Musterlösung 8

1. a) Sind x_0 und x_1 zwei verschiedene Punkte in X, dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 1$. Da X zusammenhängend ist, gilt $f(X) = [0,1]$, und daher $\#X \geq \mathfrak{c}$.

b) Da f stetig ist und da X zusammenhängend ist, muss $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sein. Da X abzählbar ist, ist das Intervall $f(X)$ abzählbar, also einpunktig.

2. a) Da Punkte abgeschlossen sind, ist jede endliche Menge abgeschlossen, also sicher nicht dicht.

b) Da $\{0\}$ dicht sein soll, muss 0 in jeder nichtleeren offenen Menge enthalten sein. Sei $\tau = \{U \subseteq \mathbb{N} : 0 \in U \text{ und } \mathbb{N} \smallsetminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

Zweites Beispiel: die offenen Mengen seien $\{0, 1, \ldots, n\}$, $n = 0, 1, \ldots$.

c) Eine abzählbar unendliche Menge D ist dicht in der cofiniten Topologie auf X, denn jede nichtleere offene Menge schneidet D.

3. a) Das Intervall $I = (a,b)$ ist regulär offen, denn $\operatorname{cl} I = [a,b]$ und $(\operatorname{cl} I)^\circ = I$.

Die Menge $M = (0,1) \cup (1,2)$ ist nicht regulär offen, denn $\operatorname{cl} M = [0,2]$, also $(\operatorname{cl} M)^\circ = (0,2) \supsetneqq M$.

b) Sei $U = F^\circ$ das Innere einer abgeschlossenen Menge. Dann ist $U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq F$, also $U \subseteq (\operatorname{cl} U)^\circ \subseteq F^\circ = U$, und U ist daher regulär offen.

c) Wegen $\bigcap \mathscr{H} \subseteq \operatorname{cl} \bigcap \mathscr{H}$ folgt

$$\left(\bigcap \mathscr{H}\right)^\circ \subseteq \left(\operatorname{cl} \bigcap \mathscr{H}\right)^\circ$$

Setze $U = \operatorname{cl} \bigcap \mathscr{H}$. Für $H \in \mathscr{H}$ ist $U \subseteq \operatorname{cl} H$, daher $U^\circ \subseteq (\operatorname{cl} H)^\circ = H$, und es folgt $U^\circ \subseteq \bigcap \mathscr{H}$, also $U^\circ = (\bigcap \mathscr{H})^\circ$.

Sind U_1 und U_2 regulär offen, dann erhalten wir mit $\mathscr{H} = \{U_1, U_2\}$, dass $U_1 \cap U_2 = (U_1 \cap U_2)^\circ = (\operatorname{cl}(U_1 \cap U_2))^\circ$ auch regulär offen ist.

d) Sei U eine offene Menge und $x \in U$. Da X regulär ist, gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$, und $W = (\operatorname{cl} V)^\circ \supseteq V$ ist eine regulär offene Menge mit $x \in W \subseteq U$.

Bitte wenden!

Bemerkung: Dass $\mathrm{RO}(X)$ eine Basis der Topologie von X ist, ist *nicht* äquivalent zur Regularität von X, sondern echt schwächer. Räume mit dieser Eigenschaft werden manchmal *semiregulär* genannt, und es gibt Beispiele von semiregulären Hausdorffräumen, die nicht regulär sind.

e) Sei $D \subseteq X$ dicht in X mit $\#D = d(X)$. Für jedes offene U ist $\operatorname{cl} U = \operatorname{cl}(U \cap D)$ und somit haben wir für regulär offenes U die Gleichheit $U = (\operatorname{cl}(U \cap D))^\circ$. Die Abbildung $A \mapsto (\operatorname{cl}(A))^\circ$ ist demnach eine Surjektion $\mathcal{P}(D) \to \mathrm{RO}(X)$. Die Abschätzung $\# \mathrm{RO}(X) \leq 2^{d(X)}$ folgt unmittelbar.

   Der zweite Teil folgt aus d) und dem soeben gezeigten: Da $\mathrm{RO}(X)$ eine Basis ist, gilt $w(X) \leq \# \mathrm{RO}(X) \leq 2^{d(X)}$. Dass $d(X) \leq w(X)$ ist, wurde in der Vorlesung bewiesen.

f) In $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist $d(\mathbb{R}) = w(\mathbb{R})$, und in $X = \mathbb{R}_S$ mit der Sorgenfrey-Topologie ist $d(X) = \#\mathbb{Q} = \omega$ und $w(X) = \mathfrak{c} = 2^\omega = 2^{d(X)}$ ($w(X) = \mathfrak{c}$ wurde in der Vorlesung gezeigt).

4. a) Per Definition ist $\mathcal{N}(\infty) = \{U \in \widehat{X} : \infty \in U, \#(\widehat{X} \setminus U) \leq \omega\}$. Die Menge $\mathcal{N}(\infty)$ ist gerichtet bezüglich umgekehrter Inklusion. Da X überabzählbar ist, ist $X \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{N}(\infty)$. Wir können also $x_U \in X \cap U$ wählen. Das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(\infty)}$ konvergiert gegen ∞, denn für jedes $U \in \mathcal{N}(\infty)$ und jedes $V \geq U$, d.h. $V \subseteq U$, gilt $x_V \in U$.

   Wer die Wahl vermeiden möchte, kann ein Netz wie folgt konstruieren: Ordne

$$\Lambda = \{(U, x) : U \in \mathcal{N}(\infty), x \in X \cap U\}$$

   mit umgekehrter Inklusion und setze $x_\lambda = x$ für $\lambda = (U, x)$ Dann ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz mit $x_\lambda \to \infty$.

b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ irgendeine Folge. Dann ist $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und $U = \widehat{X} \setminus F$ ist (offene) Umgebung von ∞. Per Definition ist die Folge disjunkt von U, kann also nicht gegen ∞ konvergieren.

c) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\widehat{X}$. Ist der Grenzwert $x \in X$, dann muss die Folge schliesslich in der offenen Menge $\{x\}$ liegen, ist also schliesslich konstant. Ist der Grenzwert ∞, dann muss $F = \{x_n : x_n \neq \infty\}$ endlich sein, ansonsten wäre die Folge nicht schliesslich in der Umgebung $\widehat{X} \setminus F$ von ∞. In anderen Worten, die Folge muss auch in diesem Fall schliesslich konstant sein.

   Die konvergenten Folgen in $\widehat{X}$ sind genau die schliesslich konstanten Folgen.

d) Da eine konvergente Folge $x_n \to x$ schliesslich konstant ist, ist auch $f(x_n)$ schliesslich konstant. Es gilt also $f(x_n) \to f(x)$, und daher ist f folgenstetig.

   Die Funktion f ist nicht stetig, denn ist U eine offene Menge, die 1, aber nicht 0 enthält, dann ist $f^{-1}U = \{\infty\}$ nicht offen. Oder: wähle das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ aus Teil a). Dann gilt $x_U \to \infty$, und $0 = f(x_U) \not\to f(\infty) = 1$

5. a) Es gilt $S^k_F \geq s^k_F$ per Definition. Ist $F_2 = F_1 \cup \{y\}$, so ist $x_{k-1} < y < x_k$ für ein gewisses k, und es gelten dann

$$\begin{gathered} S^0_{F_1} g = S^0_{F_2} g, \ldots, S^{k-1}_{F_1} g = S^{k-1}_{F_2} g, \\ S^k_{F_1} g \geq S^k_{F_2} g \quad \text{und} \quad S^k_{F_1} g \geq S^{k+1}_{F_2} g, \\ S^{k+1}_{F_1} = S^{k+2}_{F_2}, \ldots, S^n_{F_1} = S^{n+1}_{F_2}, \end{gathered}$$

also $\overline{\Sigma}_{F_1} g \geq \overline{\Sigma}_{F_2} g$. Induktiv folgt $\overline{\Sigma}_{F_1} g \geq \overline{\Sigma}_{F_2} g$ immer wenn $F_1 \subseteq F_2$. Ähnlich zeigt man $\underline{\Sigma}_{F_1} g \leq \underline{\Sigma}_{F_2} g$ immer wenn $F_1 \subseteq F_2$.

Die Netze $(\overline{\Sigma}_F g)_{F \in \mathscr{F}}$ und $(\underline{\Sigma}_F g)_{F \in \mathscr{F}}$ sind also monoton fallend und monoton wachsend, konvergieren also gegen Infimum und Supremum, da sie beschränkt sind.

b) Genau für die Riemann-integrierbaren g gilt Gleichheit. Die konvergenten Netze aus a) sind gerade obere und untere Riemannsumme von g auf $[a, b]$.

6. a) Ist $F_1 \subseteq F_2$, dann ist $\chi_{F_1} \leq \chi_{F_2}$, das Netz ist also monoton wachsend. Da $F \subset [0, 1]$ ist, gilt $\chi_{F_1} \leq \chi_{[0,1]}$.

b) Sei $x \in [0, 1]$ beliebig. Für $F \supseteq \{x\}$ gilt $\chi_F(x) = 1 = \chi_{[0,1]}(x)$, also folgt die punktweise Konvergenz.

c) Wegen $\int \chi_F \,\mathrm{d}\mu = 0$ ist der linke Grenzwert gleich 0, während die rechte Seite $\int \chi_{[0,1]} \,\mathrm{d}\mu = 1$ ist.

d) Für $F \in \mathscr{F}$ wähle eine stetige Funktion $f_F \colon [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f_F(x) = 1$ für $x \in F$ und $\int f_F \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{1+\#F}$. Wie in b) folgt, dass $f_F \to \chi_{[0,1]}$ punktweise und nach Konstruktion ist $0 \leq f_F \leq \chi_{[0,1]}$. Dann ist $\lim_{\mathscr{F}} \int f_F \,\mathrm{d}\mu = 0$ ungleich $1 = \int \lim_{\mathscr{F}} f_F \,\mathrm{d}\mu$.

Bemerkung: Die Folge stetiger Funktionen f_F kann *nicht* monoton gewählt werden. Man kann zeigen, dass für Radon-Masse der Satz über monotone Konvergenz für Netze positiver (unterhalb)stetiger Funktionen immer noch gilt. Siehe z.B. Fremlin, *Measure Theory*, Volume 4 I, 414B.