

Zur Verwendung der Drehwage von Eötvös bei nahen großen Massen

Von

Karl Mader

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. März 1924)

Bei der Eötvös'schen Drehwage erster Art trägt der an einem dünnen Platindraht hängende, 40 *cm* lange, horizontale Wagebalken an jedem Ende je ein Platingewicht. Die beiden Schwerpunkte liegen je 20 *cm* von der Balkenmitte entfernt. Hier ist die Balkenmitte, als Schwerpunkt des Systems, der Punkt, für den die Feldgrößen $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ — $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ermittelt werden, die aus den Beobachtungen mit der Wage folgen. Dabei bedeuten *x* und *y* rechtwinklige Koordinaten in dem Horizont durch den Schwerpunkt, *V* das Potential der Schwerkraft der Massen außerhalb der Wage.

Hier ist Koordinatenanfangspunkt gleich Balkenmitte. Das Drehmoment,¹ welches das Schwerfeld auf den Balken ausübt, ist dann bekanntlich durch jene beiden Feldgrößen bestimmt.

Wichtiger ist die Eötvös'sche Drehwage zweiter Art. Bei ihr ist das eine der beiden Platingewichte um etwa 60 *cm* tiefer aufgehängt, so daß die zwei Gewichte sich jetzt in zwei verschiedenen Gleichgewichtsflächen befinden.

Im Ausdruck für das Drehmoment¹ des Gehänges treten zu den beiden obigen Feldgrößen nun noch $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ hinzu, wo *z* die positiv nach abwärts gerichtete dritte Raumkoordinate ist.

Diese vier Größen werden von der Wage für den Schwerpunkt des neuen Systems ermittelt und als solcher hat in genügender Näherung der Schwerpunkt aus den beiden gleichen Platingewichten zu gelten; er liegt sehr nahe in der Verlängerung des tordierenden Fadens und etwa 30 *cm* unter der Balkenmitte.

¹ Eötvös, Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Annalen der Physik, 1896, auch Verhandl. d. XV., XVI. und XVII., Konferenz der Intern. Erdmessung.

Eggert, Theorie und Anwendung der Drehwage von Eötvös. Zeitschr. für Vermessungswesen. Stuttgart, 1913.

Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde. III. Bd., Stuttgart, 1916, 1923.

Prey, Einführung in die Geophysik. Berlin, Springer, 1922.

Auf diesen Unterschied der beiden Schwerpunktslagen bei den zwei Wagetypen wird nicht immer deutlich genug geachtet. Er beeinflusst zwar das Endergebnis der Herleitung der Formel für das Drehmoment der Wage zweiter Art nicht, sofern die Entwicklung nur bis zu den zweiten Ableitungen des Potentials durchgeführt wird; er ist aber nicht gleichgültig beim Ansatz zur Geländereduktion, weil dann für die Wirkung von Massen in der nächsten Umgebung der Wage ein Höhenunterschied von 30 cm nicht übersehen werden darf, da die Höhe des Koordinatenanfangspunktes als Bezugspunktes der Wage explizit in die Formeln eingeht.

Der Unterschied ist auch nicht mehr gleichgültig, wenn höhere als die zweiten Ableitungen des Potentials mitberücksichtigt werden.

In den Verhandlungen der XV. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung gibt Eötvös eine Anleitung, wie die im freien, flachen Feld angestellten Beobachtungen am einfachsten auf normales, horizontales Gelände reduziert werden können. Die Umgebung der Wage wird in einem Umkreis ρ_0 vollkommen eben gemacht und die Neigung dieser kreisförmigen Ebene nach Norden und Osten (X - und Y -Richtung) bestimmt. In der weiteren Entfernung ρ_1 werden in acht Punkten, die gleichmäßig um 45° voneinander abstehen, die Höhenunterschiede gegen die Höhe des Wagestandpunktes ermittelt, ebenso in einem weiteren Kreis ρ_2 usw.

In $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ wird das Hauptglied

$$\varepsilon^0 f^2 \vartheta \left\{ \pi \left[2 - \frac{(3\rho_0^2 + 2S^2)S}{(\sqrt{\rho_0^2 + S^2})^3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{16(2 - \sqrt{2})\rho_0 S}{(\rho_1 - \rho_0)\pi} \left[\frac{1}{(\sqrt{\rho_1^2 + S^2})^3} \left(3\rho_1^2 + 2S^2 + \frac{\rho_1^4}{S^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(\sqrt{\rho_0^2 + S^2})^3} \left(3\rho_0^2 + 2S^2 + \frac{\rho_1 \rho_0^3}{S^2} \right) \right] \right\}$$

Dabei ist

ε^0 die Neigung des innersten Kreises nach Norden, in Graden gemessen,

$f^2 = 66 \cdot 5 \cdot 10^{-9}$ die Gravitationskonstante,

ϑ die Dichte der obersten Erdschicht und

S die Höhe des Koordinatenursprungs der Wage über dem Erdboden.

Sei nun

$$\rho_0 = \frac{10}{3} \text{ m}, \quad \rho_1 = 10 \text{ m},$$

dann wird der Ausdruck gleich

$$5 \cdot 424 \cdot 10^{-9} \epsilon^0 \vartheta$$

für die Schwerpunkthöhe $S = 86 \text{ cm}$ und gleich

$$4 \cdot 814 \cdot 10^{-9} \epsilon^0 \vartheta$$

für einen Punkt in 117 cm Höhe (Mitte des Wagebalkens).

Sei ferner

$$\vartheta = 1 \text{ 8 und } \epsilon^0 = 5^0,$$

dann beträgt der Unterschied, je nachdem man die Reduktion auf einen Punkt in 86 oder 117 cm Höhe vornimmt, schon

$$5 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \text{ cgs Einheiten,}$$

während die Angabe der Wage unter günstigen Verhältnissen eine Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-9}$ hat.

Im Auftrage des Herrn Professor Schumann habe ich es unternommen, durch ein Experiment den Nachweis zu führen, daß der Bezugspunkt bei der Wage zweiter Art der Schwerpunkt der beiden Platingewichte ist und daß die Wage die Werte, welche die vier Feldgrößen in diesem Punkt annehmen, ermittelt und nicht auf die Balkenmitte bezügliche Werte.

Beobachtet wurde im Pendelkeller des Observatoriums der Technischen Hochschule in Wien mit derselben Drehwage, mit der Eötvös seine ersten Messungen auf dem Eis des Balatonsees durchgeführt hat und die auch zu den Feldmessungen im Wiener Becken während der Jahre 1919, 1920 und 1921 gedient hat.¹

Eine Drehwage zweiter Art mit einfachem Gehänge stehe auf horizontalem Boden, die Schwerpunkthöhe sei 86 cm , das Koordinatensystem sei in den Schwerpunkt verlegt, X nach Nord Y nach Ost, z nach abwärts positiv.

Neben der Wage wurde zunächst aus Ziegelsteinen ein Prisma mit quadratischem, später mit rechteckigem Grundriß gebaut; seine Lage ist in folgender Figur ersichtlich. Ist $f^2 = 66 \cdot 5 \cdot 10^{-9}$ die Gravitationskonstante und ϑ die Dichte der Ziegel, so werden für ein Prisma, das sich von $z = 0$ bis $z = z$ nach abwärts erstreckt, die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials, bezogen auf den Koordinatenanfangspunkt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} +$$

Anzeiger der Wiener Akad. d. Wiss. 1920 und 1921.

Schumann, Vorläufige Ergebnisse aus Scherewagen-Messungen. Österr. Monatsschrift für den öffentlichen Baudienst und das Berg- und Hüttenwesen. 1920, Heft 5 u. 6, 1921, Heft 7

»Bergbau und Hütte«, 1920, Heft 1.

»Berg- und hüttenmännisches Jahrbuch«, Leoben, 1923.

$$+ 3 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}.$$

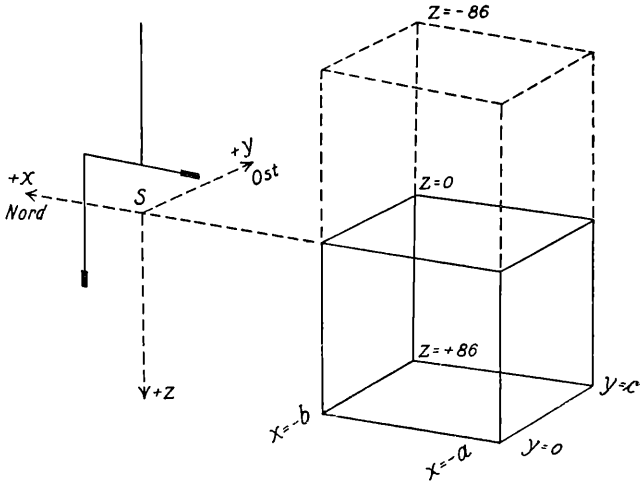


Fig. 1.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 3 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot xz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 3 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot yz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5}.$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ wird erhalten, indem man y^2 an Stelle von x^2 im Zähler

des Integranden von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ einführt.

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = & - f^2 \vartheta \left\{ \arctan \frac{az}{c\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}} - \right. \\ & \left. - \arctan \frac{bz}{c\sqrt{b^2 + c^2 + z^2}} - \arctan \frac{cz}{a\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \arctan \frac{cz}{b\sqrt{b^2+c^2+z^2}} \left. \right\}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = f^2 \vartheta \log \operatorname{nat} \frac{(z + \sqrt{z^2 + b^2 + c^2})(z + \sqrt{a^2 + z^2}) \sqrt{a^2 + c^2} b}{(z + \sqrt{z^2 + a^2 + c^2})(z + \sqrt{b^2 + z^2}) \sqrt{b^2 + c^2} a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = f^2 \vartheta \log \operatorname{nat} \frac{(c + \sqrt{b^2 + c^2 + z^2})(c + \sqrt{a^2 + c^2}) \sqrt{a^2 + z^2} b}{(c + \sqrt{a^2 + c^2 + z^2})(c + \sqrt{b^2 + c^2}) \sqrt{b^2 + z^2} a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = f^2 \vartheta \log \operatorname{nat} \frac{(a + \sqrt{a^2 + c^2 + z^2})(b + \sqrt{b^2 + c^2})(b + \sqrt{b^2 + z^2}) a}{(b + \sqrt{b^2 + c^2 + z^2})(a + \sqrt{a^2 + c^2})(a + \sqrt{a^2 + z^2}) b}$$

Auf dieses Prisma werde ein zweites von gleicher Größe und Form aufgesetzt. Die Wirkung des zweiten wird erhalten, indem man in obigen Formeln die Integration nach z von $-z$ bis 0 ausführt. Für die beiden ersten Formeln ändert sich im Schlußausdruck nichts,

$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ aber ändern ihr Vorzeichen.

Dieses Verhalten gibt die Möglichkeit, die Lage des Bezugspunktes der Wage festzustellen. Wenn man das Prisma allmählich höher baut, so müssen $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ zuerst wachsen bis zu

einem Maximalwert, der erreicht wird, sobald das Prisma die Höhe des Bezugspunktes erreicht; hierauf nehmen die zwei Feldgrößen wieder ab und werden zu Null, wenn die Höhe des Prismas gleich der doppelten Ursprungshöhe ist; überschreitet man noch diese Höhe, dann beginnen die zwei Größen bei entgegengesetztem Vorzeichen wieder zu wachsen.

Zu einem ersten Versuch wurde ein Prisma mit quadratischer Grundfläche neben der Wage bis zur Höhe 87·5 *cm* aufgebaut, hierauf durch weiteres Zulegen von Ziegeln bis zur Höhe 117 *cm* ergänzt. Durch $a = 200$ *cm*, $b = 100$ *cm*, $c = 100$ *cm* (Figur) war die Grundfläche bestimmt. Für beide Prismen wurden die vier Feldgrößen sowohl durch Beobachtung ermittelt, als auch nach obigen Formeln berechnet, unter den zwei Annahmen, daß

1. die Höhe des Anfangspunktes gleich der Höhe des Schwerpunktes der zwei Platingewichte, also gleich 86 *cm* sei, sodann
2. daß sie gleich der der Balkenmitte, nämlich 117 *cm* sei.

Die Werte sind in der folgenden Tabelle 1 zum Vergleich nebeneinandergestellt. Für die Berechnung eines Prismas von 87·5 *cm* Höhe wurden zwei mit den Abmessungen $z = 0$ bis $z = 86$ und $z = -15$ bis $z = 0$ kombiniert, ähnlich wurde für die übrigen Werte verfahren.

Für die Dichte der Ziegel ergab die Wägung 1·45 bis 1·48. Doch mußte der Rechnung ein kleinerer Wert zugrunde gelegt werden, da zwischen den Ziegeln des Prismas leere Zwischenräume blieben. Für alle Versuche ergab sich die beste Übereinstimmung zwischen gerechneten und beobachteten Werten der Feldgrößen, wenn der Rechnung $\vartheta = 1·41$ zugrunde gelegt wurde.¹ Alle Werte dieser und der folgenden Tabellen sind mit 10^{-9} zu multiplizieren, um *cgs*-Einheiten zu erhalten.

Tabelle 1.

1	2	3	4	5	6
Höhe des Prismas in <i>cm</i>	Feldgrößen	Beobachtete Werte	Werte, berechnet für die Aufpunkthöhe		Aufpunkthöhe 117 <i>cm</i> . Berechnete Werte mit Berücksichtigung der Glieder 3. Ordnung
			86 <i>cm</i>	117 <i>cm</i>	
87·5	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	— 42·0	— 42·7	— 30·9	— 16·5
	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$	— 16·4	— 15·4	— 11·3	— 6·2
	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$	— 12·9	— 13·6	— 17·2	— 22·7
	$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$	+ 3·91	+ 4·4	+ 5·6	+ 7·4
117	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	— 51·9	— 60·4	— 48·7	— 36·5
	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$	— 20·8	— 21·8	— 17·7	— 13·4
	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$	— 9·3	— 11·1	— 19·5	— 20·3
	$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$	+ 3·88	+ 3·6	+ 6·3	+ 6·6

¹ Über Dichtebestimmung mit Hilfe der Drehwaage (insbesondere Bestimmung der mittleren Dichte der Erde) siehe Oppenheim, Kritik des Newton'schen Gravitationsgesetzes. *Enz. d. math. Wiss.*, VI 2, 22.

Der Inhalt der 6. Spalte wird erst später behandelt.

Die Übereinstimmung der beobachteten mit den für die Ursprungshöhe 86 cm gerechneten Werten ist gut bis auf den einen Wert $-51\cdot9$ und $-60\cdot4$ von $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ in der 5. Zeile der 3. und 4. Spalte. Zunächst ist zu erwähnen, daß diese Abweichung für unsere Untersuchung weniger wichtig ist, da die Entscheidung bei $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ liegt.

Die Ursache dieser einen großen Abweichung kann darin liegen, daß $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ erfahrungsgemäß eine größere Empfindlichkeit gegenüber Störungen aufweisen, als die beiden anderen Größen; für die beiden letzteren kann man einen mittleren Fehler von $\pm 1 \cdot 10^{-9}$ ansetzen, für die zwei ersten ein Vielfaches hiervon.

Dazu kommt noch, daß im Keller neben dem Pendelkeller fast täglich Kohlen zu- und weggeführt werden, was auch während der Messungen geschah. Diese veränderlichen Massen liegen in etwa 6 m Entfernung im Horizont des Wageschwerpunktes und wirken daher verhältnismäßig stark auf die zwei ersten Feldgrößen.

Um ein genaueres Bild von der Veränderlichkeit, beziehungsweise Konstanz dieser Feldgrößen zu geben, sind die Resultate einiger Messungen mitgeteilt, die ohne Ziegelprisma auf demselben Platze vor und nach den in dieser Arbeit behandelten Versuchen gemacht wurden. Sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Der erste Koeffizient schwankt am stärksten; der zweite zeigt hier wie auch bei den späteren Versuchen eine merkliche Konstanz, die nur noch vom vierten übertroffen wird. Die Schwankung in $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ist von derselben Größe wie die eine Abweichung in

Tabelle 1.

Tabelle 2.

Vor den Sommermessungen im Wiener Becken:

Datum	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$	$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$
1921 Juni 27	- 191·9	+ 130·5	- 105·8	- 48·1
Juni 29.	- 204·4	+ 130·5	- 108·5	- 48·9
Juli 4.	- 205·2	+ 130·7	- 108·7	- 48·8
Nach den Sommermessungen:				
1921 Oktober 22.	- 197·0	+ 130·2	- 107·7	- 49·2
November 20.	- 202·3	+ 129·6	- 109·3	- 49·2
Dezember 23.	- 203·7	+ 130·5	- 108·7	- 49·3

Zwischen Oktober 22 und November 20 haben die Messungen mit den Ziegelprismen stattgefunden.

Betrachten wir in Tabelle 1, Spalte 3 und 4, die Werte für $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$. Die Beobachtung ergibt in Übereinstimmung mit der für Anfangspunkt in 86 *cm* Höhe durchgeführten Rechnung für das 87·5 *cm* hohe Prisma größere Werte als für das 117 *cm* hohe.

Spalte 5 enthält die mit einer Ursprungshöhe 117 *cm* durchgeführte Rechnung, welche für das 117 *cm* hohe Prisma größere Werte als für das 87·5 *cm* hohe liefert, im Gegensatz zur Beobachtung. Die Annahme, die Wage messe die Feldgrößen für einen Punkt in Balkenhöhe, steht daher im Widerspruch mit der Beobachtung.

Bei $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ treten die Unterschiede nicht deutlich genug hervor, sie liegen an der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit. Um sie mehr sichtbar zu machen, wurde für die weiteren Versuche ein rechteckiger Grundriß der Prismen gewählt, der durch $a = 185$, $b = 100$, $c = 100$ (Figur) charakterisiert ist. Durch diese Verkürzung des Prismas in der *X*-Richtung wird der dominierende Einfluß von $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ gegenüber $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ abgeschwächt, so daß auch die Änderungen der letzteren Größe deutlicher werden.

Um die gesuchte Maximalstelle bei der Prismenhöhe 86 *cm* gut ersichtlich zu machen, wurde in einer neuen Versuchsreihe die Höhe des Ziegelbaus achtmal variiert. Für die acht Prismen wurden die vier Feldgrößen sowohl mit der Wage beobachtet, als auch unter der Annahme

$$\text{Ursprungshöhe} = \text{Schwerpunktshöhe} = 86 \text{ cm}$$

berechnet. Die Werte sind in Tabelle 3 eingetragen.

Von den Unterschieden Rechnung minus Beobachtung liegen

22	zwischen 0·0 und 0·9·10 ⁻⁹	
7	1·0	1·9
2	2·0	2·9
1	über 3·0	

Für die einzelnen vier Feldgrößen ist die Wurzel aus dem Mittel der Quadrate der Abweichungen $\pm 1·7$, $\pm 0·9$, $\pm 1·1$ und $\pm 0·5 \cdot 10^{-9}$, also ein befriedigendes Zeichen für die Verlässlichkeit der Reihe. Eine solche Übereinstimmung wurde kaum erwartet, da ein Prisma aus losen Ziegeln keinen homogenen Bau darstellt, wie er der Rechnung zugrunde liegt. Warum trotz der Nähe der Masse keine Abweichungen von Bedeutung auftreten können, wird später erörtert.

Tabelle 3.

Höhe des Prismas in <i>cm</i>	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$		$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$		$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$		$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$		$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
	61	-27.4	-24.2	-9.1	-9.0	-12.1	-11.2	+3.5	+3.7	
82	-35.6	-36.0	-13.6	-13.4	-12.8	-12.8	+4.4	+4.0		
88	-36.7	-39.5	-16.2	-14.7	-12.4	-12.8	+3.9	+4.2		
143	-67.0	-67.5	-25.7	-25.0	-6.0	-5.8	+1.6	+1.9		
169.5	-76.1	-76.1	-29.2	-28.2	-2.1	-0.5	-0.5	+0.2		
176	-77.1	-77.7	-29.7	-28.8	-0.3	+0.8	0.0	-0.3		
190	-81.0	-80.7	-31.3	-30.0	+2.1	+3.3	-0.5	-1.1		
203.5	-84.6	-83.0	-31.5	-30.9	+3.6	+5.6	-1.3	-1.9		

Aus den vier letzten Spalten der Tabelle 3 erkennt man deutlich eine Maximalstelle zwischen 82 und 88 *cm* und eine Nullstelle bei 172 *cm* = 2 × 86 *cm*. Keinesfalls kann eine Maximalstelle bei 117 *cm* und eine Nullstelle von $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ bei 234 *cm* angenommen werden, wie es sein müßte, wenn der Bezugspunkt in der Höhe des Wagebalkens zu suchen wäre.

Die Messungen mit der Drehwaage von Eötvös ergeben daher diejenigen Werte der vier Größen des Schwerfeldes, welche sie im Schwerpunkt der Wage annehmen.

Es ist noch zu beweisen, daß alle Größen, welche im obigen vernachlässigt wurden, wirklich unmerklich sind. Eötvös hat die Formel für das Drehmoment, welches das Kraftfeld der äußeren Massen auf die Wage ausübt, abgeleitet unter der Voraussetzung, daß das Kraftfeld ein lineares sei, daß also alle Größen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$$

usw. verschwindend klein bleiben und keinen Einfluß auf die Messungsergebnisse haben.

Bei den hier besprochenen Versuchen, wo eine verhältnismäßig große Masse der Wage sehr nahe kommt, ist daher zu untersuchen, ob die Voraussetzung des linearen Kraftfeldes noch zutrifft, beziehungsweise ob der Einfluß der möglicherweise nicht mehr sehr kleinen dritten Ableitungen des Potentials unwirksam ist. Diese Untersuchung wird eine zweite Entscheidung zwischen der Annahme des Anfangspunktes in der Höhe des Schwerpunktes und der in Höhe der Balkenmitte ermöglichen.

Zuerst werden die dritten Ableitungen des Potentials eines Ziegelprismas von der angegebenen Lage berechnet. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} &= 9 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} - \\ &- 15 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot x^3}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^7} = f^2 \vartheta \left(\frac{z}{c} \left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2 + z^2}}{z^2 + b^2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}}{z^2 + a^2} - \frac{b^2}{(b^2 + c^2)\sqrt{b^2 + c^2 + z^2}} + \frac{a^2}{(a^2 + c^2)\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} &= 3 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} - \\ &- 15 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot x^2 y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^7} = f^2 \vartheta z \left(\frac{b}{(b^2 + c^2)\sqrt{b^2 + c^2 + z^2}} - \right. \\ &\left. - \frac{a}{(a^2 + c^2)\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}} - \frac{1}{b\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{1}{a\sqrt{a^2 + z^2}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z} &= -15 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot xy z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^7} = \\ &= f^2 \vartheta \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right\}. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise berechnet man leicht die sieben übrigen. Zwischen neun der zehn dritten Ableitungen bestehen drei lineare Gleichungen, es müssen die Ableitungen der Laplace'schen Gleichung nach x , y und z gleich Null sein.

Die Werte der dritten Ableitungen sind in Tabelle 4 eingetragen. Sie wurden berechnet mit $\vartheta = 1.41$,

Höhe des Koordinatenanfangs = Schwerpunkthöhe = 86 cm,

$a = 185$ cm, $b = c = 100$ cm,

für dieselben acht Prismen wie in Tabelle 3 von 61 cm, 82 cm usw.

Tabelle 4.

Höhe des Prismas in <i>cm</i>	$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial z^2}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial y \partial z^2}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial z}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial z}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}$	$\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z}$
61	+ 0.180	— 0.107	— 0.073	— 0.178	+ 0.153	+ 0.026	— 0.237	+ 0.043	+ 0.194	+ 0.100
82	+ 0.328	— 0.154	— 0.174	— 0.282	+ 0.224	+ 0.058	— 0.279	+ 0.048	+ 0.230	+ 0.116
86	+ 0.358	— 0.163	— 0.195	— 0.303	+ 0.238	+ 0.065	— 0.280	+ 0.049	+ 0.231	+ 0.116
88	+ 0.373	— 0.168	— 0.205	— 0.313	+ 0.245	+ 0.068	— 0.280	+ 0.049	+ 0.231	+ 0.116
143	+ 0.677	— 0.283	— 0.394	— 0.545	+ 0.415	+ 0.130	— 0.109	+ 0.024	+ 0.086	+ 0.048
169.5	+ 0.715	— 0.323	— 0.392	— 0.601	+ 0.471	+ 0.130	— 0.008	+ 0.002	+ 0.006	+ 0.004
176	+ 0.717	— 0.332	— 0.386	— 0.611	+ 0.483	+ 0.128	+ 0.012	— 0.003	— 0.009	0.006
190	+ 0.716	— 0.347	— 0.369	— 0.626	+ 0.503	+ 0.123	+ 0.050	— 0.015	— 0.035	— 0.024
203.5	+ 0.711	— 0.360	— 0.351	— 0.637	+ 0.519	+ 0.117	+ 0.078	— 0.025	— 0.053	— 0.038

bis 203.5 *cm* Höhe. Überdies ist noch ein 86 *cm* hohes mitgenommen. Alle Werte sind mit 10^{-9} zu multiplizieren.

Die dritten Ableitungen reichen an $1 \cdot 10^{-9}$ heran.

Sie müssen möglicherweise berücksichtigt werden. Auf keinen Fall aber brauchen die vierten Ableitungen mitgenommen zu werden. Zur Feststellung ihrer Größenordnung genügt es, eine zu berechnen. Es ist z. B.:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x \partial y \partial z^2} = -15 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot xy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^7} + 105 f^2 \vartheta \int_{-a}^{-b} dx \int_0^c dy \int_0^z \frac{dz \cdot xy \cdot z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^9} = f^2 \vartheta \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{b^2 + c^2 + z^2})^3} + \right.$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{a^2+c^2+z^2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{b^2+z^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{a^2+z^2})^3} \Big\} = + 0 \cdot 172 \cdot 10^{-13},$$

wenn $a = 185$, $b = c = 100$, $z = 86 \text{ cm}$, $\vartheta = 1 \cdot 41$ ist.

Um den Einfluß der dritten Ableitungen auf die Beobachtungen zu erhalten, muß das Drehmoment um eine Ordnung weiterentwickelt werden. Wieder zähle X nach Norden, Y nach Osten positiv. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Schwerpunkt der zwei Platingewichte. Dann sind in irgendeinem Punkte x, y, z des Kraftfeldes die Kraftkomponenten X und Y gegeben durch die Ableitungen im Ursprung:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial X}{\partial y} + z \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + xz \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} + yz \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \\ Y &= Y_0 + x \frac{\partial Y}{\partial x} + y \frac{\partial Y}{\partial y} + z \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + xz \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} + yz \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial z} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Da im Ursprung nur eine in der Z -Richtung wirkende Kraft vorhanden ist, wird $X_0 = Y_0 = 0$. Ferner ist $X = \frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$ usw. Das auf die Wage ausgeübte Drehmoment wird gleich

$$\begin{aligned} \int (Yx - Xy) dm &= \int dm \left\{ (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + xy \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \right. \\ &\quad + xz \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - yz \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \left(\frac{x^3}{2} - xy^2 \right) \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + \left(x^2y - \frac{y^3}{2} \right) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \\ &\quad + \frac{xy^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} - \frac{yx^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + z(x^2 - y^2) \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z} + xy^2 \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial z} \right) + \frac{xz^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial z^2} - \frac{yz^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial z^2} \Big\}. \end{aligned}$$

Die Integration ist über das Gehänge der Wage auszuführen. Man führt daher ein Koordinatensystem ein, das mit dem Wagebalken festverbunden bleibt. Es falle ξ in die Längs-, η in die Querrichtung des Wagebalkens, α sei das Azimut der ξ -Achse. Dann wird

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\y' &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \\z &= \zeta\end{aligned}$$

Ist τ der Torsionsmodul des Platindrahtes und ϵ der Winkel, um den die Feldkräfte den Balken aus der Ruhelage herausgedreht haben, dann ist bekanntlich das Drehmoment

$$\begin{aligned}\tau \epsilon &= \frac{k \sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + k \cos 2\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - h l M \sin \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \\&+ h l M \cos \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \text{Glieder dritter Ordnung.}\end{aligned}$$

$k = \int dm (\xi^2 + \eta^2)$ ist hierbei das Trägheitsmoment des Gehänges und wird statt $\int dm (\xi^2 - \eta^2)$ eingeführt, wobei für die vorliegende Waage der Unterschied nur $\frac{k}{10.000}$ beträgt.

k selbst ist gleich 21700.

Es bedeutet

$M = 25 \cdot 42 \text{ g}$ die Masse eines Platingewichtes,

$l = 20 \text{ cm}$ den Abstand der Platingewichte von der Balkenmitte,

$h = 63 \cdot 4 \text{ cm}$ den Abstand des hängenden Platingewichtes vom Balken,

dann wird

$$\int \xi \zeta dm = h l M = 32207,$$

unabhängig davon, ob man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt der Waage oder in die Balkenmitte verlegt.

Wegen der Kleinheit der dritten Ableitungen, die bei unserem Versuch kleiner als $1 \cdot 10^{-9}$ bleiben, sind nur jene Koeffizienten beizubehalten, die größer als das Trägheitsmoment k oder als $h l M$ sind, sobald keine größere Genauigkeit als eine halbe Einheit der neunten Dezimalstelle angestrebt wird.

Die Koeffizienten der dritten Ableitungen sind die Integrale

$$\begin{aligned}&\int \xi^3 dm, \int \eta^3 dm, \int \xi^2 \eta dm, \int \xi \eta^2 dm, \int \xi \zeta^2 dm, \int \eta \zeta^2 dm, \int \zeta (\xi^2 - \eta^2) dm \\&\text{und } \int \xi \eta \zeta dm.\end{aligned}$$

Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Schwerpunkt der Wage. Wegen des symmetrischen Baus der Wage ist $\int \eta^3 dm = 0$ und jedes Integral $\int \eta dm = 0$.

Für die zwei zylindrischen Platingewichte ist auch $\int \xi \eta^2 dm = 0$.

Ist $r = 0.25 \text{ cm}$ der Radius eines Platinzylinders,
 $\lambda = 6 \text{ cm}$ seine Länge,

dann erhält man

$$\int \xi^3 dm = \frac{Ml}{4} (3r^2 - \lambda^2) = -4580,$$

also ungefähr gleich $\frac{k}{5}$.

Das Integral kann in der Entwicklung des Drehmoments vernachlässigt werden. Dasselbe gilt für die zwei noch übrigbleibenden Integrale

$$\int \zeta (\xi^2 - \eta^2) dm = \frac{hM}{24} (3r^2 - \lambda^2) = -2300 = \frac{k}{10}$$

und

$$\int \xi \zeta^2 dm = \frac{Ml}{12} (\lambda^2 - 3r^2) = 1530 = \frac{k}{14}.$$

Die Koeffizienten der dritten Ableitungen des Potentials erreichen in der Formel für das Drehmoment höchstens den fünften Teil des Betrages der Koeffizienten der zweiten Ableitungen. Wenn die dritten Ableitungen $1 \cdot 10^{-9}$ nicht überschreiten, so kann ihr Einfluß auf die Berechnung der Glieder zweiter Ordnung höchstens $0.2 \cdot 10^{-9}$ gleichkommen.

Wird keine größere Genauigkeit als $0.5 \cdot 10^{-9}$ in den zweiten Ableitungen angestrebt, dann brauchen die dritten Ableitungen des Potentials auch sehr naher großer Massen nicht in Betracht gezogen zu werden.

Das Kraftfeld bleibt linear und die für ein solches von Eötvös aufgestellte Formel bleibt allgemein gültig.

Verfolgt man die Annahme, daß der Bezugspunkt der Wage nicht der Schwerpunkt, sondern die Balkenmitte wäre, so ist der Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des Wagbalkens zu verlegen.

Alles, was über die Integrale $\int \xi^3 dm$ und $\int \xi \eta^2 dm$ bei der Annahme: »Bezugspunkt gleich Schwerpunkt« gesagt wurde, bleibt hier unverändert gültig, dagegen nehmen die zwei Integrale $\int \zeta (\xi^2 - \eta^2) dm$ und $\int \xi \zeta^2 dm$ jetzt einen andern Wert an.

Es wird $\int \zeta (\xi^2 - \eta^2) dm$

sehr nahe gleich $h M l^2 = \frac{h k}{2}$, also etwa $30 k$

und

$$\frac{1}{2} \int \xi \zeta^2 dm = \frac{M l}{2} \left(h^2 + \frac{\lambda^2}{12} - \frac{r^2}{4} \right) \doteq \frac{1}{2} M l h^2,$$

also ungefähr $30 h l M$ oder $45 k$.

Beide Integrale dürfen hier nicht vernachlässigt werden, sie verdreifachen mindestens den Einfluß von Gliedern dritter Ordnung.

Würde der Bezugspunkt der Wage in der Balkenmitte liegen, dann wäre für das Drehmoment folgende Entwicklung anzusetzen:

$$\begin{aligned} \tau \varepsilon = & \frac{k \sin 2 \alpha}{2} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial z} \right) \right\} + \\ & + k \cos 2 \alpha \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial z} \right\} \\ & - M h l \sin \alpha \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{h}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial z^2} \right\} \\ & + M h l \cos \alpha \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{h}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

In diesem Falle würden die Beobachtungen mit der Wage nicht die vier Feldgrößen selbst ergeben, sondern die obigen Klammerausdrücke oder, symbolisch geschrieben, die mit $\left(1 + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right)$ multiplizierten Feldgrößen zweiter Ordnung.

Die Werte dieser vier Klammerausdrücke sind unter der Annahme: Bezugspunkt gleich Balkenmitte, für die zwei Prismen mit quadratischer Grundfläche und den Höhen 87.5 und 117 cm berechnet und in der Spalte 6 der Tabelle 1 eingetragen.

Sie stehen in noch größerem Widerspruch mit den Beobachtungen als die Werte der Spalte 5, die nur für die Ableitungen zweiter Ordnung errechnet wurden. Die Annahme, der Bezugspunkt der Schwerewage zweiter Art liege in der Balkenmitte, steht somit auf mehrfache Weise im Widerspruch mit der Beobachtung.

Es kann daher das Resultat ausgesprochen werden:

1. Aus den Beobachtungen mit der Eötvös'schen Drehwage zweiter Art werden jene Werte der vier Feldgrößen erhalten, welche

sie im Schwerpunkt der beiden Platingewichte annehmen; dieser liegt in unserem Falle etwa 31 *cm* unter der Balkenmitte. Auf diesen Punkt ist die Geländereduktion zu beziehen.

2. Die von Eötvös unter Annahme eines linearen Kraftfeldes abgeleitete Formel für das Drehmoment, welches die Kräfte des Schwerefeldes auf das Gehänge der Waage ausüben, bleibt auch bei sehr nahen großen Massen genau.

Wenn alle Reduktionen auf den Schwerpunkt der Waage durchgeführt werden, so sind alle Vernachlässigungen kleiner als $1 \cdot 10^{-9}$.

•

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1924

Band/Volume: [133_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Mader Karl

Artikel/Article: [Zur Verwendung der Drehwage von Eötvös bei nahen großen
Massen. 117-132](#)