ZUM GEDÄCHTNISS

AN

JULIUS PLÜCKER.

VON

ALFRED CLEBSCH.

Gelesen in der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften den 2. December 1871.

GÖTTINGEN,
IN DER DIETERICHSCHEN BUCHHANDLUNG.
1872.

Julius Plücker.

Wenn man im wissenschaftlichen wie im politischen Leben der Völker Epochen verschiedenartiger Thätigkeit unterscheidet, so darf für die Entwicklung der deutschen Mathematik das Jahr 1826 als besonders abgrenzend und Epoche machend bezeichnet werden. Ueberblicken wir die Jahrzehnte, welche diesem Jahre vorangehen, so finden wir in Deutschland Gauss, in wissenschaftlichem Verkehr meist mit Astronomen, eigentlich mathematischen Verkehrs entbehrend; wir finden Pfaff, dessen schöne Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen ihm ein dauerndes Andenken sichern. Aber gegenüber der zahlreichen Theilnahme mannigfacher Kräfte, welche die Mathematik in Frankreich fand, sehen wir in Deutschland nur die Schule der Combinatoriker, deren Ziele von unsern gegenwärtigen weit abliegen.

Wie diese Verhältnisse sich vom Jahre 1826 an plötzlich ändern, wie von da ab man eine wirkliche Entwicklung der Mathematik in Deutschland in stets sich erweiternden Kreisen verfolgen kann, gehört zu den bemerkenswerthesten Erscheinungen, welche die Geschichte der Wissenschaften zeigt. Und nicht allein nach einer einzigen Richtung entstand urplötzlich ein neues Leben. Einerseits entwickelte Jacobi neue und fundamentale Gesichtspuncte für die analytischen Functionen. Die wetteifernde Thätigkeit von Jacobi und von Abel, der durch das zu gleicher Zeit neu gegründete Crelle'sche Journal zu den deutschen Mathematikern in engste Beziehung trat, führte bald zu Perspectiven von unendlicher Ausdehnung, an deren Ausfüllung noch lange Reihen von Geschlechtern zu arbeiten haben werden. Um dieselbe Zeit kündeten Dirichlets erste Arbeiten über Aufgaben der Zahlentheorie jene scharfsinnige Strenge der Methoden an, welche für die Functionentheorie in anderm Sinne fundamental werden sollten. Zugleich aber erstanden in Möbius, Steiner und Plücker drei Geometer von grösster Bedeutung und innerster Originalität, welche, auf verschiedenen Wegen fortschreitend, sich in wesentlichen Gesichtspunkten vereinigten, und welchen man grossentheils die gegenwärtige Gestalt unserer geometrischen Anschauungen verdankt.

Als ein bedeutendes und für die weitere Entwicklung folgenreiches Moment darf wohl hervorgehoben werden, dass hiermit sogleich zwei Richtungen gegeben waren, deren Gegensatz, mehr oder weniger ausgeprägt, alle Epochen mathematischer Forschung begleitet, und welche man als die abstracte und die anschauungsmässige Richtung bezeichnen darf. Beide zusammen umfassen erst in Verein und Ergänzung das Ganze mathematischer Forschung, und es vermag keine von beiden auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigensten Wesens die Begleitung und den Einfluss der andern zu entbehren.

Es wird im Folgenden meine Aufgabe sein, die Thätigkeit des letztgenannten Geometers, welcher der königlichen Gesellschaft seit 1864 als Correspondent angehörte, so weit es hier möglich ist, darzulegen, und im Vergleich mit den Leistungen Mitstrebender zu erläutern wie zu begrenzen. Hierbei wird es von selbst nothwendig werden, die Geschichte der Geometrie in den letzten 50 Jahren nach einigen Richtungen hin zu verfolgen; ein Umstand, der ebensowohl das erhöhte Interesse als die Schwierigkeiten kennzeichnet, welche den nachfolgenden Versuch begleiten. Doch scheint es um so wünschenswerther, diese Verhältnisse im Sinne einer correcten historischen Auffassung darzulegen, als leider noch immer nicht überall das Bestreben erloschen scheint, Prioritäten im Sinne und der Denkungsweise vergangener Zeiten zu reclamiren und zu bestreiten. Für denjenigen, welcher die Geschichte der Wissenschaft ruhig betrachtet, giebt es nicht leicht etwas Unerquicklicheres und Zweckloseres. Können wir doch täglich sehen, wie die Keime wissenschaftlicher Entdeckungen zu gewissen Zeiten überall liegen, und an den verschiedensten Orten gleichzeitig aufgehen. Dasselbe Resultat der Forschung ergiebt sich den verschiedensten Forschern zur nämlichen Zeit, sobald es im Sinne der Wissenschaft liegt; und wenn es sich darum handelt, genau festzustellen, wer eine Entdeckung zuerst ausgesprochen, wer sie später wiederholt hat, so ist das oft eine willkürliche Bevorzugung rein zufälliger Momente — von den sonst wohl geläufigen Beschuldigungen des Plagiats ganz zu schweigen. Die Geschichte der Wissenschaft hat vielmehr die Aufgabe, den Gedanken nachzuspüren, welche gemeinschaftlich in Generationen sich entwickeln, und die allgemeinen Processe darzulegen, für welche die Entdeckungen des Einzelnen mehr die Symptome als die treibenden Ursachen darstellen. Bei einer solchen Auffassung wird man weniger oft Gelegenheit haben, davon zu sprechen, dass eine Entdeckung ihrer Zeit vorausgeeilt sei, oder dass eine einzelne Persönlichkeit einer Zeit ausschliesslich das Gepräge ihres Geistes aufgedrückt habe; aber dafür nimmt das Ganze der Wissenschaft einen organischen Character an. Im Einzelnen freilich bleibt immerhin zu untersuchen, in wie weit nahezu gleichzeitige Erscheinungen ursächlich auf einander gewirkt haben; nur darf man die Zeitfolge mit der ursächlichen Einwirkung nicht schlechthin verwechseln.

Julius Plücker wurde am 16. Juni 1801 zu Elberfeld geboren. Er erhielt seine Vorbildung auf dem Gymnasium zu Düsseldorf, besuchte dann die Universitäten Bonn, Heidelberg, Berlin, und hielt sich zum Schluss seiner Studien 1823—24 in Paris auf. Nach Deutschland zurückgekehrt, habilitirte er sich 1826 als Privatdocent für Mathematik an der Universität Bonn, und begann hier sofort jene bewunderungswürdige Thätigkeit, welche für die Entwicklung der gesammten Geometrie so fruchtbar geworden ist. Bald wurde ihm eine ausserordentliche Professur in Bonn (1828) zu Theil. Er verliess dieselbe, um in Berlin am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu wirken (1833) — nur auf kurze Zeit, denn schon 1834 erfolgte seine Berufung als ordentlicher Professor nach Halle. Von Halle kehrte er 1836 in gleicher Eigenschaft nach Bonn zurück, und hier begann sich eine Wandlung zu vollziehen, durch welche

Plücker eine sehr eigenthümliche Stellung in der Wissenschaft einnimmt. Einem an der Universität entstandenen Bedürfnisse Folge leistend, übernahm er neben seiner mathematischen Professur physikalische Vorlesungen, und es wurde ihm, zunächst provisorisch sodann definitiv, auch die Professur der Physik übertragen. Noch bis 1840 fuhr Plücker fort, unermüdlich geometrisch zu arbeiten. Nach einer bei einem so rastlosen Geiste auffallenden Pause erschien erst wieder 1846 ein Zeichen seiner Thätigkeit, mit welchem zunächst seine Beschäftigung mit der Geometrie abschloss. Von da an gehörte er durchaus der Physik an, und arbeitete in derselben mit ähnlicher Kraft und Frische, wie früher in der Geometrie. Erst in den letzten Jahren seines Lebens wandte er sich wieder derjenigen Wissenschaft zu, die den Bestrebungen seiner jüngern Jahre so mannigfache Fortschritte verdankte. In der Ausführung eines Werkes begriffen, welches der geometrischen Anschauung principiell ein neues und ausgedehntes Gebiet eröffnete, starb er am 22. Mai 1868.

Ehe ich zur genaueren Besprechung von Plückers geometrischen Leistungen übergehe, mag es mir vergönnt sein, auch seine physikalische Thätigkeit mit wenigen Worten zu berühren*). Ein Blick auf diese scheinbar heterogene Seite seines Wirkens führt auch manche Klärung in der Auffassung seiner geometrischen Richtung herbei, und bietet Gelegenheit zu interessanten Vergleichen.

Es war vorzugsweise in England, wo Plückers physikalische Thätigkeit Anerkennung fand**). In der That erkennt man leicht, dass die Art seiner Forschung derjenigen vorzugsweise nahe stand, welche Faraday und die sich ihm anschliessenden englischen Physiker übten, und man darf wohl nicht mit Unrecht Faraday, dem Plücker in der Zeit seiner physikalischen Thätigkeit durch mannigfache Beziehungen ver-

---

*) Eine genauere Darlegung von Plückers physikalischen Arbeiten, welche ich Herrn Professor Hittorf verdanke, folgt in einer Note am Schluss, worauf hier gleich verwiesen werden mag.

**) Wie überhaupt gerade in England Plückers Leistungen hochgeschätzt wurden, beweist die im Jahre 1867 erfolgte Verleihung der Copley-Medaille.

bunden war, auch als sein Vorbild betrachten. Wie die Untersuchungen Faradays sind auch die Plückers wesentlich qualitativer Natur. Nicht sowohl die genauere numerische Bestimmung einzelner Vorgänge, als die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen überhaupt war es, welche ihn interessirte. Mit rastlosem Eifer und scharfem Blicke ausgerüstet, vermochte er manche neue Erscheinungsclassen zu erfassen, und wandte er sich mit Vorliebe noch völlig unerforschten Gebieten zu. So wird der Diamagnetismus, der Magnetismus der Krystalle, die Entladung der Electricität im luftverdünnten Raume, die Spectralanalyse der Gase mit seinem Namen verknüpft bleiben.

Es ist vielfach auffallend gewesen, dass Plücker, ursprünglich von der Mathematik ausgehend, in der Physik nicht gleichfalls die mathematische Seite angebaut hat. In der That hat er die Physik wesentlich von ihrer experimentellen Seite erfasst, und ist in keiner Weise das gewesen, was man einen mathematischen Physiker nennt. In einer Zeit, wo die Fortschritte, welche aus der Anwendung molekular-physikalischer Hypothesen in den verschiedensten Zweigen der mathematischen Physik hervorgegangen, noch in frischem Andenken standen, blieben ihm molekular-theoretische Ansichten überhaupt fremd. Der Analyse bediente er sich nur, um das Gestaltliche der physikalischen Verhältnisse rein hervorheben und einfach mit Bekanntem in Zusammenhang bringen zu können; eine Anwendung der Mathematik auf physikalische Gegenstände, welche, förderlich und interessant, wie sie ist, gänzlich fern liegt den Versuchen der mathematischen Speculation, physikalische Disciplinen von einfachen Hypothesen ausgehend durch reine Analyse aprioristisch zu begründen.

Wenn man tiefer in das Wesen von Plückers Thätigkeit eindringt, so ersieht man, dass das Besondere seines physikalischen Strebens mit den Eigenthümlichkeiten seines mathematischen Schaffens auf eine gemeinsame Quelle zurückführt. Plücker war eine wesentlich und eminent productive Natur. Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reichthum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen. Die ganze Art seiner Arbeiten in Physik und Mathematik war hierdurch zu einer bestimmten Weise gedrängt, welche umsomehr hervorgehoben werden mag, als sie nicht nur für Plücker, sondern für eine ganze grosse und wichtige Seite wissenschaftlicher Forschung characteristisch ist. Es kann die Forschung von bestimmten Problemen ausgehen, deren Wichtigkeit sie erkannt hat, deren Lösung mit allen Kräften mehr oder weniger direct angestrebt wird. Aber ebenso berechtigt ist die andere Art der Forschung, welche sich nur das Gebiet ihrer Thätigkeit wählt, in diesem aber freie Umschau hält, und, entgegengesetzt der ersten, nach Problemen späht, deren Lösung sich ermögliche. Ueber den relativen Werth dieser Forschungsmethoden werden verschiedene Individualitäten immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht ausgesetzt. Der andern schuldet man Dank für die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei denn im Einzelnen Vieles der erstern Methode zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag. Nach dem Obigen wird man leicht einsehen, dass es die zweite Weise der Forschung war, welche Plücker consequent und mit Bewusstsein übte, welcher er den Umfang und die Mannigfaltigkeit seiner Resultate verdankt.

Man kann nicht verkennen, dass diese Art seiner geistigen Anlage und Richtung zugleich die Grösse wie die Begrenzung auch seiner geometrischen Thätigkeit begründet. Keiner, selbst der ihm in vieler Beziehung verwandte Steiner, ist reicher an Anregungen, an neuen Gesichtspuncten, an bisher unbekannten Gegenständen und Hülfsmitteln der geometrischen Speculation. Die Fülle seiner neuen Anschauungen und Erfahrungen drängte ihn sofort zu ausführlichen Darlegungen, wovon sechs grössere geometrische Werke Zeugniss ablegen. Aber nicht immer vermochte er die sich ihm aufdrängende Fluth von Erscheinungen völlig zu beherrschen; und so machen häufig die kurzen und knappen Darlegungen, durch welche er in Journalen gelegentlich dem Publikum den Kern seiner Entdeckungen bekannt machte, einen organischeren und fertigeren Eindruck als jene grossen und ausführlichen Werke. So verführte ihn die Leichtigkeit seiner Production bisweilen zu Irrthümern, welche nur der ungeschehen wünschen kann, der nicht die ihnen mit den grössten Vorzügen gemeinsame Quelle erkennt; Irrthümer, welche ohnedies der Verlauf der Wissenschaft niemals verfehlt, bald zu berichtigen. Wer, wie ich selbst, Gelegenheit hatte, Plücker während reger geometrischer Production zu kennen und an der Entwicklung seiner Ideen Theil nehmen zu dürfen, erstaunte über den Reichthum und die Mannigfaltigkeit derselben. Man wird sich nicht wundern dürfen, wenn sie auch ihm bisweilen zu mächtig wurden, und die gleichsam durch Intuition schnell erworbenen Resultate in einigen einzelnen Fällen die Probe der ruhigen Untersuchung nicht bestanden.

In genauem Zusammenhange hiermit steht der Umstand, dass Plücker die gleichzeitige Literatur verhältnissmässig wenig berücksichtigte. So konnte es in einzelnen Fällen geschehen, dass ihm Untersuchungen Anderer, welche zu den seinigen in Beziehung standen, unbekannt blieben, und dass er zuweilen von neuem fand und als das seinige betrachtete, was Andere vor ihm bereits ausgesprochen hatten. Er durfte sich damit trösten, dass öfter das entgegengesetzte geschah, und andre Geometer sich Entdeckungen zuschrieben, welche Plücker längst vor ihnen gemacht.

Die Darstellung von Plückers geometrischer Thätigkeit bietet einen Vorzug, welcher bei Nekrologen nur selten auftritt. Der grösste Theil seines geometrischen Wirkens gehört bereits der Geschichte an, und hat reichlich Frucht getragen, an der man Stamm und Wurzel erkennen mag. Bereits ein Vierteljahrhundert ist verflossen, seitdem vor der entschiedenen Wendung zur Physik seine letzte Arbeit erschien. Nur die verhältnissmässig kurze Zeit, in welcher er der Geometrie sich abermals zuwandte, ist uns ganz nahe gerückt; und auch für diese Thätigkeit liegen die Keime in den Untersuchungen der frühern Periode.

Freilich bedingt der erwähnte Umstand einen zweiten, um dessen willen Plückers Arbeiten nicht mehr soviel gelesen werden, als sie nach

Inhalt und Methode es verdienen. Die analytische Gestalt, in welcher seine Untersuchungen auftreten, besitzt oft noch nicht jene der Natur der algebraischen Probleme angepasste elegante Form, an welche wir, insbesondere seit Hesse, gewöhnt sind. Plückers Rechnungen tragen zum Theil auffallend den Stempel des blossen Hülfsmittels für die Darlegung geometrischer Verhältnisse. Dass die algebraischen Zusammenhänge für sich ein inneres Interesse haben, und eine adäquate Darstellung erfordern, konnte erst einer Generation zum Bewusstsein gelangen, welche sich der, grossentheils von Plücker selbst, neu erworbenen Gebilde und Methoden gewohnheitsmässig bediente.

Aber es kann andrerseits nicht genug hervorgehoben werden, welche Verdienste Plücker sich dadurch erworben hat, dass er zuerst ein specifisch geometrisches Gebiet, und zwar eines, welches vollständig der synthetischen Richtung der Geometrie anzugehören schien, consequent in ein analytisches Gewand zu kleiden unternahm. Es wurde hierdurch sowohl der Grund für die klassischen Untersuchungen von Hesse gelegt, wie für die ganze Disciplin der neuern Algebra, und die weitverzweigten geometrisch-algebraischen Untersuchungen, welche damit in Zusammenhang stehen. Für die Zeit, in welcher Plücker mit seinen Arbeiten hervortrat, war es ausserdem ein wesentliches Moment, dass gewisse Begriffe, deren die synthetische Geometrie sich noch nicht vollständig hatte bemächtigen können, in analytischem Gewande zuerst völlig deutlich zu machen waren. Ich rechne dahin den Begriff der allgemeinen Curven und Oberflächen, welcher auf rein synthetischem Wege erst viel später durch Grassmanns tiefsinnige Arbeiten erschlossen wurde*) (1844, Ausdehnungslehre). Dahin rechne ich ferner das Imaginäre, welches in einer

*) Leider sind die schönen Arbeiten dieses höchst bedeutenden Geometers noch immer wenig gekannt; was wohl hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass in der Darstellung Grassmanns diese geometrischen Resultate als Corollare viel allgemeinerer und sehr abstracter Untersuchungen auftreten, die in ihrer ungewöhnlichen Form dem Leser nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereiten.

gewissen mysteriösen Weise in der Geometrie sich unaufhörlich bemerken liess, und erst in der Identität der synthetischen Grundoperationen mit gewissen einfachen algebraischen Verfahrungsweisen auf eine einfache und nothwendige Art Erklärung seines Auftretens und seiner Stellung fand *). Auch dieses wurde erst viel später, durch v. Staudt, der rein synthetischen Methode in strenger Weise zugänglich gemacht.

Indem sich die analytische Geometrie auf solche Weise mit einem wirklichen und aus der Natur ihres Wesens entspringenden Inhalte erfüllte, hat sie sich schliesslich als Fundament auch anderer, scheinbar ganz heterogener Gebiete enthüllt, und damit eine immer grössere Bedeutung für die Gesammtheit der mathematischen Disciplinen erhalten. Es war einer neueren Entwicklung die Einsicht vorbehalten, dass schliesslich die algebraischen Functionen die einzigen völlig begriffenen sind, alle wichtigen übrigens betrachteten Functionen dem Boden der Algebra entspriessen, und dass selbst die Abelschen Functionen nur Ausflüsse der Betrachtungen sind, auf welche die Untersuchung der algebraischen Curve geführt hat. —

Wie im Eingange die mathematischen Zustände in Deutschland in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts geschildert wurden, war der Anschluss geometrischer Forschung an die Untersuchungen französischer Mathematiker mit Nothwendigkeit gegeben. Wir müssen in unserer Darstellung hier der Verständlichkeit wegen etwas weiter zurückgreifen. Bei der Wiederbelebung geometrischer Speculation im 16. Jahrhundert waren es zunächst die Alten, an welche man wieder anknüpfte; und es bedurfte einiger Zeit, ehe man im Stande war, nach geometrischer Seite über sie hinauszugehen. Von Einzelheiten abgesehen, waren es vor Allen Desargues und Pascal, deren geometrische Arbeiten eine neue und selbstständige Wendung anzeigten; eine Wendung, welche zu der heutigen Form der synthetischen Geometrie zu führen bestimmt war. Die Grundlagen dieser Untersuchungen waren zwar den spätern Epochen der antiken Geometrie nicht durchaus fremd, hatten aber doch im Alter-

*) Man vergleiche die Auseinandersetzung, welche Plücker in der Vorrede des zweiten Bandes der »Analytisch-geometrischen Entwickelungen« gegeben hat.

thume eine entschiedene und principielle selbstständige Entwicklung nicht finden können. Das Ende des 17. und der grössere Theil des 18. Jahrhunderts hatte andre Aufgaben zu lösen, welche diese Zeit vollauf beschäftigten. Denn es war zunächst das rein Technische der Cartesischen analytischen Geometrie zu entwickeln; sodann aber trat neben der Differential- und Integralrechnung die Entwicklung der Mechanik in den Vordergrund, welcher in jener Zeit grossentheils die Rolle der anschauungsmässigen Mathematik zufiel, die in andern Epochen durch geometrische Speculation vertreten wurde. Aber am Ende des vorigen Jahrhunderts finden wir Carnot unmittelbar an jene ältern Geometer anknüpfend. Bei ihm tritt das Bestreben, Lagenverhältnisse allein zu betrachten und alles Metrische auszuscheiden, noch nicht so rein hervor, wie später bei Poncelet und Andern, ein Bestreben, welches endlich zur Auflösung des Metrischen in projectivische Begriffe führen sollte; doch erkennt man leicht den halb unbewussten Zug, welcher demjenigen entgegentreibt, was wir heute unter projectivischer Geometrie verstehen; ein Name, der besser als die nur auf die Form der Darstellung bezüglichen Namen der synthetischen und der analytischen Geometrie das Wesen der Sache und den Gesichtspunct bezeichnet, unter welchem thatsächlich diese beiden früher gesonderten Disciplinen sich vereinigt haben.

Auf die weitere Entwicklung der Geometrie hat niemand mehr Einfluss gehabt, als Monge. Er verstand es, geometrisches Interesse überhaupt in weitern Kreisen zu wecken; seine Untersuchungen über die Anwendung der Geometrie auf Gegenstände der Analysis zeigte die Fruchtbarkeit dieser lange vernachlässigten Disciplin auch bezüglich scheinbar ganz heterogener Gebiete. Seine Schüler, ganz erfüllt von wahrhaft geometrischem Sinne, vermochten es, die neuen Gedanken in principieller Weise zu erfassen und umzugestalten. Während ein Theil derselben sich in Monge's Sinne der Anwendung der Analysis auf gewisse metrische Probleme zuwandte, verfolgten andere rein projectivische Betrachtungen. Aus diesen sollte sich jener Character des Organischen entwickeln, welcher die neuere Geometrie auszeichnet, und sie als so ganz verschieden von der Geometrie der Alten erscheinen lässt.

Es war Poncelet*), welcher zuerst eine projectivische Geometrie schuf, welche der jetzigen Gestalt der Geometrie sehr nahe kommt. Bei ihm treten die reinen Lagenverhältnisse als solche deutlich hervor; ein grosses und für die Gestaltung der Wissenschaft fundamentales Princip, das der Dualität, wurde von Poncelet und Gergonne, in Wetteifer und Streit, gegründet, beleuchtet und seinem wahren Ausdrucke entgegengeführt. Ueberhaupt finden sich bei Poncelet schon die meisten derjenigen Momente vor, welche später zu den principiellen Grundlagen der Geometrie gemacht wurden, nur nicht schon als Principien hervorgehoben; so der Begriff des Doppelverhältnisses, der Verwandtschaft. Selbst eine höhere Verwandtschaft, die quadratische, findet sich schon bei diesem ausgezeichneten Geometer angedeutet, wenn auch ohne Bewusstsein des allgemeinen gedanklichen Inhalts (Traité des propriétés projectives, erste Ausgabe, 1822, p. 198, n. 370).

Die Ideen, welche Plücker in seiner ersten grössern Schrift (Analytisch-geometrische Entwickelungen, 1. Theil, 1828, dem Datum der Vorrede nach im September 1827 beendet) entwickelt, knüpfen seiner eigenen Angabe nach an die eleganten Methoden an, vermöge deren Gergonne (Band VII seiner Annalen) die bekannten Berührungsaufgaben der Kreise behandelt hatte. Aus Gergonne's Methoden entsprang Plückers neues Hülfsmittel, welches er zunächst für die Behandlung linearer Gleichung als neues Princip einführte, die Methode der abgekürzten Bezeichnung. Er behandelte mit Hülfe derselben in dem erwähnten Bande die Theorie der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte.

Diese Methode, soweit sie in dem genannten ersten Plückerschen Werke entwickelt ist, wurde fast gleichzeitig von Bobillier gefunden und dargestellt **) (Gergonne Annales Bd. 18, 1827—28, p. 320), ein Um-

---

*) Traité des propriétés projectives des Figures 1822; sur la théorie des surfaces réciproques, Gergonne Annales VIII, 1817—18, Crelle Bd. IV, 1829; sur les centres moyennes harmoniques, Crelle Bd. III, 1828, etc.

**) Hiernach sind Angaben von Bertrand (Sur les travaux math. et phys. de M. Plücker, Journal des Savants. 1867) und Paul Serret (Vorrede zu seiner Géometrie de direction, 1869) zu berichtigen.

stand, durch welchen ihre Zeitgemässheit hinlänglich gekennzeichnet wird. Auch dieser talentvolle junge Geometer scheint die Absicht gehabt zu haben, die Methode weiter zu entwickeln, woran ein frühzeitiger Tod ihn verhinderte. Dagegen konnte Plücker an der allmäligen Ausdehnung und Erweiterung der Methode arbeiten, und dieselbe auch als Grundlage für die Behandlung mannigfacher höherer Probleme benutzen. Auf diese Weise entstand jenes eigenthümliche Verfahren, die Gleichung eines Gebildes aus abgekürzten Ausdrücken zusammenzusetzen und dann in dieser Form der Gleichung zu lesen, wovon Plücker unter anderm in der Theorie der Curven dritter Ordnung so schöne Anwendungen gegeben hat. Diese Methode, welche übrigens mit der weiterhin zu besprechenden Methode der Constantenabzählung aufs Genaueste zusammenhängt, ist jetzt längst Gemeingut aller Geometer geworden, und man hat alle Ursache sich ihres Urhebers mit Dank zu erinnern.

Um die Zeit, in welcher der erste Band der „Analytisch-geometrischen Entwickelungen“ erschien, wurde Plücker in den Streit von Gergonne und Poncelet über das Princip der Dualität verwickelt, was ihm Veranlassung zur Klärung dieser fundamentalen Verhältnisse und zur Entdeckung eines der wichtigsten Hülfsmittel der analytischen Geometrie wurde.

Die Theorie von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt führte Poncelet zu einer Methode, vermöge derer aus gewissen Classen von Sätzen in der Ebene immer andere, parallele, abgeleitet werden konnten, indem man nur in dem Ausdrucke der ersten Sätze gewisse ein für alle Male feststehende Vertauschungen vornahm. Es beruhte dies darauf, dass durch den Kegelschnitt selbst jedem Puncte eine Gerade und umgekehrt zugeordnet war. Hatte man nun einen Satz, welcher rein auf Lagenverhältnisse Bezügliches aussagte, und dessen Ausdruck sich daher in eine Form fassen liess, bei welchem nur vom Schneiden gerader Linien und vom Verbinden von Puncten die Rede war, so folgte von selbst ein zweiter, bei welchem dem erstern gegenüber nur immer Punct und Gerade, Schnittpunct und Verbindungslinie vertauscht waren.

In gleicher Weise erlaubte für den Raum die Theorie von Pol und Polare in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, aus Sätzen über die Lage andre abzuleiten, indem man Punct mit Ebene, die Verbindungslinie zweier Puncte mit der Schnittlinie zweier Ebenen, den Schnittpunct dreier Ebenen mit der Verbindungsebene dreier Puncte vertauschte.

Gergonne fasste den hiedurch festgelegten Gegensatz zwischen Punct und Gerade in der Ebene, so wie den entsprechenden zwischen Punct und Ebene im Raume mehr an und für sich ins Auge, und versuchte denselben unabhängig von der Einführung des Kegelschnittes hinzustellen, durch welchen bei Poncelet dieser Gegensatz vermittelt wurde. Aber hierbei verflüchtigte sich in etwas die feste Begründung des Princips, und es erschien fast als ein geheimnissvolles, freilich sehr umfassendes, philosophisches Axiom, was früher ein fruchtbarer Satz aus der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung gewesen war.

Es gelang Plücker, dieses Princip in einer Weise zu begründen, bei welcher nur nothwendige Elemente benutzt wurden, und eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Sache erreicht ward. Dies geschah, indem er von vorn herein Punct und Gerade als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie der Ebene, Punct und Ebene als gleichberechtigte Grundelemente der Geometrie des Raumes betrachtete; ein fundamentaler und weittragender Gedanke, bei welchem zum ersten Male von der gewohnheitsmässigen Vorstellung des Punctes als einzig denkbaren Grundelements räumlicher Gebilde Umgang genommen wurde. Plücker untersuchte nun, welche Bestimmungsstücke zweckmässiger Weise als Coordinaten der Geraden in der Ebene und der Ebene im Raume eingeführt werden mussten. Nachdem dieser Begriff festgestellt war, zeigte sich das Poncelet-Gergonne'sche Princip als selbstverständlich in dem einen Umstande enthalten, dass die Bedingung der vereinigten Lage von Punct und Gerade in der Ebene, sowie für Punct und Ebene im Raume eine für die Coordinaten der jedesmal auftretenden beiden Gebilde symmetrische Gestalt hat.

Von diesem Ausgangspuncte aus nahm nun die Geometrie völlig jenen dualen Character an, welchen Gergonne ihr mit Vorliebe vindicirt hatte. Gergonne's Begriff der Classe fand in der Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten, einer Fläche in Ebenencoordinaten seinen realen Ausdruck; die Darstellung des Punctes als einer Art von Curven, bez. Flächen, die Darstellung einer Raumcurve als einer Art von Flächen, welche den abwickelbaren dualistisch gegenüber trat, eröffnete einen Spielraum für neue Ideen und ist der geometrischen Gesammtanschauung höchst förderlich geworden.

Die besondere Art, in welcher Poncelet jeden Punkt einer Ebene einer gewissen Geraden mittelst eines Kegelschnitts zugeordnet hatte, konnte Plücker durch eine allgemeinere ersetzen, welche wir heute als reciproke lineare Verwandtschaft bezeichnen. Auch diese freilich erschien ihm, wie er im zweiten Bande der „Entwicklungen" erwähnt, als sehr besonderer Fall ein höchst allgemeinen Verwandtschaft mit sehr willkürlichem Wechsel des Raumelements. Es können nach dieser vermöge einer „aequatio directrix" den Puncten der Ebene Curven beliebiger Ordnung entsprechen (analytisch geometrische Entwicklungen Bd. 2 p. 251), eine Vorstellung, an welche erst in neuester Zeit wieder angeknüpft ist.

Ich habe diese Untersuchungen, welche den Zeitraum von 1827—30 umfassen (die Vorrede des zweiten Bandes der „Entwickelungen" ist vom Herbst 1830 datirt), dargestellt, wie sie bei Plücker entstanden sind, ohne darauf einzugehen, dass Möbius einen Theil derselben bereits in seinem „Barycentrischen Calcul" (1827) anticipirt hatte. In diesem niemals genug zu bewundernden Werke, in welchen eine grosse Anzahl von Fundamentalbegriffen der Geometrie zuerst ausgesprochen waren *), hatte Möbius die Collineation wie die reciproke lineare Verwandtschaft bereits vollständig behandelt; und indem ihn die letztere auf das Princip

---

*) Ich führe nur an: die principielle Einführung der Doppelverhältnisse, die homogenen Coordinaten, den Begriff der Verwandtschaften, die Betrachtung von Curven und Flächen, deren Coordinaten rational durch Parameter ausdrückbar sind etc.

der Dualität führt, beweist er dasselbe genau wie später Plücker durch die Symmetrie der Gleichung, welche die vereinigte Lage dualistisch entgegengesetzter Elemente angiebt (Baryc. Calcul p. 436). Es fehlt bei Möbius nur der Begriff der Linien- bez. Ebenencoordinaten, so dass die Beweisführung minder durchsichtig wird. Es scheint dass Möbius' Werk Plücker nicht so bald bekannt wurde oder wenigstens, dass es nicht unmittelbar auf ihn wirkte. Vielleicht darf man es der anspruchslosen Form zuschreiben, in welcher Möbius seine tiefen und neuen Gedanken veröffentlichte, dass ihr Inhalt und ihre Bedeutung gewöhnlich erst erfasst wurde, wenn andre Geometer der Reihe nach auf die von Möbius behandelten Momente durch die zwingende Nothwendigkeit des natürlichen Fortschritts der Wissenschaft geführt wurden. So sind einige der Möbius'schen Grundgedanken zugleich die von Steiners geometrischen Gestalten (1832), und drangen von dort aus, wo sie mehr organisch und systematisch fortentwickelt waren, in weitere Kreise hinüber; noch mehr wurden sie allgemein erfasst, als später Chasles in seinem Aperçu historique (1837) dieselben Begriffe nochmals aufstellte, auf die er, der deutschen Sprache unkundig, aufs neue selbstständig gekommen war. Anderes, wie insbesondere den Begriff der rationalen Curven und Flächen, seiner Bedeutung nach zu erkennen, blieb der neuesten Zeit vorbehalten.

Der einzige Fall, in welchem Plücker auf eine höhere Verwandtschaft einging, war derjenige den wir jetzt als quadratische bezeichnen, und deren bereits oben bei Erwähnung Poncelets gedacht wurde. Auch hier zeigt sich wieder, wie wichtigere Untersuchungen so häufig von Verschiedenen gleichzeitig begonnen werden. Auf die kurzen Bemerkungen Plückers (Crelle's Journal Bd. 5, 1829) bezieht sich der ihm persönlich befreundete Magnus, als er im 8. Bande von Crelle's Journal (1831) den Gegenstand, auf welchen auch er selbständig geführt war, ausführlich behandelte; wie denn eigentlich Magnus wohl als Begründer dieser analytischen Theorie bezeichnet werden darf. Zugleich beschäftigte sich Steiner mit dem Gegenstande, wie aus einer Reclamation dieses grossen Geometers hervorgeht, welcher sich reich genug hätte fühlen können, um dergleichen doch schliesslich müssige Kämpfe um Prioritäten entbehren zu dürfen (vgl. das Ende der Vorrede zu seinen „Systematischen Entwicklungen“, 1832). Unter diese Verwandtschaft fällt auch als besonderer Fall die von Möbius später ausführlich und aus andern Gesichtspuncten behandelte Kreisverwandtschaft, die Plücker im 11. Bande von Crelle's Journal (p. 219, 1834, datirt von 1831) erwähnt hatte. Bei Magnus finden sich übrigens bereits Ansätze zu einer allgemeineren Auffassung des eindeutigen Entsprechens zweier Ebenen, als deren Fortsetzung später die schönen Arbeiten Cremona's erscheinen, welche die Frage in allgemeinster Weise erledigten.

Zugleich mit den Liniencoordinaten führte Plücker ein anderes Hülfsmittel in die Geometrie ein, dessen Anwendung ebenso folgenreich wurde. Es waren dieses die sogenannten Dreiecks- (bez. Tetraeder-) Coordinaten (Crelle's Journal Bd. 5, 1829). Mit Hülfe dieser Coordinaten konnte Plücker unter Benutzung des Fundamentaltheorems der homogenen Functionen insbesondere den Gleichungen der Tangente und des Berührungspunctes ihre endgültige Form geben; mit ihrer Hülfe entwickelte er aufs einfachste die Eigenschaften der Polaren*). Auch hier kann man wieder Möbius als denjenigen bezeichnen, welcher den neuen Begriff zuerst, und zwar vor Plücker, gehabt hat. Denn Möbius' barycentrische Coordinaten (deren später Grassmann, Hamilton und Andere sich bedient haben) sind im Grunde keine andern; nur wird durch die aus der Mechanik geschöpfte Art der Entstehung der Begriff etwas verdeckt, und Anwendungen im Sinne der Theorie homogener Functionen treten bei Möbius wesentlich deswegen nicht ein, weil bei ihm nicht die Gleichung der Curve, sondern die Darstellung der Coordinaten durch einen Parameter die Grundvorstellung bildet.

*) Der Begriff der Polaren der verschiedenen Ordnungen findet sich wohl zuerst, mit den unendlich fernen Punct der Y-Axe als Pol, bei Cramer (1750), der sie Diameter nennt, wie Newton bezüglich der linearen Polare gethan hatte; die Bezeichnung der ganzen Reihe als erste, zweite etc. Polare stammt von Bobillier her (Gergonne Annalen Bd. 18 und 19).

Der Zusammenhang, welcher durch die Einführung dieser Coordinaten zwischen der Theorie der algebraischen Curven und der Theorie der homogenen Functionen hergestellt war, ist von Plücker nicht über die nächsten Anwendungen hin ausgebeutet worden. Erst Hesse that diejenigen Schritte, welche zu der jetzigen neuern Algebra hinüberleiteten, und die Theorie der algebraisch-geometrischen Gebilde als ein Capitel dieser Disciplin erscheinen liessen. Uebrigens bedient sich auch Hesse noch vielfach, wie Plücker meistens, nur des besondern Falles homogener Coordinaten, in welchem zwei der Veränderlichen die gewöhnlichen Coordinaten bedeuten, die dritte aber den Werth 1 darstellt.

Ein Gegenstand, welcher bereits in den „Analytisch-geometrischen Entwickelungen" wenn auch nur beiläufig behandelt wurde, ist das sogenannte Cramersche Paradoxon. In dem ausgezeichneten Werke Cramers (Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750), welches neben andern sehr bemerkenswerthen Untersuchungen zum Beispiele auch die erste eingehende Discussion höherer singulärer Puncte einer Curve enthält*), findet man auch eine genauere Besprechung eines auffallenden Umstandes, welcher bezüglich der Durchschnittspunkte zweier algebraischer Curven eintritt. Wenn von den Durchschnittspuncten solcher Curven eine gewisse Zahl bestimmt ist, so ist der Rest damit von selbst bestimmt, ohne dass umgekehrt die Curven selbst durch diese Puncte bestimmt wären. Diese Erscheinung war schon Euler aufgefallen, welcher sie 1748 in einem kleinen Aufsatze besprach, der indessen Cramer unbekannt geblieben zu sein scheint. Es dauerte einige Zeit, bis dieses sogenannte Paradoxon seiner wahren Bedeutung nach, nämlich als Quelle von Sätzen, erkannt wurde. Lamé gab in Bezug darauf den besondern Satz, dass durch die n^2 Schnittpuncte zweier Curven $n$ter Ordnung sich unendlich viele solcher Curven legen lassen, und begründete damit den Begriff des Curvenbüschels (Examen des différentes méthodes employées

---

*) So findet sich bei Cramer schon die später von Puiseux gegebene Regel, nach welcher man diejenigen Gliedergruppen der Curvengleichung bildet, welche in einem singulären Puncte von gleicher Ordnung werden können.

pour résondre les problèmes de géometrie, 1818). Allgemeiner schon ist der von Gergonne (Annales Bd. 17, 1827) gegebene Satz, nach welchem von den Schnittpuncten zweier Curven $(p+q)$ter Ordnung, sobald eine gewisse Zahl auf einer Curve $p$ter Ordnung liegt, der Rest auf einer Curve $q$ter Ordnung liegen muss. Weitere Sätze, die schliesslich den ganzen Inhalt des Paradoxons darlegten, wurden erst möglich, indem man die eine Curve, als beweglich, der andern, fest gegebenen, gegenüberstellte. Diesen Schritt that Plücker schon im ersten Bande der analytisch-geometrischen Entwicklungen (vgl. auch Gergonne's Annalen Band 19, 1828—29). Er gab an, wie viele Puncte man auf einer Curve annehmen müsse, so dass durch dieselben Curven der gleichen Ordnung gelegt werden können; die Zahl derselben ist unendlich gross, und alle schneiden die gegebene noch in lauter weitern gemeinschaftlichen festen Puncten. Auch führte Plücker bereits aus, wie dieser Satz sich auf Flächenbüschel und Flächenbündel überträgt (Gergonne's Annalen Bd. 19), Gebilde, deren Begriff durch Lamé's oben angeführte Schrift gegeben war. Eine Ausdehnung dieser Sätze auf Curven und Oberflächen ungleicher Ordnung gab Jacobi in Crelles Journal Bd. 15, 1836, merkwürdiger Weise ohne Cramer, Gergonne, Plücker zu nennen; Jacobi citirt nur Euler. Nach Plückers Angabe (Theorie der algebraischen Curven) gelangte mit Jacobi's Abhandlung zugleich in die Hände Crelle's der Aufsatz, in welchem Plücker dieselben Gegenstände behandelt, und welcher etwas später (Bd. 16) erschienen ist*). Ueber diese Abhandlung hinausgehend gab umfassendere Sätze über das Verhalten der Curven in der Ebene Plücker in der „Theorie der algebraischen Curven“ (1839), und endlich Cayley, Cambridge Math. Journal Bd. 3, 1843, womit die algebraische Seite dieser Untersuchung als abgeschlossen betrachtet werden konnte. Neue und überraschende Gesichtspuncte für die Frage ergaben sich in neuester Zeit, als es sich zeigte, dass diese Sätze über ebene Curven nur andre Ausdrucksformen des Abelschen Theorems seien.

---

*) Diese Abhandlung Plückers enthält eine Unrichtigkeit, welche von Jacobi vermieden ist, und welche Plücker in seiner »Geometrie des Raumes« (1846) berichtigte.

Unter den schönen besondern Anwendungen, welche Plücker aus den Sätzen über Schnittpunctsysteme gezogen hat, erwähne ich nur eine, welche später von mehreren Geometern wieder gemacht ist, ohne dass man Plückers Priorität gekannt hätte. Sie betrifft den merkwürdigen und höchst unmittelbaren Beweis des Pascalschen Satzes, bei welchem der Kegelschnitt mit der Pascalschen Linie als Curve dritter Ordnung betrachtet wird, während das einbeschriebene Sechseck die Stelle zweier solcher Curven vertritt (Analytisch-geometrische Entwickelungen Bd. 1 p. 267 Note).

Ich habe schon erwähnt, dass Cramer zuerst die singulären Puncte der algebraischen Curven genauer untersucht hat. Die Betrachtung der Singularitäten im Sinne der neuern Geometrie rührt von Poncelet her. Dieser zeigte, dass die Classe k einer Curve $n$ter Ordnung, welche Gergonne seltsamer Weise für identisch mit ihrer Ordnung gehalten hatte, im Allgemeinen gleich $n(n-1)$ sei; und es ergab sich hieraus ein Paradoxon, dessen Lösung erst durch die Theorie der einfachen Singularitäten möglich wurde. Wegen des Princips der Dualität würde die Ordnung n aus der Classe k ebenso gebildet werden müssen, wie umgekehrt k aus n. Wollte man aber die Ordnung der Curve aus der angegebenen Grösse von k bilden, so würde man nicht wieder zu n zurückgelangen, sondern eine viel grössere Zahl erhalten. Daher mussten Momente vorhanden sein, welche bei diesen Operationen Erniedrigungen herbeiführten. Schon Poncelet erkannte, dass ein Doppelpunct die Classe um zwei, ein Rückkehrpunct sie um wenigstens drei, ein p-facher Punct mit lauter verschiedenen Tangenten sie um $\frac{p \cdot p-1}{2}$ Einheiten erniedrige. Hier war es nun, wo Plücker eingriff Indem er einerseits die Zahl der Wendepuncte direct bestimmte, den Einfluss der Doppel- und Rückkehrpuncte berücksichtigte, und endlich das Princip der Dualität auf die erhaltenen Resultate anwandte, wurde er auf die berühmten Formeln für die Singularitäten der Curven geführt, welche seinen Namen führen, und welche das Poncelet'sche Paradoxon vollständig erledigen; Formeln, welche bereits im Jahre 1854 Steiner als die „bekannten" citiren konnte, ohne jedoch Plückers Namen dabei irgendwie zu erwähnen. Plücker theilte seine Formeln zuerst in Crelle's Journal Bd. 12 (Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes, 1834) mit; eine weitere Ausführung und volle Darlegung der Theorie gab er in der „Theorie der algebraischen Curven", 1839.

Bei der Beurtheilung der besondern singulären Puncte und Tangenten, auf deren Berücksichtigung man sich zunächst beschränken durfte, spielt das Princip der Dualität eine hervorragende Rolle. So wie Ordnung und Classe einer ebenen Curve, so stehen Doppelpuncte und Doppeltangenten, Rückkehrpuncte und Wendetangenten dem Begriffe nach dualistisch einander gegenüber. Es zeigt sich, dass diese vier einfachsten Singularitäten ein abgeschlossenes System bilden, insofern man alle höhern Singularitäten zunächst ausschliessen, und sich auf das Studium von Curven beschränken kann, welche keine höhere Singularitäten enthalten. Diese selbst aber auszuschliessen ist unmöglich; denn ausser den Kegelschnitten giebt es keine algebraischen Curven ohne höhere Singularitäten, welche zugleich der genannten völlig entbehrten.

Auf die so umgränzte Gattung von Curven bezieht sich Plückers Untersuchung. Indem er, wie erwähnt, aus der Ordnung, der Zahl der Doppelpuncte und der Zahl der Rückkehrpuncte die Classe und die Anzahl der Wendetangenten direct bestimmte, erhielt er durch das Princip der Dualität eine letzte Gleichung, und mit ihr eine indirecte Bestimmung für die Zahl der Doppeltangenten.

Es scheint, dass Jacobi Plückers aus dem Principe der Dualität geschöpften Beweis nicht für hinreichend strenge hielt. Er bestimmte daher nochmals mittelst einer ausführlichen Untersuchung direct sowohl die Zahl der Doppeltangenten, wie die der Wendetangenten, übrigens nur für Curven ohne Doppel- und Rückkehrpuncte (Crelle Bd. 40, 1850). Indess hatte Cayley eine directe Ableitung dieser Bestimmung bereits 1847 gegeben (Crelle's Journal Bd. 34).

Es darf wohl hier gleich der Folgerungen gedacht werden, welche später von Cayley bezüglich der Raumcurven aus Plückers Gleichungen gezogen wurden. Es ist ferner an die merkwürdige Gestalt zu erinnern, welche den Gleichungen Plückers durch Verbindung der geometrischen Untersuchungen mit der Theorie der Abelschen Functionen gegeben werden konnten, indem man als neue Singularität das Geschlecht der Curve hinzufügte. Durch den von Cayley eingeführten Begriff der Aequivalenz höherer singulärer Elemente mit einer gewissen Anzahl von niedern scheint der Anwendung dieser Formeln ein weiteres grosses Gebiet erworben zu sein. In einzelnen Fällen war eine solche Aequivalenz Poncelet und Plücker schon bekannt; die Untersuchungen nach dieser Richtung sind indessen auch jetzt noch keinesweges als abgeschlossen zu betrachten. Dasselbe gilt von dem durch Salmon und Cayley in Angriff genommenen Probleme, ähnliche Formeln für Flächen aufzusuchen; eine Untersuchung, welche bei der Ausdehnung und Schwierigkeit des Gegenstandes, und bei den täglich sich noch mehrenden Erfahrungen die Geometer wohl noch lange beschäftigen wird.

Ehe Plücker zu einer vollständigen Entwicklung des Zusammenhanges der Singularitäten gelangte, hatte er die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und die Theorie dieser Curven überhaupt ausführlich behandelt, und die betreffenden Untersuchungen in seinem „System der analytischen Geometrie", 1835, niedergelegt. Insbesondere erscheinen dabei die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung als der vollständige Durchschnitt der gegebenen Curve mit einer zweiten von gleicher Ordnung. Die allgemeine Untersuchung der Wendepuncte konnte Plücker auch noch später nicht so weit führen, dass das System der Wendepuncte als Schnittpunctsystem der Curve $n$ter Ordnung mit einer Curve $3(n-2)$ter Ordnung rein hervortrat; ein Resultat, welches zu Hesse's schönsten Entdeckungen gehört, und den Namen Hesse's mit einer der wichtigsten Covarianten der ebenen Curven verknüpft hat. Dagegen entwickelte Plücker in der nähern Untersuchung der Curven dritter Ordnung, indem er zuerst die Zahl 9 ihrer Wendepuncte angeben konnte, aus dem schon von Maclaurin gefundenen Satze, nach welchem auf der Verbindungslinie zweier Wendepuncte immer noch ein dritter liegt, den Begriff der 12 Wendepunctslinien. Er konnte zeigen, dass von den Wendepuncten einer reellen Curve dritter Ordnung stets drei und nicht mehr als drei reell sind; was später durch Möbius aus reinen Lagenbetrachtungen aufs neue abgeleitet wurde (Abh. der kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 1, 1852). Dagegen waren Plücker die vier Dreiecke noch unbekannt, zu welchen diese Geraden sich gruppiren. Indem Hesse diese fand (Crelles Journ. Bd. 28, 1844), vermochte derselbe die wahre algebraische Natur des Problems zu erschliessen. Es zeigte sich der wunderbare Character jener Classe algebraisch lösbarer Gleichungen 9. Grades, welche Hesse's Namen führen, und für welche die Wendepuncte das erste Beispiel bilden. Für dieses besondere Problem gab Hesse Form und Eigenschaften der zu lösenden Hilfsgleichungen an. Den Fortschritten der von Sylvester, Cayley und Salmon geschaffenen neuern Algebra, und zwar insbesondere den schönen Entdeckungen Aronholds, war es vorbehalten, alle zu lösenden Gleichungen wirklich zu bilden, und damit das Problem zu erledigen.

Die Untersuchungen, welche Plücker in seinem „System der analytischen Geometrie" ausserdem bezüglich der Curven dritter Ordnung anstellt, enthalten eine Fülle einzelner Resultate, wie z. B. bezüglich der sechspunctig berührenden Kegelschnitte; insbesondere aber eine Discussion der Gestalten der Curven dritter Ordnung. Diese Untersuchung wird mit Hülfe principieller Anwendung der Methode der abgekürzten Bezeichnung in höchst geistreicher Weise geführt. Aber es scheint, dass das von Plücker gewählte Eintheilungsprincip kein glückliches war, insofern dabei die Zahl der zu unterscheidenden Gestalten sehr gross wird (219), und sich dieselben nicht übersichtlich gruppiren. Es ist vorzüglich die Betrachtung der Asymptoten, welche hier bei Plücker, wie bei den ältern Geometern (Newton, Euler, Cramer) in den Vordergrund tritt. Aber bei Plückers Eintheilung wird die Sache dadurch noch verwickelter gemacht, dass die Lage derjenigen Geraden mit in Betracht gezogen wird, auf der nach einem Satze von Poncelet die Asymptoten die Curve noch schneiden. Eine übersichtliche und einfache Gruppirung, welche im Wesentlichen mit Newtons Zurückführung der Gestalten auf Projectionen von fünf Parabeln zurückkommt, gab Salmon in seinem „Treatise on higher plane curves" 1852, eine aus der Natur einfacher

Lagenverhältnisse entspringende Ableitung dieser Eintheilung Möbius in der schon angeführten Schrift aus demselben Jahre.

Der Untersuchung der Asymptoten von Curven ist auch ein grosser Theil der „Theorie der algebraischen Curven", 1839, gewidmet, wie Plücker denn schon im ersten Bande von Liouville's Journal (1836) die Aufzählung der Arten von Curven 4. Ordnung nach der Natur ihrer unendlichen Aeste gegeben hatte. Für die heute vorherrschende Auffassung ist wichtiger die Eintheilung der Curven 4. Ordnung nach den bei ihnen möglichen Singularitäten, welche Plücker in dem genannten grössern Werke ebenfalls gab. Indem er ferner seine Formeln auf die Curven 4. Ordnung anwandte, konnte er zuerst die Zahl (28) der Doppeltangenten angeben, welche eine Curve 4. Ordnung ohne singuläre Puncte besitzt; und er erläuterte dieselben durch ein höchst glücklich gewähltes Beispiel, in welchem sie sämmtlich reell sein können. Er war weniger glücklich in der weitern Untersuchung der gegenseitigen Lage der Doppeltangenten, über welche er, auf eine irrige Interpretation einer Gleichungsform der Curven gestützt, unrichtige Sätze aufstellte. Erst Hesse gab (zugleich auch, ohne Beweis, Steiner) die richtigen Sätze in zwei grossen Arbeiten über die Theorie dieser Curven (Crelle Bd. 49, 1854).

In der Vorrede zu der erwähnten Schrift gedenkt Plücker einer Methode, welche er in derselben mit Vorliebe anwendet, und welche ihn häufig zu schönen Resultaten führte; es ist die Methode der Constantenabzählung. Der Gedanke, die Erfüllbarkeit eines Gleichungssystems, aus dem Umstande zu erschliessen, dass die Zahl der in demselben enthaltenen Unbekannten der Zahl der Gleichungen gleichkommt, liegt sehr nahe. Andrerseits ist die Unzulänglichkeit dieser Schlussweise oft genug hervorgehoben worden, und natürlich mit vollem Rechte, sobald man die Methode in dieser einfachsten Weise ausspricht. Aber so wollte sie Plücker allerdings keinesweges verstanden wissen. Er war sich sehr wohl der Bedingungen bewusst, unter welchen diese bei vorsichtiger Behandlung durchaus correcte Methode anwendbar ist. Wenn eine Zahl von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten nicht im Allgemeinen zugleich erfüllt werden kann, so werden für ihr Bestehen nothwendig gewisse Bedingungen zwischen den Coefficienten gefordert. Sind diese aber erfüllt, so werden die Gleichungen nunmehr zwar lösbar, aber sie sind es dann auf unendlich viele Arten. Es ist daher eine nothwendige Ergänzung für die Methode der Constantenabzählung, dass man zeige, wie dem fraglichen Probleme eine Bestimmtheit nothwendig innewohne. Hierdurch freilich wird die Einfachheit der Methode in vielen Fällen beeinträchtigt, indem der geforderte Zusatz bisweilen ebenso schwer zu erreichen ist, als eine andre Behandlung des ganzen Problems, beziehungsweise eine solche involvirt.

Plücker selbst pflegte die Methode des Constantenzählens an einem characteristischen Beispiele zu erläutern, welches hier angeführt werden mag. Durch Veränderung des rechtwinkligen Coordinatensystems können im Allgemeinen drei Constante aus der Gleichung eines Kegelschnitts fortgeschafft werden. Da nun die Gleichung eines Kreises nur drei Constanten enthält, so könnte man glauben, sie liessen sich durch Verlegung des Coordinatensystems sämmtlich beseitigen, und man könnte demnach der Gleichung jedes Kreises die Form $x^2+y^2=1$ geben. Aber hier tritt der Umstand ein, dass ein Kegelschnitt, welcher in irgend einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die Form $x^2+y^2=1$ annimmt, diese auch nach einer Drehung des Coordinatensystems behält, sie also für unendlich viele Lagen desselben hat. Das Problem also, die Gleichung eines Kreises auf die Form $x^2+y^2=1$ zu bringen, enthält zwar ebenso viele Unbekannte als zu erfüllende Gleichungen; aber es wird, wenn es lösbar ist, nothwendig unbestimmt, und seine Lösung ist daher nothwendiger Weise im Allgemeinen unmöglich.

Ich habe, ehe ich zu einer historischen Darlegung von Plückers letzten Arbeiten übergehe, einiger Einzelheiten zu gedenken, welche im Vorigen eine passende Stelle nicht zu finden vermochten. Hieher rechne ich die Verallgemeinerung des Begriffs der Brennpuncte, welche Plücker im 10. Bande von Crelle's Journal (1833) gegeben, und welche Kummer im 35. Bande desselben Journals (1847) wieder aufgenommen hat. Die Auffassung der Brennpuncte der Kegelschnitte, welche zu dieser Verallgemeinerung Veranlassung gab, lässt sich auf Poncelet zurück-verfolgen (Traité des propriétés projectives, Nr. 457). Andererseits wurde dieselbe Verallgemeinerung später von Salmon und Hart wiedergefunden und weiter behandelt. Die Wichtigkeit und principielle Nothwendigkeit der Einführung dieses erweiterten Begriffs erkennt man erst recht deutlich in der Beleuchtung, welche dieselbe durch Chasles' Einführung der imaginären unendlich fernen Kreispuncte gewonnen haben. Erst durch dieses höchst geistreiche Hülfsmittel werden diese wie alle metrischen Begriffe in den Kreis der projectivischen Betrachtungen gezogen, und so zugleich den Methoden der neuern Algebra zugänglich gemacht, ein Fortschritt, welcher nicht hoch genug angeschlagen werden kann, und welcher in Cayley's allgemeiner Maassbestimmung seinen vollendeten analytischen Ausdruck gefunden hat.

Sodann erwähne ich die Theorie der Berührung der Flächen, welche Plücker im 4. Bande des Crelleschen Journals (1829) gegeben hat. Sie liefert die Grundvorstellungen für den Character höherer Berührungen, in dem sie die Natur derselben an die Art der singulären Stellung anknüpft, welche der Berührungspunct in Bezug auf die Schnittcurve der Flächen einnimmt.

Ich erinnere ferner daran, dass Plücker bereits 1847 (Crelles Journal Bd. 34) den Versuch gemacht hat, die Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung zu studiren, indem er die Coordinaten jedes Punctes derselben durch die Parameter der sich in ihm schneidenden Erzeugenden ausdrückte. Er ist hierdurch der Vorläufer für die schönen Untersuchungen von Chasles geworden, aus welchen die Theorie der Flächenabbildung sich entwickeln sollte.

Endlich ist der Abhandlung über die Wellenfläche zu gedenken (Crelles Journal Bd. 19, 1839), in welcher diese für unsre Kenntniss der Flächentheorie so wichtig gewordene Fläche vollständig analytisch untersucht wurde. Als neu mag insbesondere aus dieser Arbeit die Eigenschaft der Wellenfläche hervorgehoben werden, nach welcher sie ihre eigne reciproke Polare in Bezug auf eine gewisse Fläche zweiten Grades ist. In der Liniengeometrie, wo die Wellenfläche als besonderer Fall der Singularitätenfläche des Complexes zweiter Ordnung (Kummersche

Fläche) wieder auftritt, hat sich gezeigt, dass ihr dieselbe Eigenschaft noch in Bezug auf neun andre Flächen zweiter Ordnung zukommt. Aber dieses konnte erst aus der Untersuchung der linearen Fundamentalcomplexe eines Complexes zweiter Ordnung erschlossen werden, durch welche F. Klein dem alten Probleme, zwei quadratische Formen gleichzeitig als Aggregate von Quadraten darzustellen, eine neue interessante Seite abgewonnen hat.

Unter den grössern Werken Plückers ist es die „Geometrie des Raumes" (1846), welche am durchgebildetsten erscheint. Ihrer Entstehung und Tendenz nach ist sie mehr einer Darstellung bekannter, als, wie es sonst bei Plücker zu sein pflegt, der Entwicklung neuer Resultate gewidmet. So ist es natürlich, dass sie bei grösserer Formvollendung zugleich weniger originale hier zu beleuchtende Gesichtspuncte darbietet. Aber sie enthält eine Bemerkung (vgl. Nr. 258), welche der Keim der Liniengeometrie wurde, und damit den Ausgangspunct für Plückers letzte grosse geometrische Leistung bildete.

Wenn man jetzt, wo die Liniengeometrie als solche geschaffen ist, das Auftreten der ihr zugehörigen Momente rückwärts verfolgt, so sind es drei Kreise von Untersuchungen, in welchen sie auftreten; Untersuchungen, welche scheinbar ganz verschiedenen Gebieten angehören, während sie andrerseits so wesentlich in einander greifen, dass sie nicht immer völlig zu trennen sind. Der eine Untersuchungskreis ist der rein geometrische, der zweite ein mechanischer, der dritte, welche an die Brechung und Reflexion der Lichtstrahlen anknüpft, mag ein physikalischer genannt werden.

Die geometrischen Untersuchungen, welche für die Geometrie des Raumes, sofern die gerade Linie darin als Element gedacht wird, vorbereitend waren, beginnen mit Möbius. Dieser untersuchte im zehnten Bande von Crelle's Journal (1833) solche reciproke räumliche Verwandtschaften, bei welchen jeder Punct mit der ihm zugeordneten Ebene vereinigt liegt; Verwandtschaften, welche später v. Staudt als Nullsysteme bezeichnet hat. Diese nach Inhalt und Form gleich vollendete Arbeit von Möbius enthält im Wesentlichen die Eigenschaften des später als

Complex erster Ordnung bezeichneten Gebildes, und zwar so, dass die geometrische Natur desselben sich sogleich voll und rein erkennen lässt, zugleich aber so, dass der Ausgangspunct der ganzen Untersuchung eben kein linien-geometrischer, sondern die Betrachtung der Verwandtschaften ist. Dieselbe Verwandtschaft wurde von Magnus im zweiten Bande seiner Aufgaben (1837) mit Beziehung auf Möbius weiter behandelt.

Sodann ist eine merkwürdige Arbeit zu nennen, welche Chasles 1839 in Liouville's Journal veröffentlichte. Er construirte factisch den Complex ersten Grades, indem er die Erzeugenden eines Hyperboloids paarweise einander zuordnete vermittelst der sie treffenden Strahlen eines ebenen Strahlbüschels, und sodann die Gesammtheit aller Geraden betrachtete, die zwei einander so zugeordnete Geraden treffen. Diese Erzeugungsweise umfasst als speciellen Fall die später von Sylvester gegebene, bei welcher zwei projectivische ebene Strahlbüschel so gelegt werden, dass zwei entsprechende Strahlen vereinigt liegen, und sodann die Gesammtheit der Geraden betrachtet wird, welche entsprechende Gerade der Büschel schneiden.

Beziehen sich die angeführten Untersuchungen auf die Theorie des linearen Complexes, so giebt es andre, welche in Beziehung zu dem besondern Complexe zweiter Ordnung stehen, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist. Eine collineare Umformung desselben ist das Normalensystem der confocalen Flächen zweiter Ordnung, welches Binet bereits 1811 untersuchte (vgl. Journal de l'école polytechnique Bd. 16, 1813). Chasles hat diese Untersuchungen im Aperçu historique aufgenommen und weitergeführt. Ein besonderer Fall dieses Complexes ist ferner enthalten in Chasles' Betrachtungen über die Bewegung starrer Körper (Comptes Rendus 1861). Dort wird jedem Puncte eines bewegten Körpers die Gerade zugeordnet, welche ihn mit einer beliebig gewählten spätern Lage verbindet; das Tetraeder ist in die doppelt gezählte unendlich ferne Ebene und in zwei conjugirt imaginäre Ebenen ausgeartet, welche den allen Kugeln gemeinsamen unendlich fernen Kreis berühren. Der allgemeine Fall dieses Complexes ist neuerdings vielfach untersucht worden; so namentlich von Reye, der ihn durch die Verbindungslinien entsprechender Puncte collinearer Systeme construirt (1867), und von Lie, welcher auf ihn durch Untersuchungen über die geometrische Interpretation zweier complexer Veränderlichen geführt wurde. Die fundamentale Eigenschaft des Complexes, vermöge deren seine Geraden von den Tetraederflächen nach constantem Doppelverhältnisse geschnitten werden, wurde von Müller (Math. Ann. Bd. I, 1869) gegeben, und es erledigte sich hiemit die seltsam irrige Frage Steiners nach der Fläche, welche von allen vier gegebene Ebenen harmonisch schneidenden Geraden berührt wird (Syst. Entwickl. p. 299).

Zu den geometrischen Untersuchungen, in welcher die Geometrie der geraden Linie gleichsam anticipirt erscheint, sind endlich zwei Arbeiten von Cayley zu rechnen, welche 1857 im Quarterly Journal (Bd. 3, 1860) erschienen, und in welchen eine Raumcurve als Ort der sie schneidenden Geraden betrachtet wird. Es war hierdurch eine merkwürdige Darstellung der Raumcurven mittelst einer einzigen Gleichung angedeutet, und bei Raumcurven dritter Ordnung ausgeführt. Die Combinationen, welche dabei als die Veränderlichen betrachtet werden, stimmen genau mit den von Plücker später als Coordinaten der geraden Linie gebrauchten überein. Dass Cayley auf dem Wege war, eine Geometrie der geraden Linie in Plückers Sinn zu schaffen, sieht man aus seiner Abhandlung „on the six Coordinates of a line", Cambridge Transactions, 1867; aber diese Arbeit erschien erst, nachdem Plücker die Sache aufgenommen hatte, und nimmt auf Plücker Bezug *).

Der zweite Kreis linien-geometrischer Untersuchungen, welcher der Mechanik angehört, lässt sich auf Poinsot und die geometrische Form zurückführen, welche dieser ausgezeichnete Geometer für die Untersuchung der Kräfte eingeführt hat, die auf einen starren Körper wirken. Wenn Poinsot die Gesammtheit der Combinationen von Kraft und Kräftepaar sucht, welche ein gegebenes Kraftsystem ersetzen, so ist dies

*) In gewissem Sinne sind die Coordinaten der geraden Linie, wie überhaupt ein grosser Theil der Grundvorstellungen der neuern Algebra, bereits in Grassmanns »Ausdehnungslehre« (1844) enthalten; die genauere Darlegung dieser Verhältnisse würde indessen hier zu weit führen. Vgl. auch Hankel, Theorie der complexen Zahlen, 1867.

nichts anderes, als in Plückers Bezeichnung das System der Durchmesser eines linearen Complexes nebst den ihnen zugeordneten Ebenen. Ebenso hängt mit der Liniengeometrie der berühmte 1829 von Chasles gefundene Satz zusammen, nach welchem zwei Kräfte, die ein gegebenes Kräftesystem ersetzen können, als Strecken im Raume betrachtet, stets ein Tetraeder von constantem Volumen bestimmen. An diese Betrachtungen knüpfte Möbius in der oben erwähnten Abhandlung von 1833 und in seiner Statik (1837) Untersuchungen an, welche unmittelbar linien-geometrische Elemente enthielten, ja er erhielt durch diese statischen Betrachtungen die Anregung für die Untersuchung der oben erwähnten Verwandtschaft. Sodann aber ergaben sich Sätze, welche eben erst mit Hülfe der Liniengeometrie einfach ausgedrückt werden können; so werden, um nur Eines anzuführen, die Systeme von zwei Kräften, welche ein gegebenes Kräftesystem zu ersetzen im Stande sind, ihrer Lage und Richtung nach nichts anderes, als die Paare von Geraden, welche in Bezug auf einen gegebenen Complex ersten Grades conjugirt sind; Sätze, denen verwandte über unendlich kleine Rotationen entsprechen. Aehnliche Untersuchungen veröffentlichte Chasles 1843 in den Comptes Rendus. Es sind endlich in dieser Richtung die Bemerkungen von Sylvester, Chasles und Cayley zu erwähnen, welche sich in den Comptes Rendus von 1861 finden.

Der dritte Kreis vorbereitender Untersuchungen wird durch die Theorie der Strahlensysteme gebildet. Schon Monge hatte Normalensysteme von Flächen und die Brennflächen derselben betrachtet. Sodann hatte Malus die Gesammtheit der Strahlen untersucht, welche von einem Puncte ausgehen, und gefunden, dass dieselben, beliebig an der Grenze von isotropen Mitteln reflectirt oder gebrochen, stets das Normalensystem einer Fläche bilden. Sturm hatte ein unendlich dünnes Strahlenbündel untersucht, und die Brennlinien desselben entdeckt, d. h. jene beiden Stellen, in welchen der Querschnitt eines solchen Bündels sich annähernd in zwei Linien zusammenzieht. Die Untersuchungen dieser Strahlensysteme waren von Hamilton in allgemeiner Weise aufgenommen (Transactions of the Royal Irish Acad. Bd. 16), und dessen Untersuchungen von Kummer

(1859, Borchardts Journal Bd. 57) in einer Weise reproducirt, welche den rein geometrischen Inhalt des Gegenstandes deutlich hervortreten liess. Als bedeutendste Erscheinung nach dieser Richtung mag noch hier sogleich die grosse Arbeit von Kummer über Strahlensysteme zweiter Ordnung und Classe erwähnt werden, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1866 erschienen ist. Der Zeit nach fällt sie bereits jenseits der ersten Arbeiten Plückers. Noch näher kommen der Complextheorie die Untersuchungen von Abel Transon (1861, Comptes Rendus Bd. 52, und Journal de l'école polytechnique, Cah. 38). Derselbe betrachtet Gerade, von denen durch jeden Punct des Raumes eine ihm zugeordnete geht, womit, nach einem neuern Ausdruck, ein Complex auf dem Punctraum abgebildet erscheint, und fragt dann nach den Normalensystemen, welche in solchen Combinationen enthalten sein können.

Der Gedanke der Liniengeometrie war von Plücker, wie erwähnt, in seiner Geometrie des Raumes beiläufig ausgesprochen worden. Durch den Verkehr mit seinen Freunden in England angeregt nahm er 1864 den Gegenstand wieder auf, und entwickelte nun sofort die Grundlage von dem, was er als „Neue Geometrie des Raumes" bezeichnete. Unbekannt mit den Methoden der neuern Algebra, wie mit dem grössten Theile des während seiner physikalischen Thätigkeit nach dieser Richtung Geleisteten, hatte er zunächst nicht ohne Schwierigkeit den Begriff der Coordinaten einer Geraden zu fixiren. Indem er dieselben als sechs Verhältnisszahlen definirte, welche einer gewissen Gleichung zweiten Grades genügen, berührten seine Speculationen sich nahe mit den Arbeiten Cayley's, deren oben gedacht wurde. Sodann aber begründete Plücker die neue Disciplin durch Einführung des Begriffs eines Complexes, und gewann hiermit eine fundamentale Grundlage weiterer Betrachtungen. Denn der Complex bildet im Gegensatz zum Strahlensysteme (bei Plücker Congruenz) das durch eine weitere Gleichung in Liniencoordinaten gegebene Gebilde, während das Strahlensystem deren zwei verlangt. Der Complex steht also linien-geometrisch dem Strahlensysteme ebenso gegenüber, wie die Oberfläche der Raumcurve in der Geometrie des

Punctes. Zu erstern tritt in der Liniengeometrie als dritte Abstufung die geradlinige Fläche, deren eigenthümliche Stellung in der Raumgeometrie erst durch die principielle Einführung der Geraden als Raumelements das rechte Licht erhält.

Man erkennt aus dieser Abstufung, wie die Liniengeometrie gewissermassen die Geometrie eines Raumes von vier Dimensionen ist. Und so wollte sie Plücker in der That aufgefasst haben. Gegenüber der directen Einführung eines Raumes von mehr als drei Dimensionen pflegte er zu erörtern, wie schon die einfachste räumliche Conception, etwa die Ebene, hinreiche, um in ihr die Theorie einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen zu studiren. Denn man brauche nur ein Grundgebilde einzuführen, welches von einer hinlänglich grossen Anzahl von Parametern abhängig sei, und könne dann diese ähnlich wie die Coordinaten eines Punctes in einem höhern Raume behandeln, ohne auf einen solchen zurückgehen zu müssen. Die Anzahl der Dimensionen eines Raumes erscheint auf diese Weise als eine Eigenschaft, die demselben nicht sowohl an und für sich zukommt, als insofern man in demselben ein bestimmtes Gebilde zur Basis der Untersuchung nimmt. So bildet in der That die Liniengeometrie, deren Grundgebilde von vier Parametern abhängt, eine Theorie räumlicher Gebilde von vier Dimensionen, welche in dem gewöhnlichen Raume ausgeführt ist, der, wenn man den Punct als Grundgebilde festhält, nur drei Dimensionen hat.

Das Studium der Complexe, vorzugsweise der Complexe zweiter Ordnung, bildete nunmehr den Hauptgegenstand von Plückers Beschäftigung. Durch Einführung der sogenannten Complexflächen, von welchen er zahlreiche Modelle herstellen liess, vermochte er den schwierigen Gegenstand auch gestaltlich zu erläutern; wie denn überhaupt gegenüber den mehr analytischen Interessen seiner frühern Arbeiten in spätern Jahren das rein geometrische Interesse an der Gestalt mehr und mehr hervortrat. Die Untersuchungen dieser Flächen bildet einen grossen Theil der in seinem letzten Werke (Neue Geometrie des Raumes, 1868) niedergelegten Betrachtungen. Es war ihm nicht vergönnt, dieselben soweit zu führen, als er selbst es beabsichtigte. In alter Weise unermüdlich schaffend, verbreitete er seine neuen Gedanken durch eine Zahl von Abhandlungen, während er sein grösseres Werk vorbereitete. Aber der Tod riss ihn mitten aus dieser Thätigkeit heraus.

Sein Werk über die neue Raumgeometrie konnte glücklicherweise durch seinen damaligen Assistenten, Hrn. Klein, nach Plückers Andeutungen in dessen Sinn beendigt werden. Freilich hätte er selbst wohl im Laufe der Arbeit manches hinzugefügt, insbesondere auch bezüglich der mechanischen Anwendungen, die ihn in der letzten Zeit vielfach beschäftigt hatten. Aber wenn auch manches in dieser Richtung deutlich erkennbar vorlag, so musste doch die Herausgabe sich ausschliesslich auf dasjenige beschränken, welches durch schriftliche oder mündliche Mittheilungen von Plücker unmittelbar veranlasst war. Auch so konnte das Werk Anregung werden zu weitern Forschungen, die sich in mannigfacher Weise daran geknüpft haben. Wenn in der analytischen Fassung zum Theil jetzigen Methoden nicht immer mehr entsprechend, wirkte dasselbe durch seinen gedanklichen Inhalt, und die jüngere Generation entzog sich nicht der ihr gewordenen Anregung. Schon jetzt ist eine grosse Literatur entstanden, welche den neuen Gegenstand behandelt, während viele Gesichtspuncte, ja eine dem heutigen Standpuncte entsprechende Darstellung des Ganzen der Zukunft vorbehalten sind. —

Es war vielleicht in der Natur der Verhältnisse begründet, wenn die Thätigkeit Plückers während seines Lebens sich nicht immer, wenigstens nicht überall, der vollen Anerkennung erfreute, die seinen Leistungen gebührte. Mitten in die verschiedenartigen Bestrebungen einer wissenschaftlich höchst fruchtbaren Epoche gestellt, musste auch er jene Parteinahme erfahren, welche den Streitenden auch im Wettkampfe der Wissenschaft nicht erspart bleibt, und welche das Urtheil der Mitstrebenden trübt.

Das Geschick konnte ihm keine schönere Genugthuung bereiten, als dass es ihn noch am Abende seines Lebens Schöpfer einer neuen Richtung werden liess, an deren Verfolgung nunmehr die Nachlebenden in neidloser, freudiger Anerkennung arbeiten.

Note 1, betreffend die physikalischen Arbeiten Plücker's.

(Nach Mittheilungen von Hrn. Prof. Hittorf).

Die erste physikalische Entdeckung Plückers der Zeit und vielleicht der Bedeutung nach war das Verhalten der Krystalle im magnetischen Felde (1847). Ihr folgten noch im nämlichen Jahre Beobachtungen über die Aenderung der Oberfläche, welche tropfbare Flüssigkeiten in der Nähe der Pole erfahren, sowie über die Einwirkung, welche der Magnet auf Gase ausübt. Der letztgenannte Gegenstand wurde gleichzeitig auch von Faraday bearbeitet, nachdem in Italien Bancalari die Abstossung der Flamme durch den Magneten zuerst wahrgenommen hatte. Plücker vermehrte die Beweise für die Polarität des diamagnetischen Zustandes und suchte durch die Wage die Intensitäten der dia- und paramagnetischen Kräfte in ihrer Abhängigkeit von der Natur der Substanz wie von der Temperatur zu erforschen. Der grosse Electromagnet des physikalischen Cabinets, der im Winter 46/47 auf der Sayner Hütte geschmiedet worden war, blieb, nachdem er gleich bei der ersten Benutzung solche Resultate geliefert hatte, stets das Lieblingsinstrument für seine physikalischen Forschungen. Er unterwarf ihm zehn Jahre später die leuchtenden Entladungen, welche durch Inductionsströme in den mit verdünnten Gasen gefüllten Geissler'schen Röhren entstehen, und erzeugte die prächtigen Flächen und Curven, in welche das Licht am negativen Pole unter Einwirkung der magnetischen Kräfte übergeht. Er lehrte zuerst das schwache electrische Licht der verdünnten Gase durch Verengung eines Theiles der Röhre auf Capillardimensionen so zu verstärken, dass deutliche, bestimmbare Spectra gewonnen werden konnten. Vor Bunsen und Kirchhoff sprach er aus, dass die Linien der Spectrum's für jede chemische Substanz characteristisch sind und zur Erkennung derselben in der Analyse verwerthet werden können. Er sah zuerst und benannte die 3 Linien des Wasserstoffspectrums, welche wenige Monate nach seinem Tode in dem Lichte der Protuberanzen der Sonne erkannt wurden und sogleich das Räthsel, welche diese Erscheinung den Astronomen gewesen war, lösten.

Dadurch dass Plücker früher dem Experimente nicht obgelegen hatte, war ihm die Möglichkeit versagt gewesen, sich die Fertigkeit und Sicherheit, welche die Uebung dem Körper allein in der Jugend verleiht, zu erwerben. Er wusste dieses Hinderniss für seine experimentelle Thätigkeit dadurch wegzuräumen, dass er diejenigen in seiner Umgebung, an welchen er jene Eigenschaften erkannte, für seine Ideen interessirte und in den Dienst der Wissenschaft zog. Lange Zeit war sein früherer Schüler, der bereits verstorbene Mechaniker Fessel, ihm in der Herstellung der nothwendigen Vorrichtungen behülflich. Plücker machte die Apparate, welche Fessel auf seine Veranlassung anfertigte, wie die Wellenmaschine, den electromagnetischen Motor, die Rotationsmaschine, als Fessel'sche bekannt (in den Annalen von Poggendorf). Die ausserordentliche Kunstfertigkeit, welche Dr. H. Geissler in Bonn in der Bearbeitung des Glases besitzt, veranlasste Plücker mit ihm in sinnreich construirten Thermometer-ähnlichen Gefässen Ausdehnungsverhältnisse festzustellen, und sich mit den Spannkräften der Dämpfe, welche Flüssigkeitsgemische entwickeln, zu beschäftigen. Bereits oben wurde der Geissler'schen Röhren gedacht, welche durch Plücker's Arbeiten zuerst eingeführt und jetzt weltbekannt geworden sind. Als er in dem Studium der elektrischen Gasspectra erkannt hatte, dass ausgedehntere chemische Erfahrungen, als ihm zu Theil geworden waren, wünschenswerth seien, verband er sich zur weiteren Untersuchung derselben mit Prof. Hittorf. Indem sie die Intensität des electrischen Stromes variirten und die Temperatur des Gases dadurch auf sehr verschiedene Höhen brachten, entdeckten dieselben für mehrere elementare Stoffe zwei characteristische Spectra, und beobachteten zuerst die Erweiterung der Linien als allgemeine Wirkung der hinreichend gesteigerten Wärme, ein Verhalten, welches in der neuesten Zeit für das Studium der Zustände in der Sonnenatmosphäre durch die Arbeiten des englischen Astronomen Lockyer werthvoll geworden ist.

Plücker wusste bald eine neue Erscheinung von verschiedenen Seiten zu erfassen und Versuche zu ersinnen, in denen dieselben hervortreten mussten. Das Princip der Verallgemeinerung, an welches er in seinen geometrischen Arbeiten so gewöhnt war, leistete hierbei vortreffliche Dienste und erleichterte ihm die Orientirung. Hatte er den thatsächlichen Inhalt einer Entdeckung so vollständig, als er zunächst vermochte, erforscht, so übergab er sie der Oeffentlichkeit, wenn er über die Theorie derselben auch nicht zum Abschluss gekommen war. Offen widerrief er die zuerst gegebene Auffassung, sobald er sie als irrig erkannte, und ersetzte sie durch diejenige, welche ihm die richtigere schien. So schloss er die Theorie über das magnetische Verhalten der Krystalle erst endgültig in dem Aufsatze ab, welcher 1858 in den Philos. Transactions unter dem Titel: „On the magnetic induction of Crystals“ erschien.

Bei seinen geometrischen Arbeiten war er so ganz auf sich angewiesen gewesen, so ungehindert seinem Ideengange gefolgt, dass er sich des Studiums der Literatur fast entwöhnt hatte. Bei der Selbstständigkeit seines Denkens war ihm später ein Eindringen in die Auffassung Anderer schwer, und oft hat er geäussert, wie unangenehm ihm diese Thätigkeit sei und wie wenig er sich dazu eigne. In dieser Eigenthümlichkeit liegt eine Ursache, wesshalb er sich in seinen physikalischen Forschungen — wenn man die zuletzt erwähnte Untersuchung über das magnetische Verhalten der Krystalle, an welcher sein früherer Schüler, der leider so früh verstorbene Prof. Beer sich vielfach betheiligt hatte, ausnimmt — auf tiefergehende molecular-theoretische Forschungen nicht eingelassen hat. Er konnte sich nich zu dem Studium der Resultate, welche hier bereits vorlagen, entschliessen, und kehrte zu der Zeit, wo ein solches Eingehen erwartet werden konnte, lieber zu seinen geometrischen Forschungen zurück.

Note 2. Verzeichniss der Arbeiten Plücker's *).

A. Mathematik.

I. *Selbstständig erschienene Schriften.*

1. Generalem analyseos applicationem ad ea, quae geometriae altioris et mechanicae basis et fundamenta sunt, e serie Tayloria deducit Julius Plücker. Bonnae 1824. (Habilitationsschrift).
2. Analytisch-geometrische Entwickelungen (Essen, 1. Band 1828. 2. Band 1831).
3. System der analytischen Geometrie (Berlin 1835).
4. Theorie der algebraischen Curven (Bonn 1839).
5. System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise (Düsseldorf 1846. Zweite Aufl. 1852).
6. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Mit einem Vorworte von A. Clebsch. (In zwei Abtheilungen: Erste Abtheilung, Leipzig 1868. Zweite Abtheilung, herausgegeben von F. Klein. Leipzig 1869).

II. *Aufsätze in Gergonne's Annalen.*

1. Théorèmes et problèmes sur le contact des sections coniques. T. XVII (1826—27).
2. Recherche d'une construction graphique du cercle osculateur pour les lignes du second ordre. T. XVII (1826—27).
3. Mémoire sur les contacts et intersections des cercles. T. XVIII (1827—28).
4. Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés. T. XIX (1828—29).
5. Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés. T. XIX (1828—29).

III. *Aufsätze in Crelle's Journal.*

1. Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem beliebigen Puncte. Bd. III (1828).

---

*) Dieses Verzeichniss, sowie eine grosse Zahl der in dem Aufsatze selbst verwertheten Mittheilungen verdanke ich Hrn. Dr. Klein. Die hier gegebenen Jahreszahlen sind die der betreffenden Bände, während im Texte die Daten der Unterschrift des Verfassers, oder, wo diese fehlte, dem Erscheinen des betreffenden Heftes entnommen sind.

2. Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben. Bd. IV (1829).
3. Ueber ein neues Coordinatensystem. Bd. V (1830).
4. Ueber ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coifficienten. Bd. V (1830).
5. Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen. Bd. VI (1830).
6. Geometrische Lehrsätze. Bd. VI (1830).
7. Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes. Bd. IX (1832).
8. Geometrische Aufgaben und Lehrsätze. Bd. IX (1832).
9. Ueber solche Puncte, die bei Curven einer höheren Ordnung, als der zweiten, den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen. Bd. X (1833).
10. Nachrichten von Büchern. Bd. X (1833). (Anzeige des „Systems der analytischen Geometrie").
11. Analytisch-geometrische Aphorismen, 1, 2. Bd. X (1833).
12. Analytisch-geometrische Aphorismen, 3, 4, 5, 6. Bd. XI (1834).
13. Solution d'une question fondamentale concernant la theorie générale des courbes. Bd. XII (1834).
14. Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues. Bd. XVI (1837).
15. Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. Bd. XIX (1839).
16. Aphorismen aus der Geometrie des Raumes. 1, 2. Bd. XXIV (1842).
17. Ueber Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung. Bd. XXXIV (1847).
18. Note sur le théorème de Pascal. Bd. XXXIV (1847).
19. Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe. Bd. XXXIV (1847).
20. Ueber eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe. Bd. XXXIV (1847).
21. Ueber das Ohm'sche physikalische Gesetz. Bd. XXXV (1847).
22. Sur la réflexion de la lumière dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom. Bd. XXXV (1847).

III. *Aufsätze in Liouville's Journal.*

1. Enumération des courbes du quatrième ordre d'après la nature différente de leurs branches infinies. T. I (1836).
2. Sur les points singuliers des courbes. T. II (1837).
3. Sur une géométrie nouvelle de l'espace. 2e Série, T. XI (1866). [Aus den Philos. Transactions übersetzt].

IV. *In den Proceedings of the Royal Society.*

1. On a New Geometry of Space (1865).

V. *In den Philosophical Transactions.*

1. On a New Geometry of Space (1865 p. I).
2. Fundamental views regarding Mechanics (1866 p. I).

VI. *In Les Mondes, par l'abbé Moigno.*

1. Géométrie nouvelle de l'espace. T. XIII (1867).

VII. *In den Annali di Matematica.*

1. Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction. T. I, Série 2 (1867).

B. Physik.

I. *In Poggendorff's Annalen.*

1. Ueber die Abstossung der optischen Axe der Krystalle durch die Pole der Magnete. Bd. 72 (1847).
2. Ueber das Verhältniss zwischen Magnetismus und Diamagnetismus. Bd. 72 (1847).
3. Experimentaluntersuchungen über die Wirkung der Magnete auf gasförmige und tropfbare Flüssigkeiten. Bd. 73 (1848).
4. Ueber ein einfaches Mittel den Diamagnetismus schwingender Körper zu verstärken. Bd. 73 (1848).
5. Ueber Intensitätsbestimmung der magnetischen und diamagnetischen Kräfte. Bd. 74 (1848).
6. Ueber das Verhalten des abgekühlten Glases zwischen den Magnetpolen. Bd. 75 (1848).
7. Ueber das Gesetz, nach welchem der Magnetismus und der Diamagnetismus von der Temperatur abhängt. Bd. 75 (1848).
8. Ueber die verschiedene Zunahme der magnetischen Anziehung und diamagnetischen Abstossung bei zunehmender Kraft des Electromagnets. Bd. 75 (1848).
9. Ueber die neue Wirkung des Magnets auf einige Krystalle, die eine vorherrschende Spaltungsfläche besitzen. Einfluss des Magnetismus auf die Krystallbildung. Bd. 76 (1849).
10. Ueber die diamagnetischen Beziehungen der positiven und negativen optischen Axen der Krystalle. Bd. 77 (1849). [Uebersetzt aus dem Philos. Magazine].
11. Ueber den Einfluss der Umgebung eines Körpers auf die Anziehung oder Abstossung, die er durch einen Magneten erfährt. Bd. 77 (1849).
12. Ueber die Fessel'sche Wellenmaschine, den neueren Boutigny'schen Versuch

und das Ergebniss fortgesetzter Beobachtungen in Betreff des Verhaltens krystallisirter Substanzen gegen den Magnetismus. Bd. 78 (1849). [Aus einem Briefe an Poggendorff].

13. Ueber die magnetischen Axen der Krystalle und ihre Beziehung zu der Krystallform und zu den optischen Axen. [Mit Beer]. Bd. 81 (1850).
14. Ueber die diamagnetischen Axen der Krystalle und ihre Beziehung zur Krystallform und den optischen Axen. [Mit Beer]. Bd. 82 (1851).
15. Ueber das magnetische Verhalten der Gase. I. Bd. 83 (1851).
16. Numerische Vergleichung des Magnetismus des Sauerstoffgases und des Magnetismus des Eisens. Bd. 83 (1851).
17. Ueber die magnetische Polarität und Coërcitivkraft der Gase. Bd. 83 (1851).
18. Ueber Fessel's electromagnetischen Motor. Bd. 83 (1851).
19. Ueber das magnetische Verhalten der Gase. II. Bd. 84 (1851).
20. Ueber die Theorie des Diamagnetismus, die Erklärung des Ueberganges magnetischen Verhaltens in diamagnetisches, und mathematische Begründung der bei Krystallen beobachteten Erscheinungen. Bd. 86 (1852).
21. Studien über Thermometrie u. verwandte Gegenstände [mit Geissler]. Bd. 86 (1852).
22. Ueber die Reciprocität der electromagnetischen und magnetelectrischen Erscheinungen. Bd. 87 (1852).
23. Ueber die Fessel'sche Rotationsmaschine (mit Nachtrag). Bd. 90 (1853).
24. Ueber das Gesetz der Induction bei paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen. Bd. 91 (1854).
25. Untersuchungen über Dämpfe und Dampfgemenge. Bd. 92 (1854).
26. Beiträge zur näheren Kenntniss der sogenannten Coercitivkraft. Bd. 94 (1855).
27. Ueber die Einwirkung des Magnets auf die electrischen Entladungen in verdünnten Gasen. I, II. Bd. 103 (1858).
28. Fortgesetzte Beobachtungen über die electrische Entladung durch gasverdünnte Räume. Bd. 104 (1858).
29. Ueber einen neuen Gesichtspunkt, die Einwirkung des Magnets auf den elektrischen Strom betreffend. Bd. 104 (1858).
30. Fortgesetzte Beobachtungen über die elektrische Entladung. Bd. 105 (1858).
31. Fortgesetzte Beobachtungen über die elektrische Entladung durch gasverdünnte Räume. Bd. 107 (1859).
32. Ueber die Constitution der electrischen Spectra der verschiedenen Gase und Dämpfe (mit Nachtrag) Bd. 107 (1859).
33. Das magnetische Verhalten der verschiedenen Glimmer und seine Beziehung zum optischen Verhalten derselben. Bd. 110 (1860).
34. Ueber die Einwirkung des Magnets auf die electrische Entladung. Bd. 113 (1861).

35. Ueber recurrente Ströme und ihre Anwendung zur Darstellung von Gasspectren. Bd. 116 (1862).

II. *In den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*

1. Rapport entre les propriétés optiques et les propriétés magnétiques de certains cristaux. T. XXIV (1847).
2. Action calorifique d'un courant électrique. T. XXVI (1848).
3. Note sur un grand nombre de faits nouveaux de magnétisme et de diamagnétisme. T. XXVIII, XXIX (1849).
4. Sur le magnétisme des gaz. T. XXXIII (1851). [Brief an Arago].
5. Analyse de divers Mémoires sur l'électricité. T. XXXVI (1853). [Brief an Arago].

III. *Im Philosophical Magazine.*

1. On diamagnetism [Brief an Faraday]. Ser. 3, V. 33 (1848).
2. On the magnetic relations of the positive and negative optic axes of crystalls [Brief an Faraday]. V. 34 (1849).
3. On M. Boutigny's recent experiment [aus Poggendorffs Ann]. V. 36 (1850).
4. On the magnetic axes of crystalls [mit Beer. Aus Pogg. Ann.]. Ser. 4, V. 1 (1851).
5. On the magnetisme of gases [Brief an Arago]. V. II (1851).
6. On the electromagnetic motor of Fessel. V. III (1852).
7. On the nature of the so called coercive force [aus Pogg. Ann.]. V. IX (1854).
8. On the magnetic induction of crystals. V. XIV (1857).
9. On the action of the magnet upon electrical discharge in rarefied gases. [Aus Poggendorff]. V. XVI (1858).
10. Observations on the electrical discharge through rarefied gases. [Aus Poggendorff]. V. XVI (1858).
11. Observations on the electric discharge. I, II. [Aus Poggend.] V. XVIII (1859).
12. On the spectra of ignited gases and vapours with especial regard to the different spectra of the same elementary gaseous substance. [mit Hittorf]. V. XXVIII (1864).

IV. *In den Philosophical Transactions.*

1. On the magnetic induction of Crystals. 1858. p. I.
2. On the Spectra of Ignited Gases and Vapours, with especial regard to the different Spectra of the same elementary gaseous substance [mit Hittorf]. 1865. p. I, II.

V. *Einzelne Veröffentlichungen.*

1. Enumeratio novorum phaenomenorum in doctrina de magnetismo inventorum. (Bonnae 1849. Universitätsschrift).
2. De crystallorum et gazorum conditione magnetica (Bonnae 1850, Universitätsschr.).

3. Sur la refraction conique (Moigno's Répertoire d'Optique moderne).
4. Sur les spectres des ordres différents (Moigno's les Mondes. T. IV (1864)).
5. Ueber farbige Ringe in Kalkspathen etc. Bericht über einen Vortrag (gehalten im Niederrheinischen Verein für Natur- und Heilkunde zu Bonn 1865).