitverhalten stetiger Regeleinrichtungen

137

$$y_R(s) = K_{PR} e_0 \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 T_n} + T_v \right] \quad (4.122)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich folgt aus (4.122) die Sprungantwort der idealen PID-Regeleinrichtung

$$y_R(t) = K_{PR} e_0 \left[1 + \frac{t}{T_n} + T_v \delta(t) \right] \quad (4.123)$$

mit dem in **Bild 4.38** dargestellten Verlauf.

Zur Realisierung einer PID-Regeleinrichtung gibt es viele Möglichkeiten, z. B. durch parallele Erzeugung des P-, I- und D-T₁-Anteils mittels der Schaltung nach Bild 4.11, 4.19 sowie 4.30 und Addition der Ausgangsgrößen durch einen Summierer (Bild 4.8).

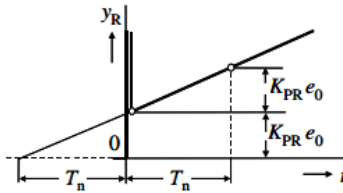


Bild 4.38 Sprungantwort eines idealen PID-Reglers

Bild 4.39 zeigt eine vielfach angewandte Schaltung, ähnlich der PD-T₁-Regeleinrichtung nach Bild 4.33. Das in der Rückführung liegende T-Glied ist allerdings durch den als Impedanzwandler geschalteten Operationsverstärker OP2 entkoppelt (s. a. Abschnitt 4.1, Bild 4.6, Gl. (4.8a)). Man spricht hier von aktiver Rückkopplung, während in Bild 4.33 eine passive Rückkopplung vorliegt.

Am nichtinvertierenden Eingang des OP2 liegt die durch den Spannungsteiler gebildete Spannung

$$x_2(s) = y_R(s) \frac{R_p + \frac{1}{sC_3}}{R_3 + R_p + \frac{1}{sC_3}} = y_R(s) \frac{1 + sC_3 R_p}{1 + sC_3(R_3 + R_p)} \quad (4.124)$$

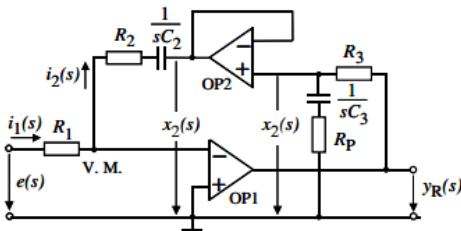


Bild 4.39 PID-T₁-Regeleinrichtung mit aktiver Rückführung

Für den invertierenden Eingang V.M. gilt

138

4 Regeleinrichtung

$$\text{mit } i_1(s) = \frac{e(s)}{R_1}$$

$$\text{und } i_2(s) = -\frac{x_2(s)}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = -x_2(s) \frac{sC_2}{1 + sC_2 R_2}$$

Setzen wir (4.126) und (4.127) in (4.125) unter Berücksichtigung von (4.124) ein, so folgt:

$$G_R(s) = \frac{y_R(s)}{e(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{(1 + sC_2 R_2)[1 + sC_3(R_3 + R_p)]}{sC_2 R_2(1 + sC_3 R_p)} \quad (4.128)$$

und mit den Abkürzungen

$$K'_{PR} = \frac{R_2}{R_1}; \quad T'_n = C_2 R_2; \quad T'_v = C_3(R_3 + R_p); \quad T_1 = C_3 R_p;$$

$$G_R(s) = \frac{y_R(s)}{e(s)} = K'_{PR} \frac{(1 + sT'_n)(1 + sT'_v)}{sT'_n(1 + sT_1)} \quad (4.129)$$

Hierin ist T₁ die die Verzögerung bewirkende parasitische Zeitkonstante. Die Übertragungsfunktion des realen PID-T₁-Reglers kann man sich durch Reihenschaltung des idealen PID-Reglers nach (4.120) und eines P-T₁-Gliedes mit

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT_1}$$

entstanden denken. Für R_p = 0 bzw. T₁ = 0 geht Gl. (4.129) in Gl. (4.120) über.

• Sprungantwort

Zur Ermittlung der Sprungantwort der PID-T₁-Regeleinrichtung lösen wir (4.129) nach y_R(s) auf und erhalten mit

$$e(t) = e_0 \cdot \sigma(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad e(s) = \frac{e_0}{s}$$

und Vernachlässigung des negativen Vorzeichens

$$y_R(s) = e_0 \frac{K'_{PR}}{T'_n T_1} \frac{(1 + sT'_n)(1 + sT'_v)}{s^2 \left(s + \frac{1}{T_1} \right)} \quad (4.130)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich mittels Residuensatz erhält man

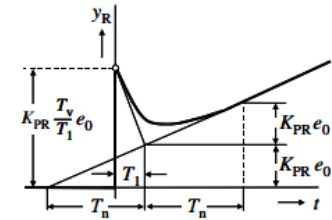


Bild 4.40 Sprungantwort einer PID-T₁-Regeleinrichtung

3 Grundlagen (Übersicht)

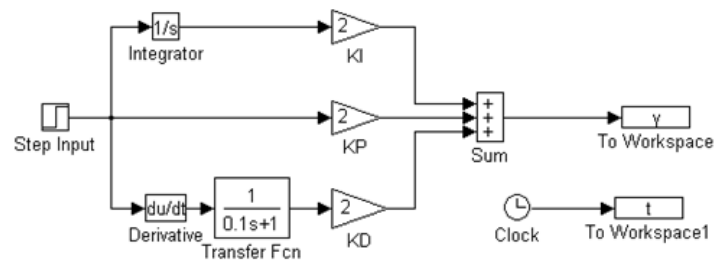
Quelle: Zacher, S.: *Duale Regelungstechnik*, VDE-Verlag, 2003

7.1.13 Simulation eines PID-Reglers mit MATLAB/Simulink

Die Eingabe von Elementen des Wirkungsplans erfolgt durch die Simulink-Bedienoberfläche. Die Ausgangsgröße y und die Zeit t werden über die Schnittstellen *To Workspace* in Matlab übergeben und im Matlab-Command-Fenster mit der Anweisung `plot(t, y)` aufgerufen. Vorerst soll die Simulation mit dem Menü-Befehl *Simulation/Start* im Simulink-Fenster gestartet werden.

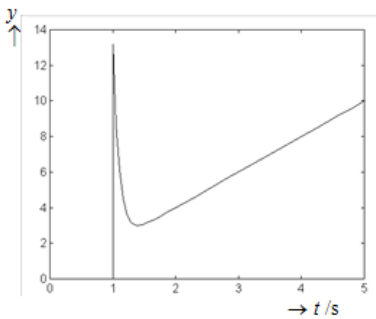
Wirkungsplan eines PID-T₁-Reglers als Parallelschaltung von P-, I- und D-T₁-Anteilen mit:

$$K_P = K_{PR}^* \quad K_I = K_{PR}^* / T_n^* \quad K_D = K_{PR}^* \cdot T_v^*$$

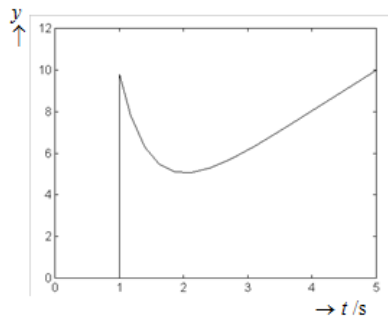


Sprungantworten des PID-T₁-Reglers nach dem obigen Wirkungsplan mit:

$$K_P = 2 \text{ s} \quad K_I = 2 \text{ s}^{-1} \quad K_D = 2 \text{ s}$$



a) mit Zeitkonstante $T_1 = 0,1 \text{ s}$



b) mit Zeitkonstante $T_1 = 0,5 \text{ s}$

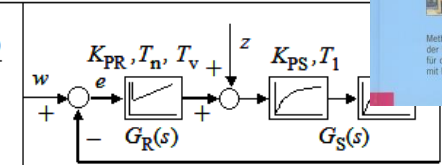
7.2.7 PID-Regler mit P-T₂-Strecke

Regler:

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n}$$

Regelstrecke:

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$



Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{K_{PR}K_{PS}(1+sT_n)(1+sT_v)}{sT_n(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

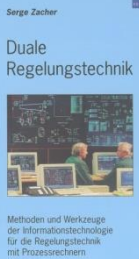
Im Fall einer Kompensation $T_n = T_2$ und $T_v = T_1$, wobei $T_2 > T_1$ ist,

$$\text{kürzen sich die Linearfaktoren heraus: } G_0(s) = \frac{K_{PR}K_{PS}}{sT_n}$$

Führungsverhalten	Störverhalten
$G_w(s) = \frac{K_{PR}K_{PS}}{sT_n + K_{PR}K_{PS}}$	$G_z(s) = \frac{sT_n K_{PS}}{(1+sT_1)(1+sT_2) + K_{PR}K_{PS}}$
$G_w(s) = \frac{1}{1+sT}$	$G_z(s) = \frac{sT_n K_{PS}}{(sT_n + K_{PR}K_{PS})(1+sT_1)(1+sT_2)}$
Vollkompensierter Regler führt zum aperiodischen Fall mit Zeitkonstante $T = \frac{T_1}{1 + K_{PR}K_{PS}}$	
P-T ₁ -Verhalten mit Zeitkonstante T	P-T ₃ -Verhalten mit Zeitkonstanten T, T_1, T_2
$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_w(s) \cdot w_0 = w_0$	$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_z(s) \cdot z_0 = 0 \cdot z_0 = 0$
$e(\infty) = w_0 - x(\infty) = w_0 - w_0 = 0$	$e(\infty) = -x(\infty) = 0$

PID als universeller Regelalgorithmus:

P-Regler mit $T_n = \infty$ und $T_v = 0$	PD-Regler mit $T_n = \infty$	PI-Regler mit $T_v = 0$
--	---------------------------------	----------------------------



Hinweise zur Lösung

Ziegler-Nichols-Verfahren:

Im kritischen Zustand bzw. an der Stabilitätsgrenze liegt wenigstens eine Polstelle auf der imaginären Achse in der s -Ebene. Der Dämpfungsgrad ist dabei $\varrho = 0$; im Regelkreis entstehen die ungedämpften Schwingungen.

Ausgehend aus den kritischen Werten des Proportionalbeiwertes K_{PRkrit} und der kritischen Periodendauer T_{krit} sind die empfohlenen Kenngrößen nach der Ziegler-Nichols Tabelle für verschiedene Reglertypen unten gezeigt.

Parameter	P-Regler	PI-Regler	PID-Regler
K_{PR}	$0,5 \cdot K_{PRkrit}$	$0,45 \cdot K_{PRkrit}$	$0,6 \cdot K_{PRkrit}$
T_n	-	$0,83 \cdot T_{krit}$	$0,5 \cdot T_{krit}$
T_v	-	-	$0,125 \cdot T_{kr}$



<p>PID-Regler, idealer</p>	<p>multiplikative Form</p> $G_R = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n}$ <p>additive Form</p> $G_R = K_{PR}^* \left(1 + \frac{1}{sT_n^*} + sT_v^* \right)$	
<p>PID-T1-Regler (realer)</p>	<p>multiplikative Form</p> $G_R = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n(1 + sT_1)}$ $K_{PR}^* = K_{PR} \left(1 + \frac{T_v}{T_n} \right)$ $T_n^* = T_n + T_v; \quad T_v^* = \frac{T_n T_v}{T_n + T_v}$	



3 Grundlagen (Übersicht)

Neue Bücher von Kollegen mit PID-Grundlagen



3 Grundlagen (Übersicht)

Weitere Links zu PID-Grundlagen

<http://www.kahlert.com/web/download.php>

Kostenlose Add-Ons

tutg.zip	BORIS-Block, der über KP, Tu und Tg parametrierbar ist. Intern werden diese Parameter automatisch in ein entsprechendes P-T2-Glied überführt.
indupid.zip	Industrie-PID-Regler für BORIS mit stoßfreier Umschaltung
PIDController.zip	PID-Regler für BORIS (Darstellung nach DIN)

Berichte & Veröffentlichungen

pid_einstellregeln.pdf	Vergleich unterschiedlicher Einstellregeln für PID-Regler
--	---

Videothek

WinFACT / BORIS

WinFACT 2016 Die neuen Add-Ons im Detail	In dem Video werden das PID Design Center, das System Identification Center und das VBScript-Modul als neue Add-Ons von BORIS in WinFACT 2016 vorgestellt.
---	--

Regelungstechnische Kompaktmodelle

Regelungstechnik-Spielwiese	Learning by Doing: Unsere neue Regelungstechnik-Spielwiese ermöglicht einen praxisorientierten Einstieg in die Grundlagen der Regelungstechnik. Das Video vermittelt einige Eindrücke von den vielfältigen Möglichkeiten. Details finden Sie hier .
Regelentwurf nach Ziegler/Nichols mit d. Regelungstechnik-Spielwiese	Dieses Video zeigt Ihnen, wie Sie mit unserer Regelungstechnik-Spielwiese auf einfache Weise einen PID-Reglerentwurf nach dem Verfahren des Stabilitätsrandes von Ziegler/Nichols durchführen können.

http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/7/tc/regelung/grundlagen/regelung_grundlagen.vlu/Page/vsc/de/ch/7/tc/regelung/grundlagen/regler/pid_ctrl.vscml.html

<http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/studium/fuzzy/txt/regel.pdf>

https://prof.beuth-hochschule.de/fileadmin/user/ottens/Skripte/Einfuehrung_in_die_Regelungstechnik_01.pdf

<https://www.unibw.de/lrt15/Institut/lehre/unterlagen/srtvorba/SRTv10.pdf>

4 Multiplikative Form des idealen PID-Reglers

Ein idealer PID-Regler in multiplikativer Form

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n}$$

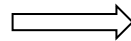
ist zwar praktisch nicht realisierbar, wird jedoch überwiegend beim Studium verwendet, weil diese Form für die Kompensation und folglich für die Einstellung des Reglers geeignet ist.

Beispiel: $G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$ $K_{PS} = 2,5$ $T_1 = 3s$ $T_2 = 1s$ $T_3 = 8s$

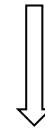
$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n} \frac{K_{PS}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$$

Kompensation: $T_n = T_{\text{größte}} = 8s$

$$T_v = T_{\text{zweitgrößte}} = 3s$$



$$G_0(s) = \frac{K_{PR}K_{PS}}{sT_n(1 + sT_2)}$$



$$K_{PR} = \frac{T_n}{2K_{PS}T_1} = \frac{8}{2 \cdot 2,5 \cdot 1} = 1,6$$

4 Multiplikative Form des idealen PID-Reglers

Beispiel: Ein idealer PID-Regler in multiplikativer Form mit folgenden Kennwerten

$$K_{PR} = 10$$

$$T_n = 0,2$$

$$T_v = 0,1$$

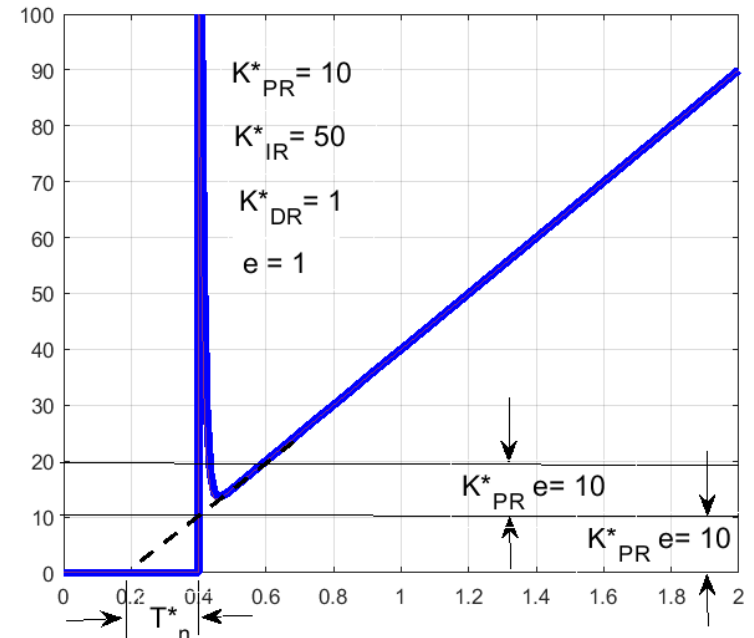
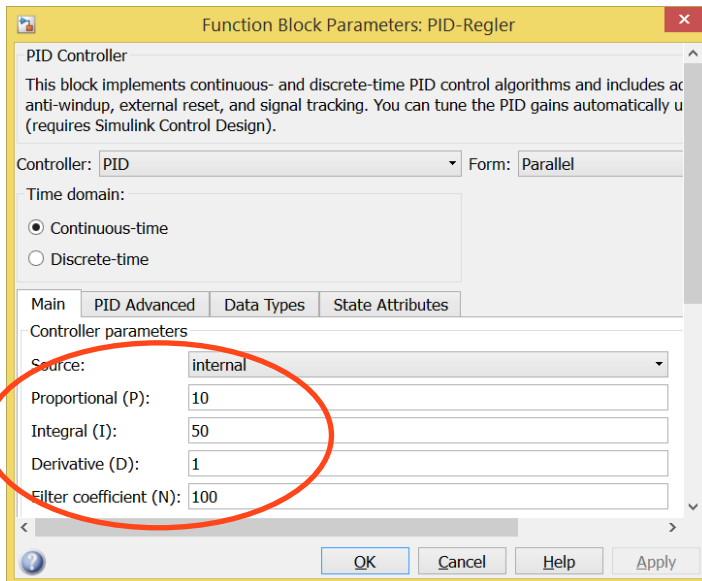
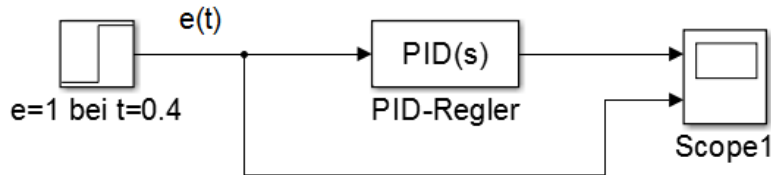
soll mit dem PID-Baustein von MATLAB/Simulink simuliert werden. Dafür werden die Kennwerte an den PID-Baustein angepasst:

$$P = K_{PR}$$

$$I = K_{IR} = \frac{K_{PR}}{T_n} = 50$$

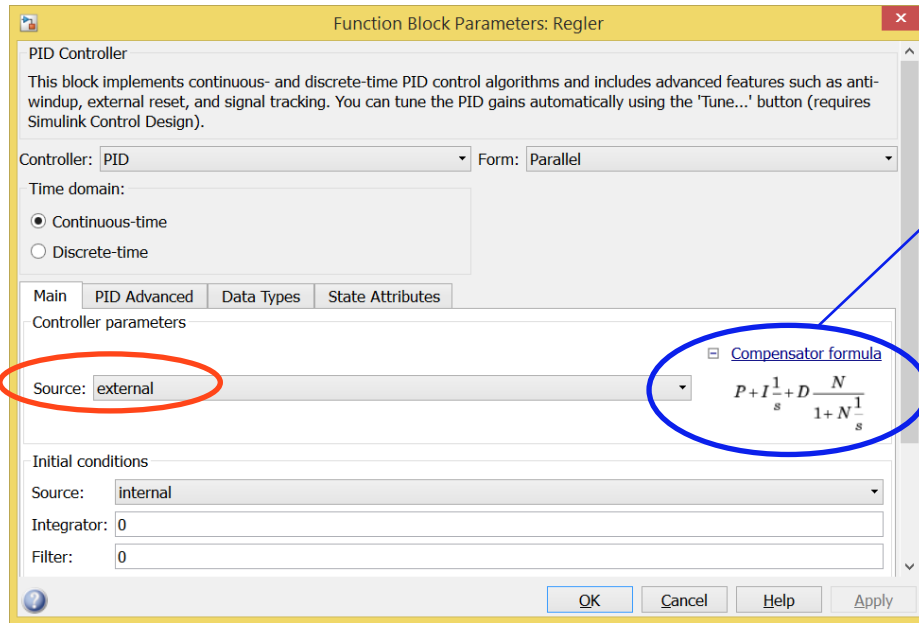
$$D = K_{DR} = K_{PR} T_v = 1$$

Das Simulink-Modell und die Sprungantwort nach dem Einheitssprung sind unten gezeigt.



4 Multiplikative Form des idealen PID-Reglers

Nun wird die Umrechnung von Kennwerten mit dem Simulink programmiert. Dafür soll der PID-Baustein von „internal“-Source auf „external“-Source umgestellt werden.



D-Anteil wird mit eigene Verzögerung realisierbar gemacht:

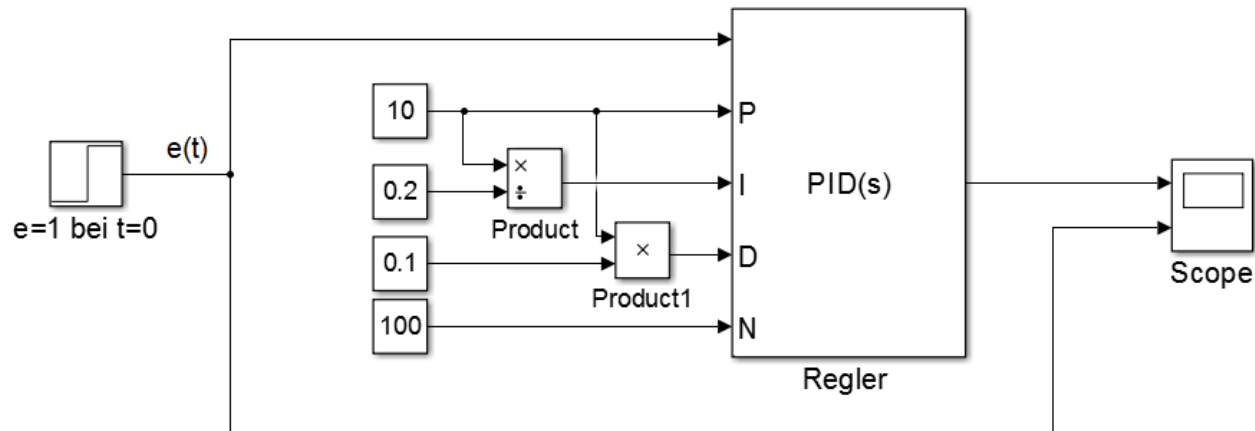
$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{IR}}{s} + \overbrace{K_{DR} \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}}_{D\text{-Anteil}}$$

$$K_{DR} \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} = K_{DR} \frac{sN}{s + N} = K_{DR} \frac{sN}{N \left(s \frac{1}{N} + 1 \right)}$$

Unter Bezeichnung $\frac{1}{N} = T_R$ ergibt sich

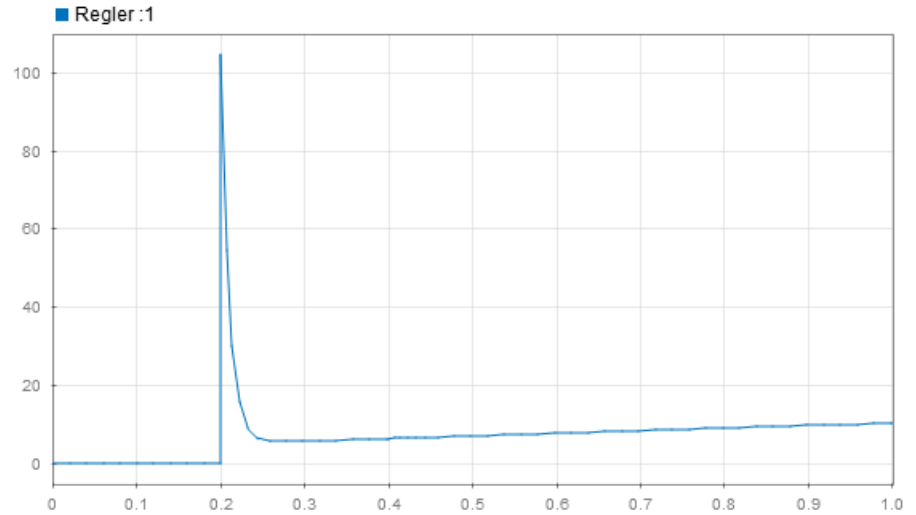
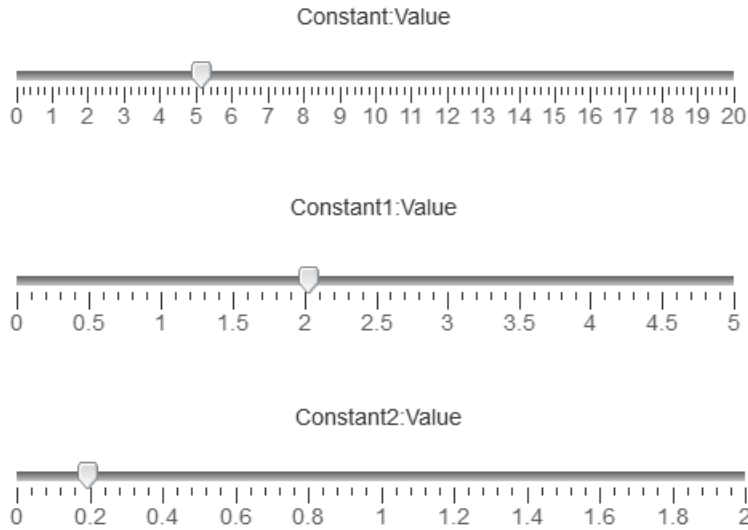
für PID-Baustein:

$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{IR}}{s} + \frac{sK_{DR}}{1 + sT_R}$$

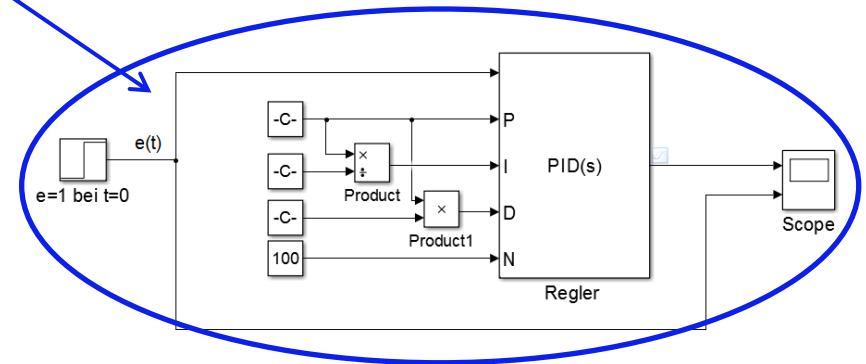


4 Multiplikative Form des idealen PID-Reglers

Unten ist die Eingabe von Kennwerten des Reglers mit *Slider*-Bausteinen gezeigt.



Subsystem



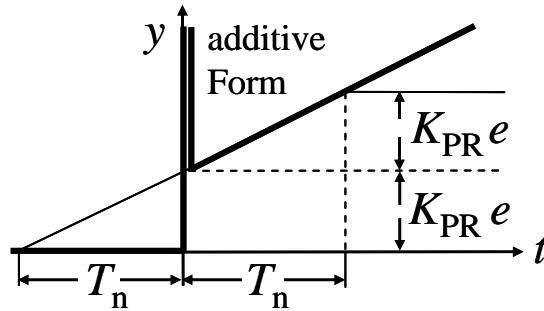
5 Additive Form des idealen PID-Reglers

Ein idealer PID-Regler in additiver Form

$$G_R(s) = K_{PR}^* \left(1 + \frac{1}{sT_n^*} + sT_v^* \right)$$

wie auch in multiplikativer Form ist praktisch nicht realisierbar.

Unten ist gezeigt, wie die Sprungantwort eines idealen PID-Reglers in additiver Form aussehen sollte.

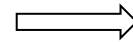


Diese Form ist für die Berechnungen nicht gut geeignet, aber für die Simulation, weil die dabei benutzten digitalen Regelalgorithmen überwiegend als Summe von P-, I- und D-Anteilen programmiert sind:

$$G_R(s) = \underbrace{K_{PR}^*}_{P\text{-Anteil}} + \underbrace{\frac{K_{PR}^*}{sT_n^*}}_{I\text{-Anteil}} + \underbrace{sK_{PR}^*T_v^*}_{D\text{-Anteil}}$$

$$K_{IR}^* = \frac{K_{PR}^*}{T_n^*}$$

$$K_{DR}^* = K_{PR}^* T_v^*$$

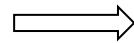


$$G_R(s) = K_{PR}^* + \frac{K_{IR}^*}{s} + sK_{DR}^*$$

6 Umrechnung von Kennwerten aus multiplikative in additive Form

Falls die Kennwerte des PID-Reglers K_{PR} , T_n und T_v bereits in multiplikativer Form bestimmt wurden, sollen diese Werte für die Simulation in die Kennwerte K_{PR}^* , T_n^* und T_v^* für additive Form umgerechnet werden. Ansonsten wird die Simulation verfälscht.

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n}$$



$$K_{PR}^* = K_{PR} \left(1 + \frac{T_v}{T_n} \right)$$

bzw.

$$K_{PR}^* = K_{PR} \frac{T_n^*}{T_n}$$

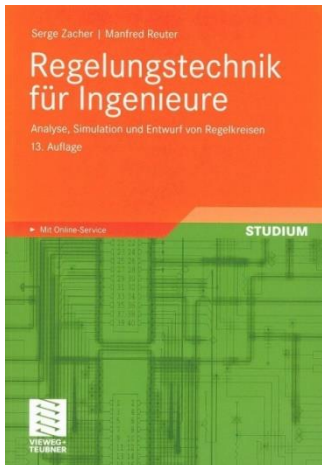
$$T_n^* = T_n + T_v$$

$$T_n^* = T_n + T_v$$

$$T_v^* = \frac{T_n T_v}{T_n + T_v}$$

$$T_v^* = T_v \frac{T_n}{T_n^*}$$

Die Herleitung zur Umrechnung findet man im Buch:



$$G_R(s) = K_{PR}^* \left(1 + \frac{1}{sT_n^*} + sT_v^* \right)$$

6 Umrechnung von Kennwerten aus multiplikative in additive Form

Beispiel: Ein idealer PID-Regler in multiplikativer Form mit folgenden Kennwerten

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n} \quad K_{PR} = 1,6 \quad T_n = 8 \quad T_v = 3$$

soll wie additiver Regler mit dem PID-Baustein implementiert werden. Dafür werden die Kennwerte zuerst in die additive Form umgerechnet:

$$K_{PR}^* = \left(1 + \frac{T_v}{T_n}\right) = 2,2$$

$$T_n^* = T_n + T_v = 11$$

$$T_v^* = \frac{T_n T_v}{T_n + T_v} = 2,18$$

Danach werden daraus die Parameter des PID-Bausteins des Simulink-Modells bestimmt.

$$P = K_{PR}^* = 2,2$$

$$I = K_{IR}^* = \frac{K_{PR}^*}{T_n^*} = 0,275$$

$$D = K_{DR}^* = K_{PR}^* T_v^* = 4,796$$

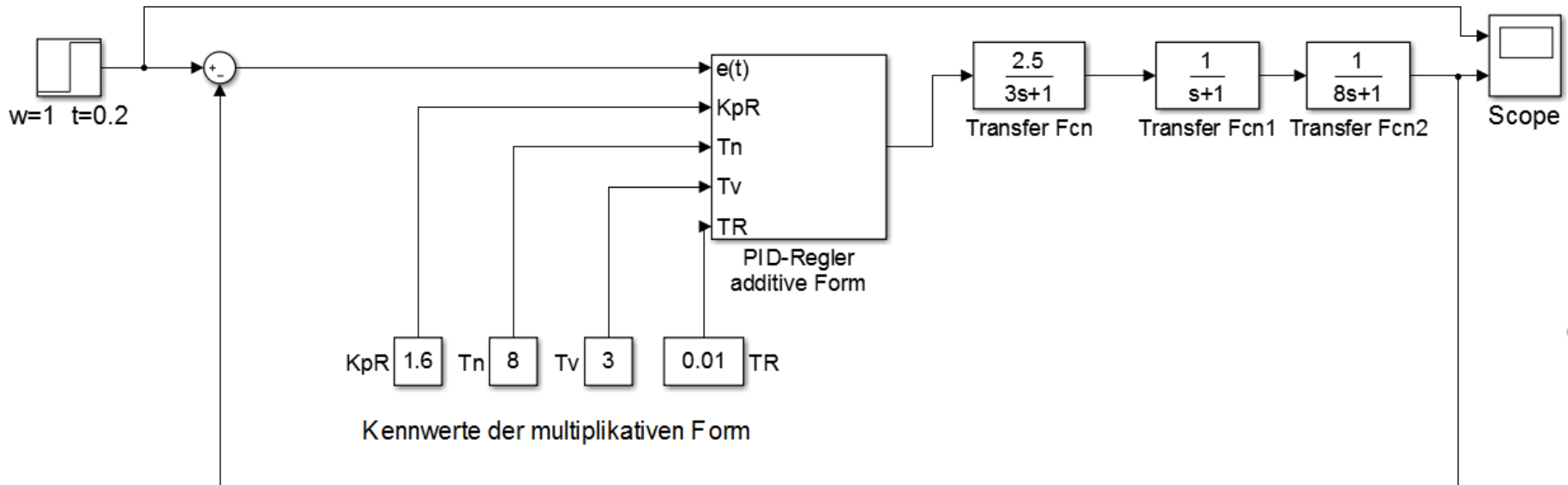
6 Umrechnung von Kennwerten aus multiplikative in additive Form

Das Simulationsmodell mit externer Eingabe von Kennwerten des PID-Reglers und mit der Umrechnung von multiplikativer in die additive Form für einen Regelkreis mit der Strecke

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)} \quad K_{PS} = 2,5 \quad T_1 = 3s \quad T_2 = 1s \quad T_3 = 8s$$

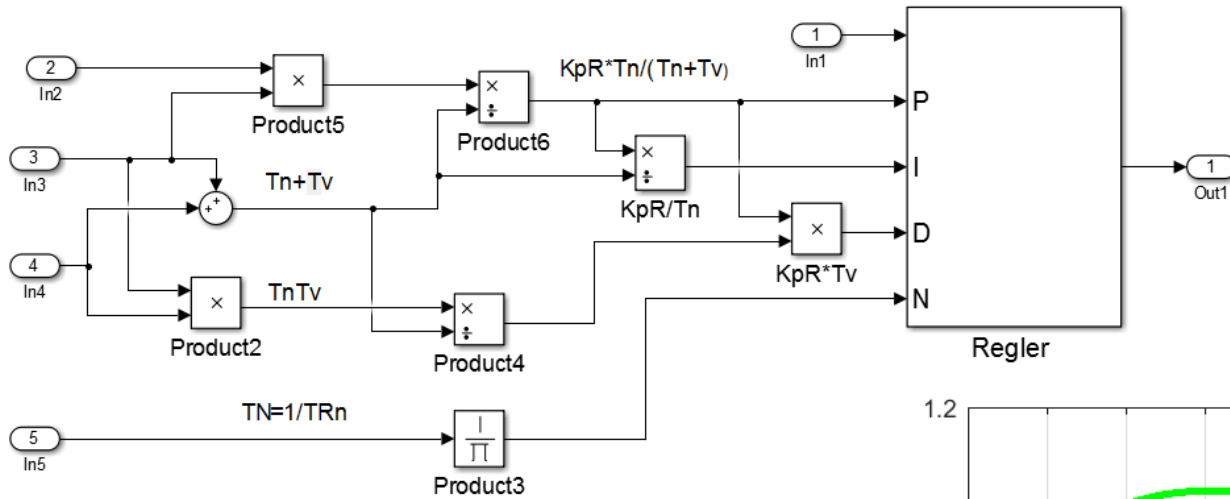
ist unten gezeigt. Für Parameter N des PID-Bausteins gilt: $N = \frac{1}{T_R}$

T_R ist die Realisierungszeitkonstante, die benötigt wird, um die Simulation des PID-Reglers praktisch realisierbar zu machen. Hier wird T_R minimal gehalten bzw. N wird maximal eingestellt, nämlich $N=100$, um den idealen PID-Regler zu simulieren.



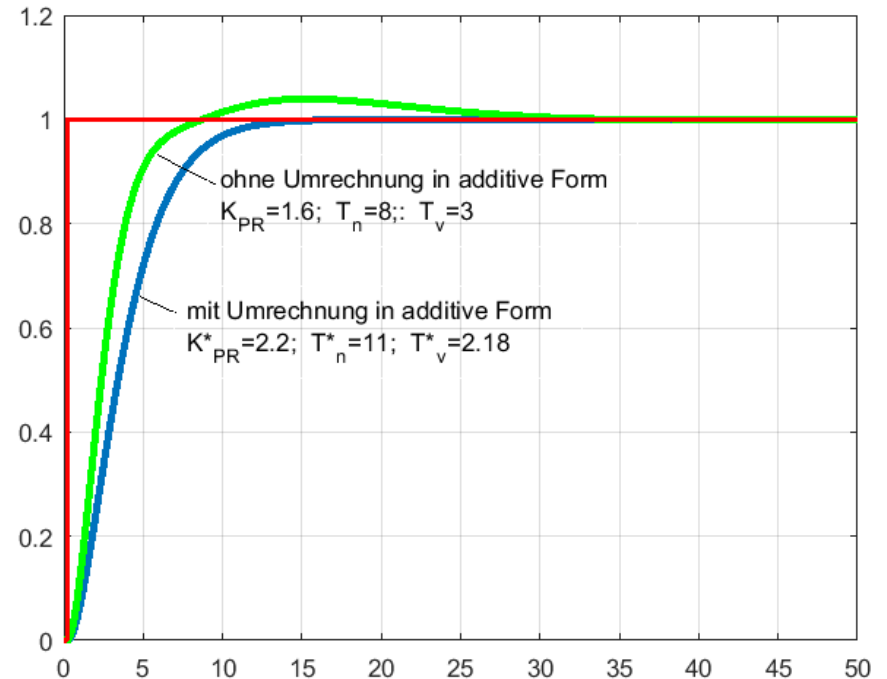
6 Umrechnung von Kennwerten aus multiplikative in additive Form

Die Umrechnung der Kennwerte des PID-Reglers von der multiplikativen und die additive Form sowie die nachfolgende Anpassung an P-, I- und D-Anteile des PID-Bausteins ist unten gezeigt.



Die Simulationsergebnisse mit und ohne Umrechnung des PID-Reglers sind unten gezeigt.

Die Verfälschung der Simulation (grüne Kurve) bei multiplikativen Parametern ist deutlich zu sehen.



7 Multiplikative Form des realen PID-Reglers

Um einen idealen PID-Regler realisierbar zu machen, soll die Differenzierung mit einer Verzögerung durchgeführt werden.

In multiplikativer Form wird dafür der ideale Regler mit einer Realisierungszeitkonstante T_R ergänzt:

$$G_R(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n(1 + sT_R)}$$

In vorherigen Beispielen wurde ein minimaler Wert für T_R eingestellt, nämlich $T_R = \frac{1}{N} = 0,01$, weil bislang die idealen Regler behandelt wurden.

Bei realen PID-Reglern ist die Größe von T_R von Eigenschaften der Hardware bedingt.

Die multiplikative Form von realen PID-Reglern war typisch für analoge Regler, die mit Operationsverstärkern realisiert wurden (Beispiel unten).

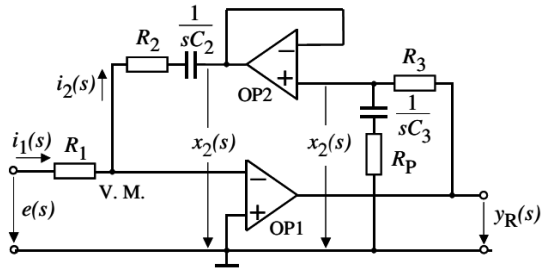
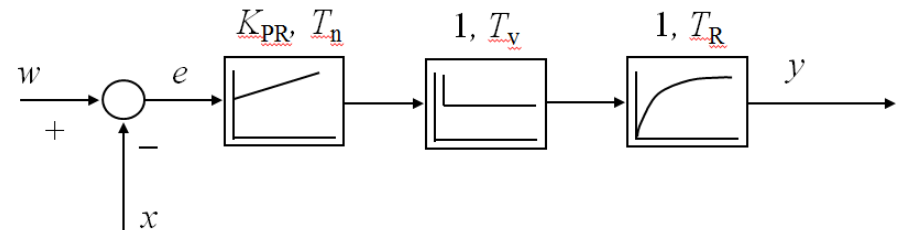


Bild 4.39
PID-T₁-Regeleinrichtung
mit aktiver Rückführung

Quelle: Zacher, S., Reuter, M.: *Regelungstechnik für Ingenieure*, 14. Auflage, Springer Vieweg, 2014

Mit der Übergang zu digitalen Reglern hat die multiplikative Form an Bedeutung für Praxis verloren, kann jedoch als serielle Schaltung eines PI-Gliedes und eines PD-T₁-Gliedes realisiert werden.

$$G_R(s) = \underbrace{\frac{K_{PR}(1 + sT_n)}{sT_n}}_{PI\text{-Anteil}} \cdot \underbrace{\frac{(1 + sT_v)}{(1 + sT_R)}}_{PD\text{-}T_1\text{-Anteil}}$$



7 Multiplikative Form des realen PID-Reglers

Beispiel: Ein realer PID-Regler in multiplikativer Form mit folgenden Kennwerten

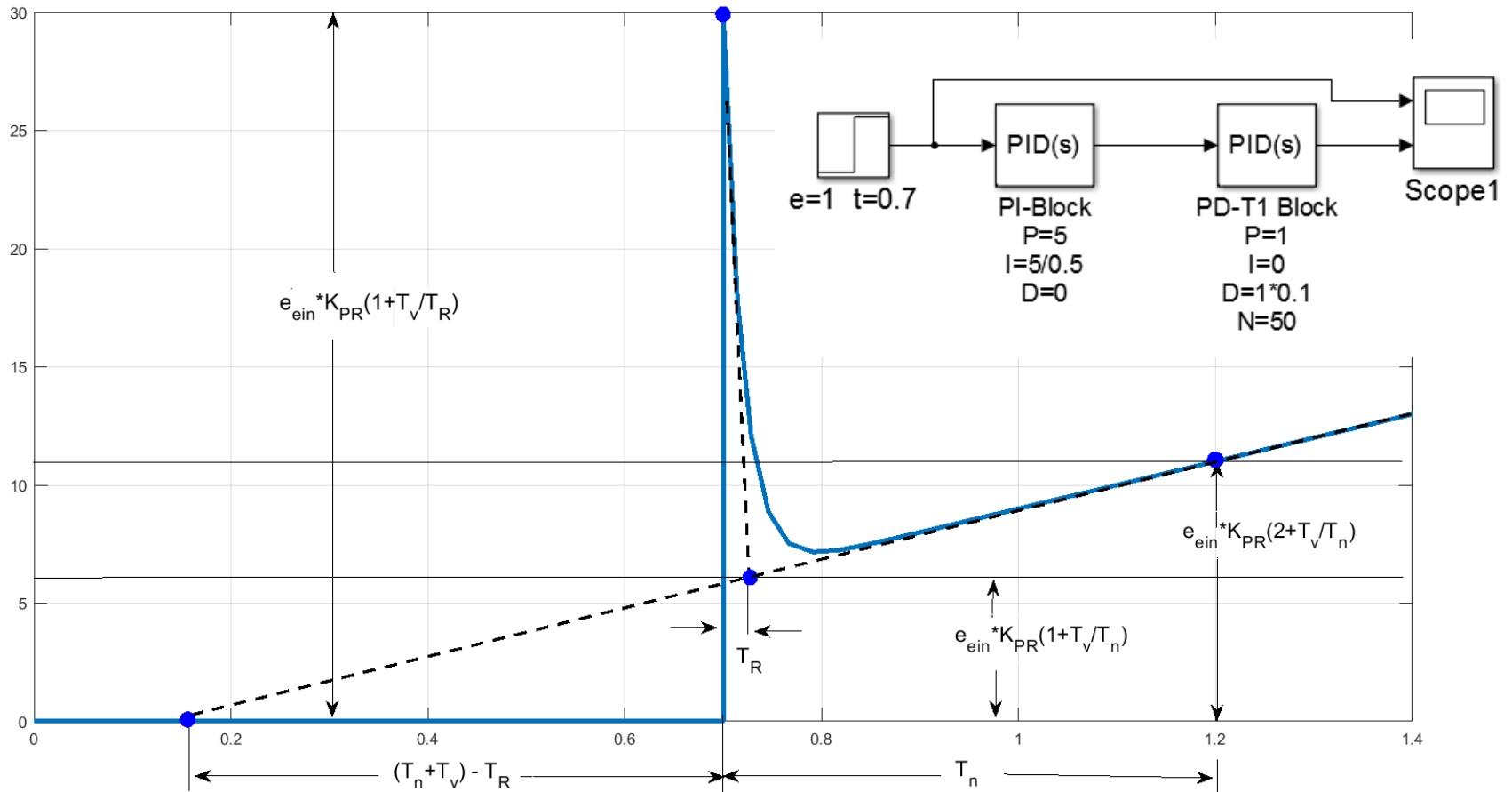
$$K_{PR} = 5$$

$$T_n = 0,5$$

$$T_v = 0,1$$

$$T_R = 0,02$$

wird als serielle Schaltung von PI- und PD-T1- Blöcken simuliert. Das Simulink-Modell und die Sprungantwort nach einem Einheitssprung $e(t)$ sind unten gezeigt.



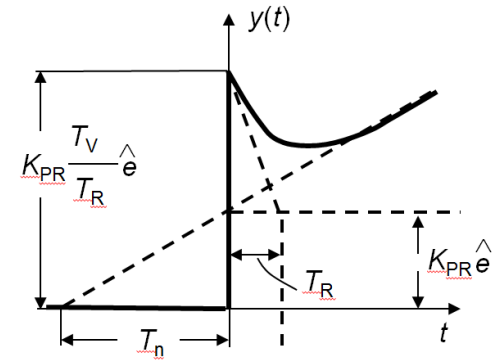
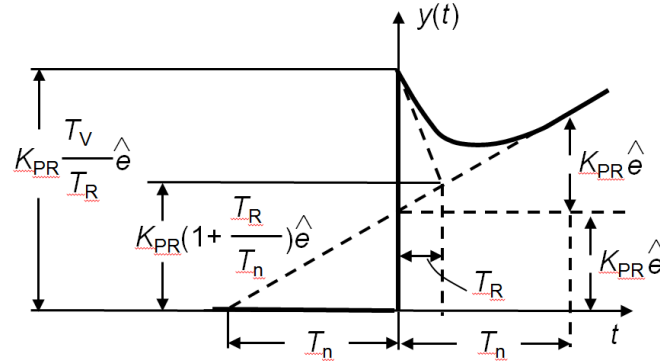
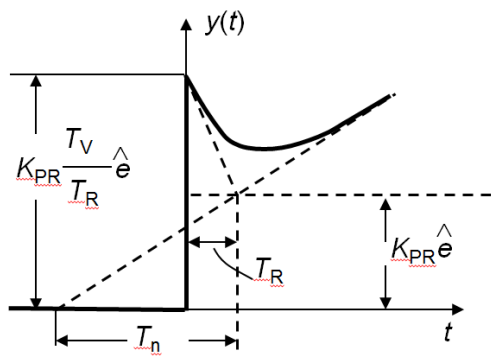
8 Additive Form des realen PID-Reglers

Ein realer PID-Regler in additiver Form $G_R(s) = K_{PR}^* \left(1 + \frac{1}{sT_n^*} + \frac{sT_v^*}{1 + sT_R^*} \right)$

Nachfolgend werden alle oben gegebene Kennwerte ohne * verwendet, um die Schreibweise zu vereinfachen, nämlich:

$$G_R(s) = K_{PR} \left(1 + \frac{1}{sT_n} + \frac{sT_v}{1 + sT_R} \right)$$

Die präzise Auswertung der Sprungantwort des additiven realen PID-Reglers ist unten in der Mitte gezeigt. Links und rechts davon sind die Sprungantworten nur angenähert skizziert. Nachfolgend wird an einem Beispiel gezeigt, dass der maximale Fehler von solchen Annäherungen kleiner als 10% von T_R ist.



Beispiel:

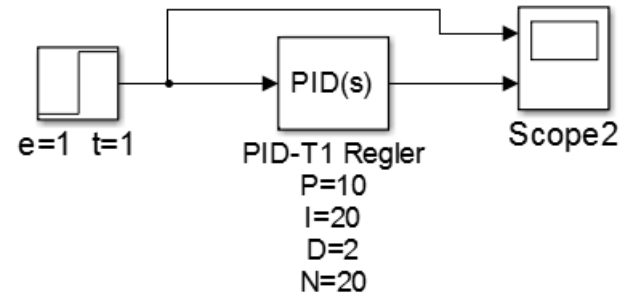
Ein realer PID-Regler in additive Form mit folgenden Kennwerten soll simuliert werden:

$$K_{PR} = 10 \quad T_n = 0,5 \quad T_v = 0,2 \quad T_R = 0,05$$

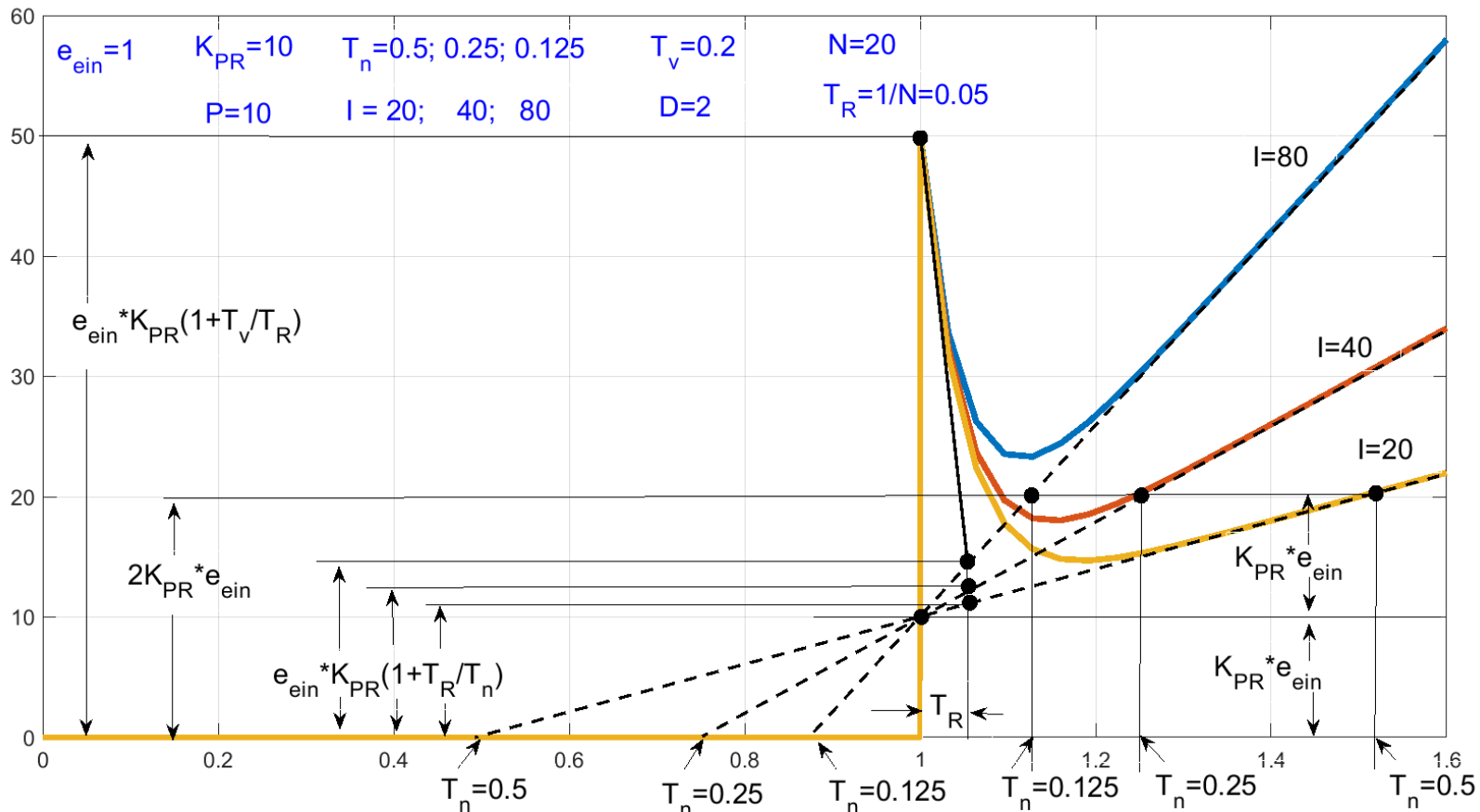
Merken wir, dass die additiven Kennwerte mit keinem * gekennzeichnet sind, wie oben erwähnt.

8 Additive Form des realen PID-Reglers

Als additiver PID-Regler wird Simulink-Baustein PID(s) mit interner Eingabe von Kennwerten benutzt.

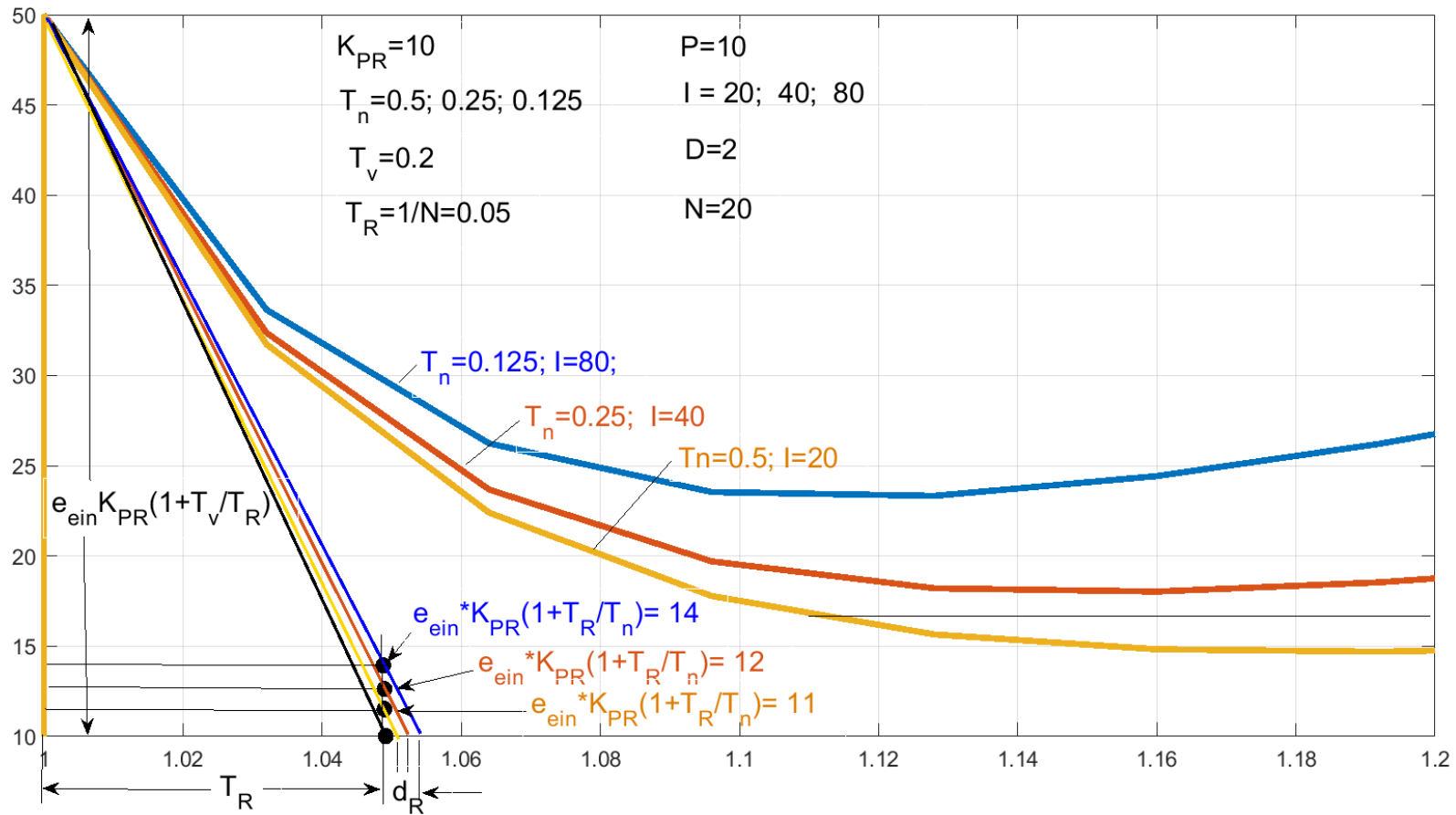


Die Sprungantworten für drei verschiedene Werte von Nachstellzeit T_n sind unten gezeigt und genau ausgewertet.



8 Additive Form des realen PID-Reglers

Die Auswertung von Sprungantworten des gezoomten Bildes (unten) zeigt, dass der maximale Fehler d_R von oben erwähnten Annäherungen auch bei einer vierfachen Änderung der Nachstellzeit T_n nicht mehr als ca. 0,005 ist bzw. ca. 10 % von T_R beträgt. Da bei Industrie-Regelstrecken üblicherweise $T_v \gg T_R$ gilt, haben die oben genannte Annäherungen kaum Bedeutung.

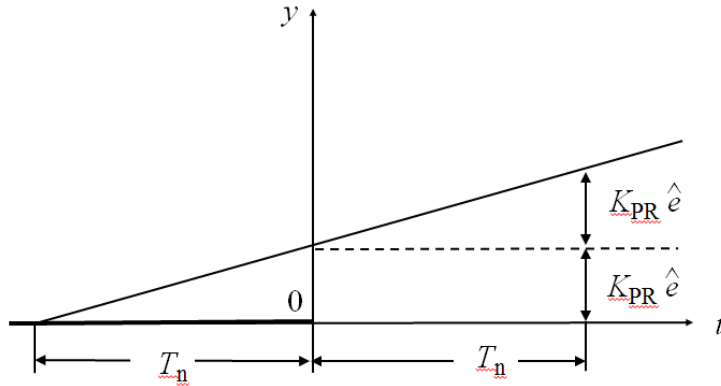


8 Additive Form des realen PID-Reglers

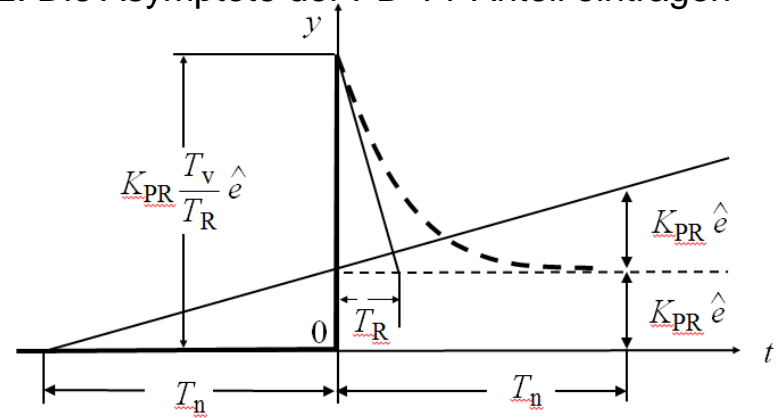
Es wird folgende Vorgehensweise beim Skizzieren von realen PID-Reglern in additive Form empfohlen:

$$G_R(s) = K_{PR} \left(1 + \frac{1}{sT_n} + \frac{sT_v}{1 + sT_R} \right)$$

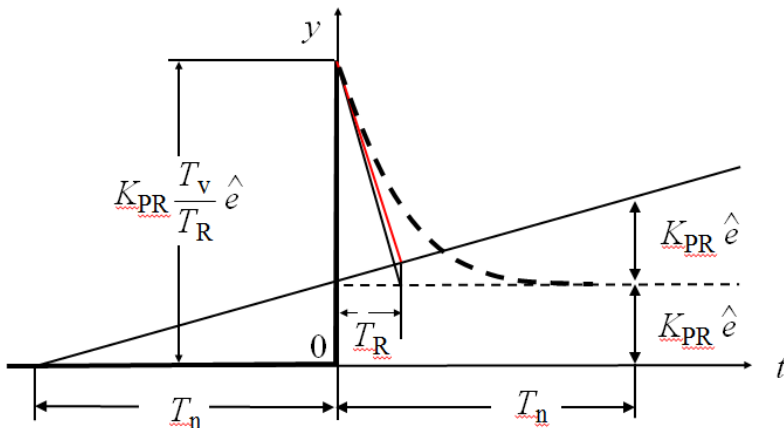
1. Die Sprungantwort der PI-Anteil eintragen



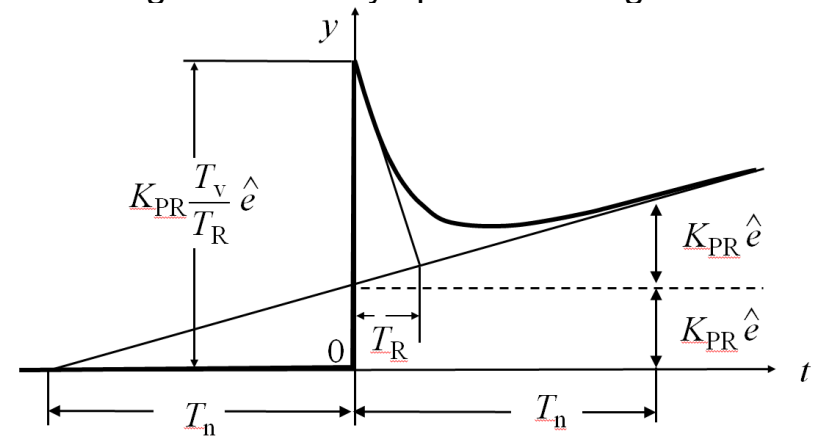
2. Die Asymptote der PD-T1-Anteil eintragen



3. Die Asymptote der PD-T1 korrigieren bzw. T_R auf die PI-Anteil projizieren



4. Die Sprungantwort des Reglers tangential zu Asymptoten eintragen



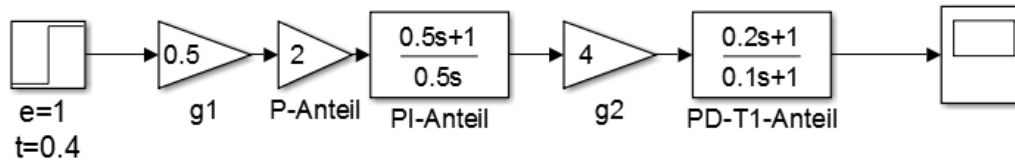
9 PID-Regler mit Gewichtskoeffizienten für PI- und PD-Anteile

Vergleichen wir nun die multiplikative und additive Formen eines realen PID-Reglers mit Gewichtskoeffizienten an einem Beispiel. Der PI-Anteil und der PD-T1-Anteil werden seriell und parallel geschaltet :

$$G_{PI}(s) = \frac{g_1 K_{PR} (1 + sT_n)}{sT_n} \quad G_{PD}(s) = g_2 \frac{1 + sT_v}{1 + sT_R}$$

Multiplikative Form (seriell)

$$G_R(s) = G_{PI}(s)G_{PD}(s) = \frac{g_1 g_2 K_{PR} (1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n (1 + sT_R)}$$



$$K_{PR} = 2$$

$$T_n = 0,5$$

$$T_v = 0,2$$

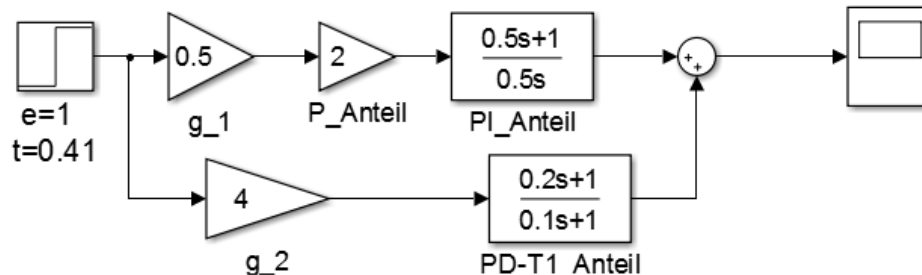
$$T_R = 0,1$$

$$g_1 = 0,5$$

$$g_2 = 4$$

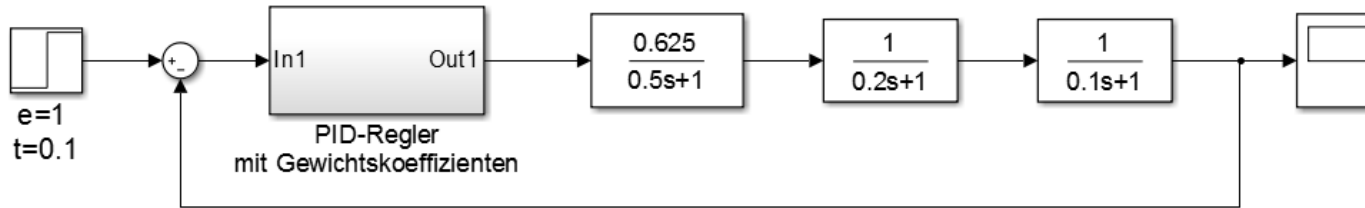
Additive Form (parallel)

$$G_R(s) = G_{PI}(s) + G_{PD}(s) = g_1 K_{PR} + g_1 \frac{K_{PR}}{sT_n} + g_2 \frac{1 + sT_v}{1 + sT_R}$$

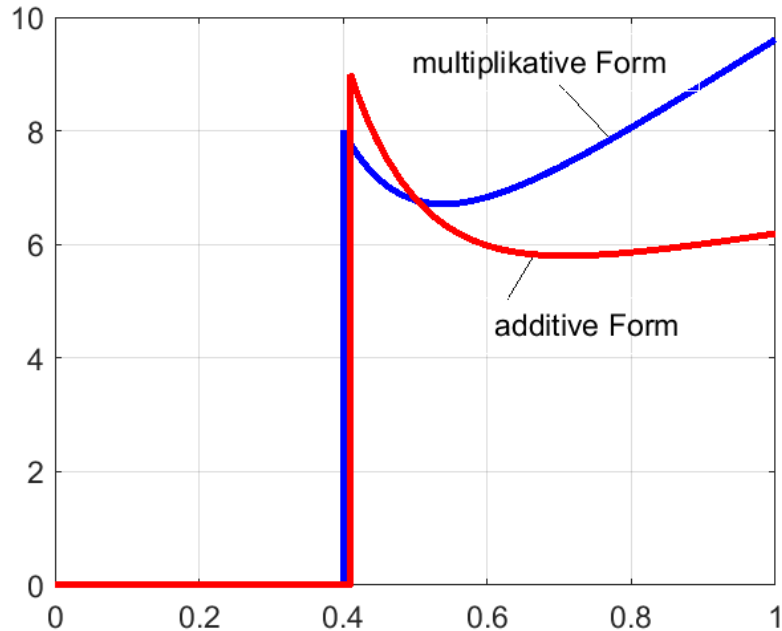


9 PID-Regler mit Gewichtskoeffizienten für PI- und PD-Anteile

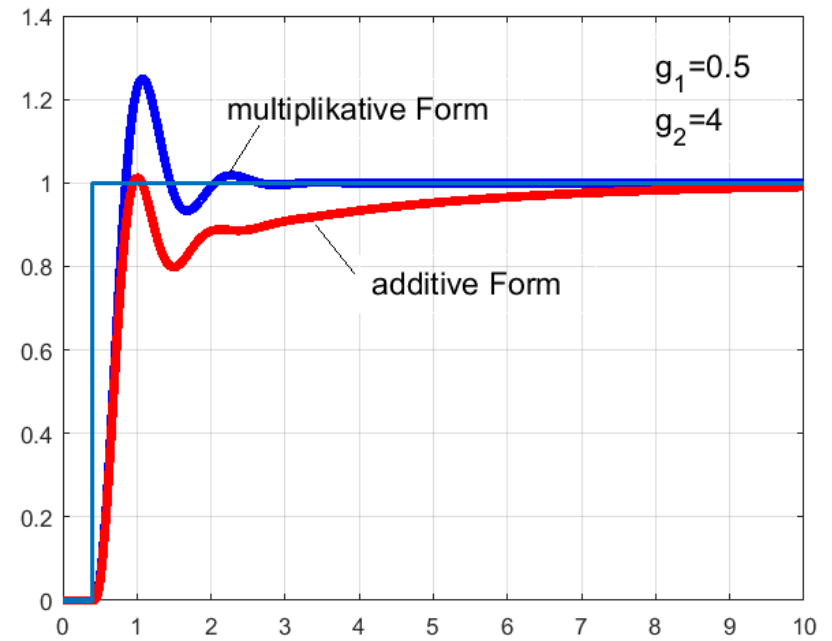
Der Regelkreis und die Sprungantworten $y(t)$ des Reglers mit $g_1=0,5$ und $g_2=4$ nach dem Einheitssprung $e(t)$ der Regeldifferenz sowie die Sprungantworten $x(t)$ der Regelgröße nach dem Einheitssprung der Führungsgröße $w(t)$ sind unten am Beispiel eines Regelkreises gezeigt.



Sprungantworten $y(t)$ des Reglers

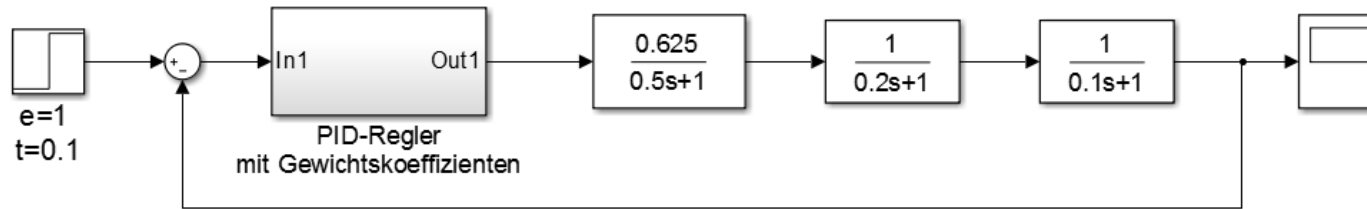


Sprungantworten $x(t)$ des Regelkreises

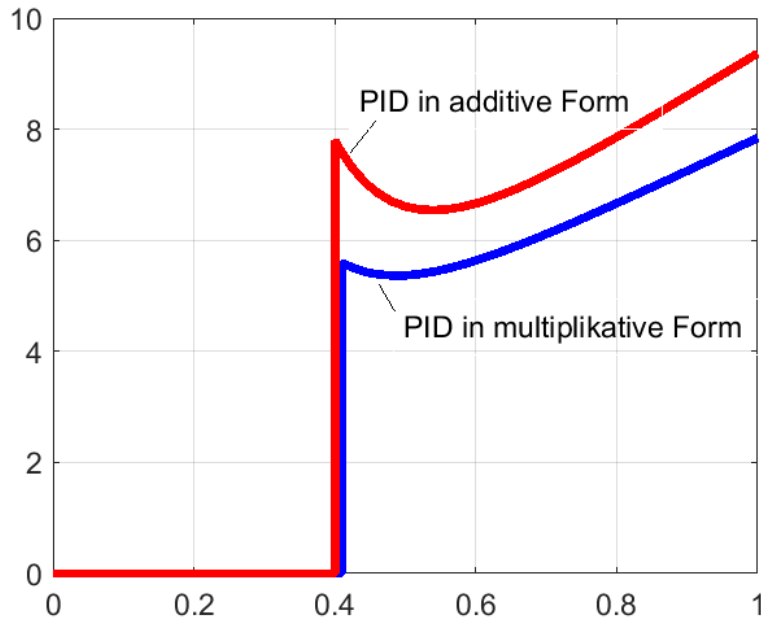


9 PID-Regler mit Gewichtskoeffizienten für PI- und PD-Anteile

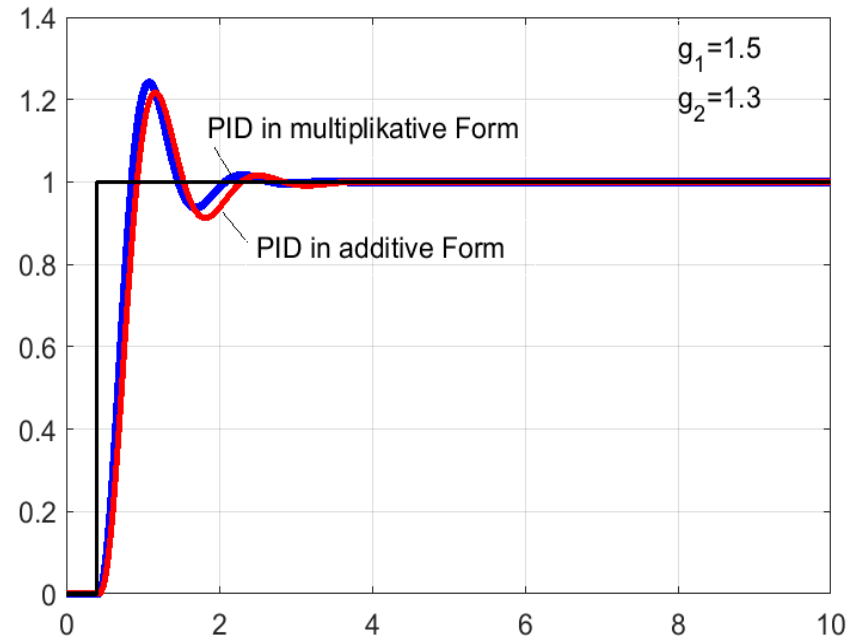
Mit Gewichtskoeffizienten kann man gezielt die Wirkung von einzelnen Anteilen des Reglers einstellen, indem der PID-Regler selbst unverändert bleibt, wie unten am Beispiel eines Regelkreises mit $g_1=1,5$ und $g_2=1,3$ gezeigt ist.



Sprungantworten $y(t)$ des Reglers

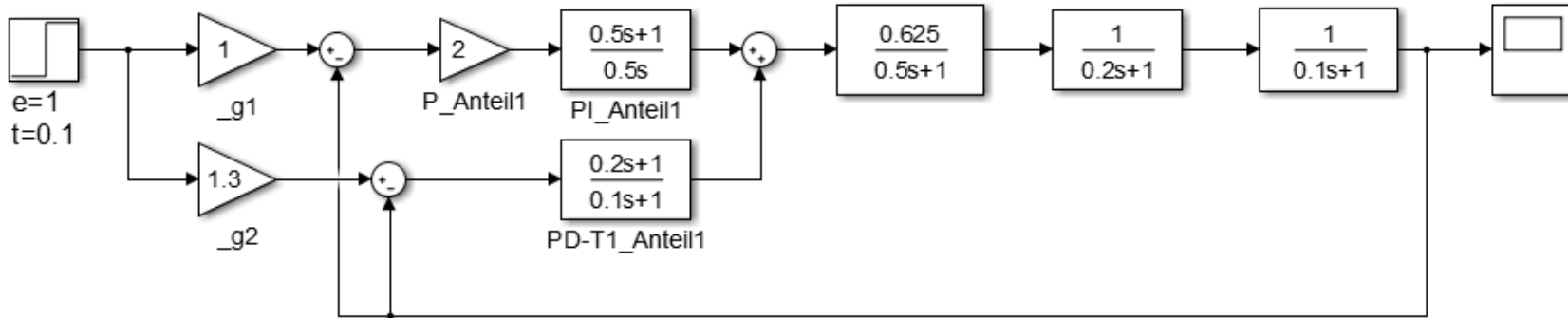


Sprungantworten $x(t)$ des Regelkreises



10 PID-Regler mit gewichteten Regeldifferenzen

Eine andere Option des realen PID-Reglers in der additiven Form ist unten gezeigt.



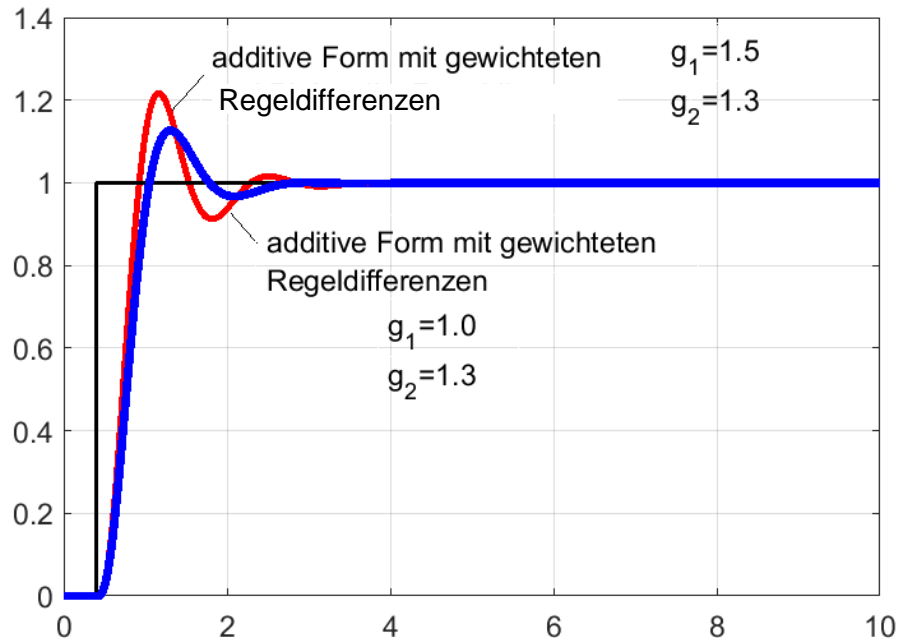
Die Regeldifferenz wird für PI-Anteil und PD-T1-Anteil gespaltet und mit Gewichtskoeffizienten gebildet.

Der Gewichtskoeffizient für PI-Anteil wird auf $g_1=1$ gesetzt, um die Regelgröße ohne bleibende Regeldifferenz ausregeln. Mit Hilfe von g_2 wird die Überschwingung gezielt eingestellt.

Im betrachteten Beispiel (siehe Bild rechts) wird die Regelung durch die Wahl von $g_2=1,3$ verbessert, indem der PID-Regler selbst unverändert bleibt.

Die Überschwingung der Regelgröße ist kleiner als im vorherigen Fall der Regelung mit gewichteten PI und PD-Anteilen, dabei wird die Ausregelzeit kleiner.

Sprungantworten $x(t)$ des Regelkreises



11 Stellgrößenbeschränkung

In diesem Abschnitt wird die Stellgrößenbeschränkung y_{\max} von realen Kreisen berücksichtigt. Angenommen, die Stellgrößenbeschränkung wie folgt gegeben ist:

$$|y_{\max} < 10|$$

Beispiel: Die unten gegebenen Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{K_{PS}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)} \quad K_{PS} = 2,5 \quad T_1 = 3s \quad T_2 = 1s \quad T_3 = 8s$$

soll nach dem Betragsoptimum geregelt werden. Zuerst bestimmen wir die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises mit dem multiplikativen PID-Regler:

$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{K_{PR}(1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n} \frac{K_{PS}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$$

Nach der Kompensation

$$T_n = T_{\text{größte}} = 8s \quad T_v = T_{\text{zweitgrößte}} = 3s$$

wird für Grundtyp „A“

$$G_0(s) = \frac{K_{PR}K_{PS}}{sT_n(1 + sT_2)}$$

der optimale Proportionalbeiwert des Reglers berechnet: $K_{PR} = \frac{T_n}{2K_{PS}T_1} = \frac{8}{2 \cdot 2,5 \cdot 1} = 1,6$

Die Realisierungszeitkonstante T_R setzen wir als 10% der Vorhaltezeit T_v ein, d.h. $T_R = 0,1T_v = 0,3s$

11 Stellgrößenbeschränkung

Da die Realisierung bzw. die Simulation des Regelkreises mit dem additiven PID-Regler erfolgen wird, sollen die multiplikativen Kennwerte in die additiven umgerechnet werden:

$$K_{PR}^* = \left(1 + \frac{T_v}{T_n} \right) = 2,2$$

$$T_n^* = T_n + T_v = 11$$

$$T_v^* = \frac{T_n T_v}{T_n + T_v} = 2,18$$

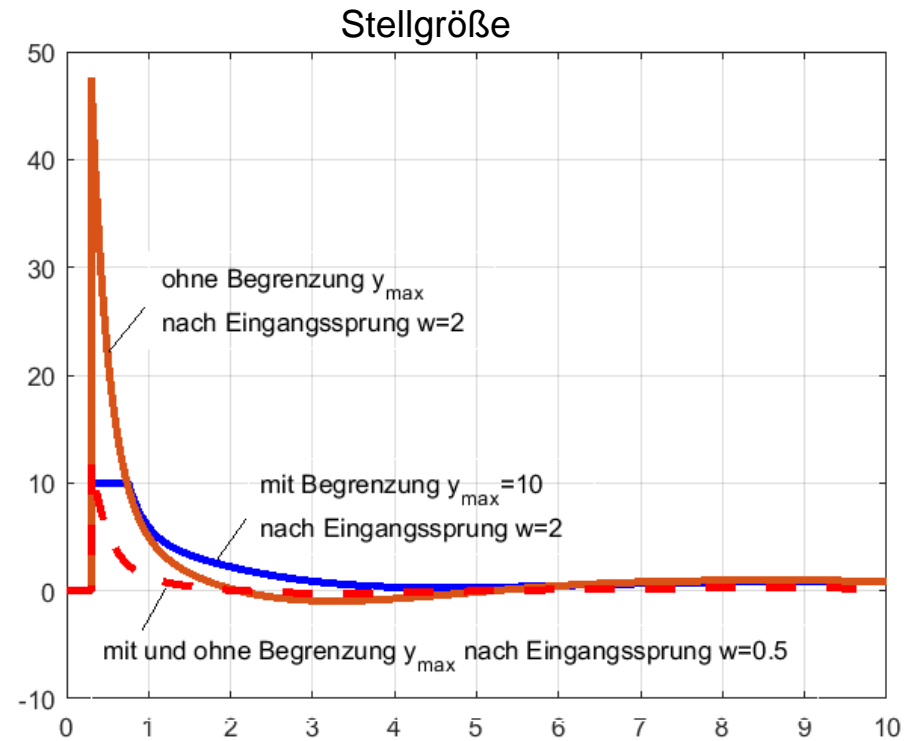
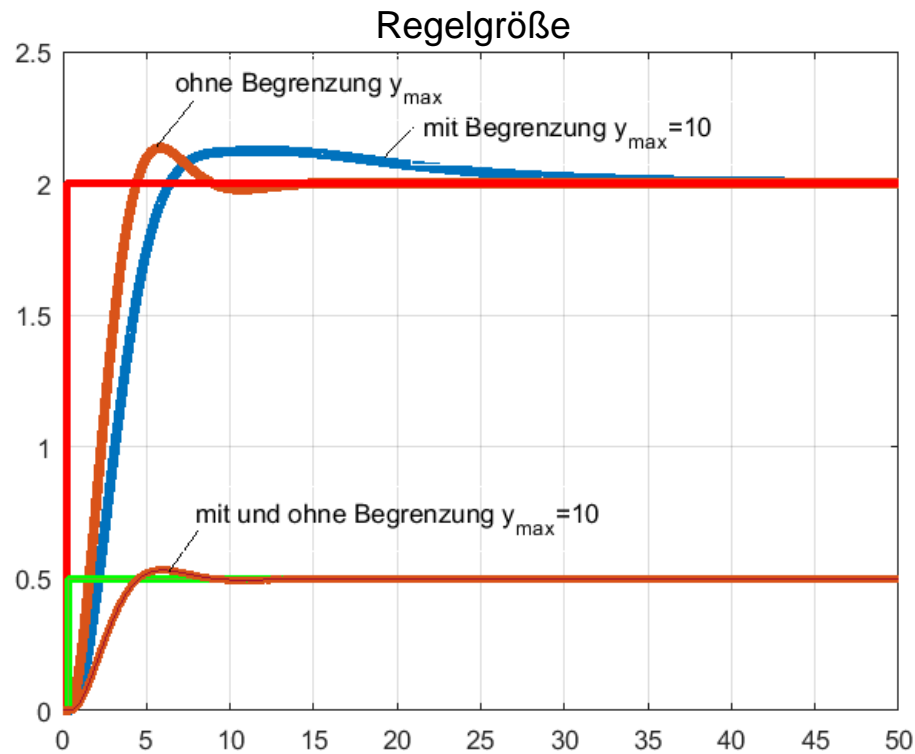
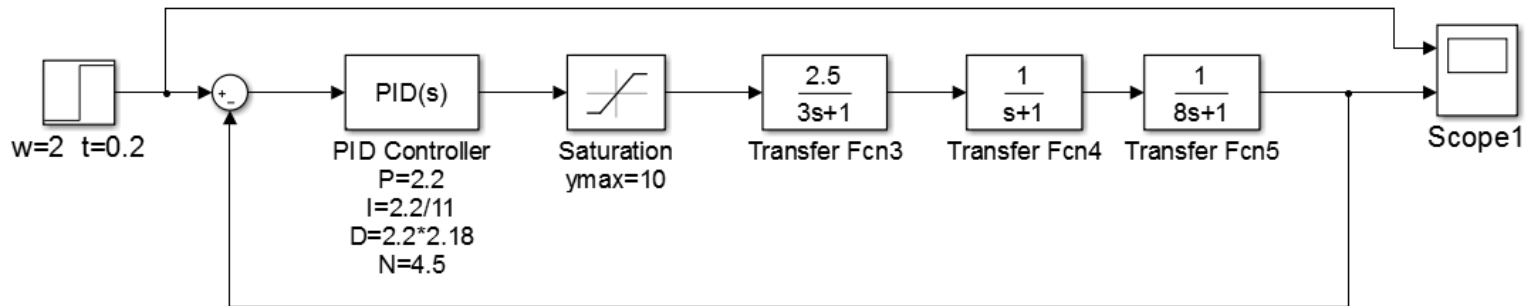
$$T_R^* = 0,1 T_v^* = 0,22$$

Danach prüfen wir, bei welchen Werten von Eingangssprüngen der Führungsgröße \hat{w} die Stellgrößenbeschränkung $|y_{\max}| < 10$ überschritten wird.

Nachfolgend werden alle Kennwerte ohne * angegeben, um die Schreibweise zu vereinfachen.

$$K_{PR} \frac{T_v}{T_R} \hat{w} < |y_{\max}| \quad \Longrightarrow \quad 2,2 \cdot \frac{2,18}{0,22} \cdot \hat{w} < |10| \quad \Longrightarrow \quad \hat{w} < |0,5|$$

11 Stellgrößenbeschränkung



Wegen Stellgrößenbeschränkung wird die Ausregelzeit in diesem Beispiel dreifach vergrößert.

12 Zusammenfassung

Es wurden folgende vier Regler Typen vorgestellt und behandelt:

- **ideale PID-Regler**

- multiplikative Form
(serielle Form)

$$G_R(s) = \frac{K_{PR} (1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n}$$

- additive Form
(parallele Form)

$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{PR}}{sT_n} + sK_{PR}T_v$$

- **reale PID-Regler bzw. PID-T1-Regler**

- multiplikative Form
(serielle Form)

$$G_R(s) = \frac{K_{PR} (1 + sT_n)(1 + sT_v)}{sT_n (1 + sT_R)}$$

- additive Form
(parallele Form)

$$G_R(s) = K_{PR} + \frac{K_{PR}}{sT_n} + \frac{sK_{PR}T_v}{1 + sT_R}$$

- mit gewichteten PI- und PD-Anteilen

- mit gewichteten Regeldifferenzen

Zu jedem Typ wurden die Sprungantworten präsentiert, simuliert und ausgewertet.

Auch wurden die Formeln zur Umrechnung aus der multiplikativer Form in die additive Form gegeben.

Abschließend wurde gezeigt, welche Wirkung hat die Stellgrößenbeschränkung auf die Regelgüteparameter.