1 Entartung, lexikographische Simplexmethode

Definition 1:
Ein Basispunkt heißt *entartet*, wenn der Wert mindestens einer Basisvariablen Null ist.

			NBV
			x_ℓ
			$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
BV	x_k	$0 = d_{k0}$	$d_{k\ell}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Neuer Wert der Zielfunktion beim Wechsel $B \to \tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{\ell\}$ ist

$$d_{00} - d_{0\ell}\frac{\overbrace{d_{k0}}^{=0}}{d_{k\ell}} = d_{00}$$

(bis jetzt: Wenn $d_{k0} > 0$, so wächst die Zielfunktion)

Wenn das Element $d_{k\ell}$ das Pivotelement werden sollte, wird sich der Zielfunktionswert nicht ändern!

Daher müssen wir uns in diesem Fall mit der Frage der Endlichkeit des Algorithmus beschäftigen, denn es kann ja sein, daß wir in einen Zyklus geraten, wie das nächste Beispiel auch zeigt.

Was wissen wir über Basispunkte?

- Ein Basispunkt erfüllt die m Gleichungen von $Ax = b$ mit $x_j \geq 0$ und $j = 1 \dots m$ und die (n-m) Nicht-Basisvariablen sind Null, d.h. $x_j = 0$ für alle $j \in N$.
- In entarteten Basispunkten werden noch zusätzliche Basisvariablen $x_j = 0$, $j \in B$.

Es ist günstig für die Behandlung dieses Falls die *lange Form des Simplextableaus* zu benutzen.

Lange Form des Simplextableaus:

			BV					NBV				
			x_1	$\dots$	x_p	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n
		$d_{0,0}$						$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,q}$	$\dots$	$d_{0,m}$
	x_1	$d_{1,0}$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,q}$	$\dots$	$d_{1,m}$
	x_2	$d_{2,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,q}$	$\dots$	$d_{2,m}$
BV	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_p	$d_{p,0}$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$d_{p,m+1}$	$\dots$	$d_{p,q}$	$\dots$	$d_{p,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	$d_{m,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,q}$	$\dots$	$d_{m,m}$

Die Transformation des Simplextableaus für einen Simplexschritt läßt sich wieder ausrechnen:

Sei wieder d_{kl} das Pivotelement.

- Dann wird die k-te Zeile durch d_{kl} dividiert...

$$\tilde{z}_l = \frac{1}{d_{kl}} z_k$$

  (z_l ist die l-te Zeile, z_k ist die k-te Zeile).

- Alle übrigen Zeilen z_i werden ersetzt durch

$$\tilde{z}_i = z_i - \frac{d_{il}}{d_{kl}} z_k$$

  (Kreuzregel, $i \neq k$, $i = 0$ zugelassen für die charakteristische Zeile).

Nun einige Überlegungen bezüglich der Auswahl der Pivotzeile:

Sei $x \in R^n$, $x \neq 0_n$

Definition 2:
x heißt *lexikographisch positiv ($x \succ 0$)* , falls die erste von Null verschiedene Komponente von x positiv ist.

Formell:

$$x \succ 0 := \exists i(1 \leq i \leq n \wedge x_i > 0 \wedge \forall j(j < i \rightarrow x_j = 0))$$

Definition 3:
x heißt *lexikographisch negativ ($x \prec 0$)* , falls $-x \succ 0$.

Definition 4:
Sei die Relation $\succ$ (gesprochen: lexikographisch größer) definiert, wie folgt:

$$\succ: R^n \times R^n \text{mit } x \succ y \Leftrightarrow x - y \succ 0.$$

Bemerkung 1:

$\succ$ ist:

1. irreflexiv ($x \not\succ x$)
2. transitiv ($x \succ y \wedge y \succ z \rightarrow x \succ z$)
3. asymmetrisch ($x \succ y \rightarrow y \not\succ x$)
4. total ($\forall x \forall y(x \in R^n \wedge y \in R^n \rightarrow ((x \succ y) \vee (y \succ x)))$
5. $x \succ y \rightarrow \lambda x \succ \lambda y$ ($\lambda > 0$)

1. bis 4. bedeuten: irreflexive Ordnung.

Lexikographische Simplexmethode :

Wir definieren eine neue Regel für die Auswahl der Pivotzeile:

- Spalte l liegt fest (durch $d_{0l} < 0$).

  Wir betrachten $i \in B$ mit $d_{il} > 0$ (Menge B_+) und bilden $\frac{z_i}{d_{il}} = z_i'$.

- Offensichtlich unterscheiden sich die Zeilen z_i' und z_v' ($z_i' \neq z_v'$ für $i \neq v$, $i, v \in B$, weil die Zeilen z_i und z_v unterschiedlich sind, denn es gilt: $d_{ii} = z_{ii} = 1$ und $d_{vi} = z_{vi} = 0$.

- Unter den Zeilen z_i' gibt es folglich eine kleinste nach der lexikographischen Ordnung, diese sei z_k.

  Damit wird die k-te Zeile Pivotzeile, d.h.

  z_k' ist das lexikographische Minimum von den z_i', $i \in B_+$:

  $z_k' = \text{lexmin}\{z_i' \mid i \in B_+\}$

Bemerkung 2: Diese Vorschrift ist eine konsistente Erweiterung der gewöhnlichen Auswahlregel, denn $\frac{d_{i0}}{d_{il}} \geq \frac{d_{k0}}{d_{kl}}$ für alle $i \in B_+$.

Behauptung 1:

Seien alle Zeilen z_i ($i \in B$) lexikographisch positiv.
Dann sind nach der Simplextransformation alle Zeilen $\tilde{z}_i$, $i \in \tilde{B}$ ebenfalls lexikographisch positiv:

Beweis: Sei $\tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{l\}$.

- Für $l \in \tilde{B}$ ist klar, denn

$$\tilde{z}_l = \underbrace{\frac{1}{d_{kl}}}_{>0} \underbrace{z_k}_{\succ 0} \succ 0.$$

- Für $i \in \tilde{B}$, $i \neq l$ gilt:

$$\tilde{z}_i = z_i - \left(\frac{d_{il}}{d_{kl}}\right) z_k,$$

  wobei $d_{kl} > 0$ ist.

1. Fall $d_{il} \leq 0$, dann ist $-\frac{d_{il}}{d_{kl}} > 0$.

Die erste Komponente von z_k, die von Null verschieden ist, ist positiv, da $z_k \succ 0$. Folglich gilt:

$$\tilde{z}_i \succ z_i$$

und, da $z_i \succ 0$, auch:

$$\tilde{z}_i \succ 0$$

2. Fall $d_{il} > 0$, d.h. $i \in B_+$.

Dann ist $z_i' \succ z_k'$ nach der lexikographischen Auswahlregel. Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{z_i}{d_{il}}}_{=z_i'} \succ \underbrace{\frac{z_k}{d_{kl}}}_{=z_k'} \;|.d_{il} > 0$$

$$\underbrace{z_i - \frac{d_{il}}{d_{kl}} z_k}_{=\tilde{z}_i} \succ 0 \qquad \square$$

Behauptung 2 :

Die charakteristische Zeile im langen Tableau wächst lexikographisch.

Beweis:

$$\tilde{z}_0 = z_0 - \frac{\overbrace{d_{0l}}^{<0}}{\underbrace{d_{kl}}_{>0}} \underbrace{z_k}_{\succ 0} \succ z_0$$

□